UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Instituto de Matemátia
Programa de Pós graduação em Matemática

Gabarito da Prova de Seleção de Mestrado

---

1. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua. Então existe pelo menos um ponto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

Solução: Defina a função auxiliar $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) - x.$$

Como f é contínua e a função $x \mapsto -x$ é contínua, g é contínua em $[0,1]$.

Avaliamos g nos extremos do intervalo:

- $g(0) = f(0) - 0 = f(0)$. Como $f(0) \in [0,1]$, temos $g(0) \geq 0$.
- $g(1) = f(1) - 1$. Como $f(1) \in [0,1]$, temos $f(1) - 1 \leq 0$, ou seja, $g(1) \leq 0$.

Analisamos três casos:

(a) Se $g(0) = 0$, então $f(0) = 0$ e $c = 0$ é ponto fixo.

(b) Se $g(1) = 0$, então $f(1) = 1$ e $c = 1$ é ponto fixo.

(c) Caso contrário, temos $g(0) > 0$ e $g(1) < 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário (aplicado à função contínua g no intervalo $[0,1]$), existe $c \in (0,1)$ tal que $g(c) = 0$. Portanto $f(c) - c = 0$, donde $f(c) = c$.

Em qualquer situação, existe $c \in [0,1]$ com $f(c) = c$, o que completa a demonstração.

2. Prove que toda sequência de números reais que é limitada e monótona é necessariamente convergente.

Solução: Seja (a_n) uma sequência limitada e não-decrescente (sem perda de generalidade). Vamos mostrar que ela converge para

$$l = sup\{a_n |\ n \geq 1\}.$$

Fixe $\epsilon > 0$. Por definição, l é uma cota superior para a sequência. Assim, $l + \epsilon > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ainda pela definição de supremo de uma sequência, l é a menor das cotas superiores de (a_n). Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que $a_m > l - \epsilon$. Como a sequência (a_n) é não-decrescente, a última inequação implica que $a_n > l - \epsilon$ para todo $n \geq m$. Por tanto $-\epsilon < a_n - l < \epsilon$, para cada $n \geq m$.

3. Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞. Suponha que exista $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(y)| \leq K$ para todo $y \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que para todo $x, x_0 \in I$ vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x).$$

Dica: Use a Fórmula de Taylor e o fato da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ convergir para todo $a \geq 0$.

Solução: Dado $m \in \mathbb{N}$, pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange, existe ξ_m entre x e x_0 tal que $f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \frac{f^{m+1}(\xi_m)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$. Assim, $0 \leq |f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n| = |\frac{f^{m+1}(\xi_m)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}| \leq K\frac{|x-x_0|^{m+1}}{(m+1)!}$. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-x_0|^n}{n!}$ converge temos $\lim_{m\to+\infty} K\frac{(x-x_0)^{(m+1)}}{(m+1)!} = 0$ e consequentemente, pelo teorema do confronto, $\lim_{m\to+\infty} |f(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n| = 0$. Portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x).$$

4. Sejam I um intervalo, $a; b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, $\phi : I \to [a; b]$ e : $\psi : I \to [a; b]$ duas funções de classe C^1 e $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que, se $F : I \to \mathbb{R}$ é definida por

$$F(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$$

então $F'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\phi(x))\phi'(x)$, para cada $x \in I$. Além disso, conclua que F é de classe C^1.

Solução: Definindo $G(y) = \int_a^y f(t)\,dt$ temos que $G \in C^1([a, b])$ e $G'(y) = f(y)$. Usando as propriedades da integral, temos

$$F(x) = G(\psi(x)) - G(\phi(x)).$$

Como ϕ, ψ e G são de classe C^1, temos que F é de classe C^1 e, pela regra da cadeia, concluímos que $F'(x) = f(\psi(x))\,\psi'(x) - f(\phi(x))\,\phi'(x)$.

5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável, com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Prove que, se o conjunto $\{x \in [a, b] : f'(x) = 0\}$ tem conteúdo nulo então f é crescente (isto é, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$).

Solução: Demonstraremos por contra-positiva. Como $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, temos que $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$. Assim, supondo que f não é crescente existem c, d tais que $a \leq c < d \leq b$ e $f(c) = f(d)$. Mais ainda, pela monotonicidade de f apresentada no início da questão temos que $f(x) = f(c) = f(d)$ pra cada $x \in [c, d]$. Assim $f'(x) = 0$, para cada $x \in (c, d)$. Como $(c, d) \subset \{x \in [a, b] : f'(x) = 0\}$ e (c, d) não possui conteúdo nulo concluímos que $\{x \in [a, b] : f'(x) = 0\}$ não possui conteúdo nulo.