



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós graduação em Matemática

---

Gabarito da Prova de Seleção de Doutorado

---

1. Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua satisfazendo  $f(tx) = tf(x)$ , quando  $t \geq 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . Mostre que, se  $f(y) < 0$ , para cada  $y \in S^{n-1}$ , então existe  $a > 0$  tal que

$$f(x) \leq -a\|x\|, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Solução:** Como  $f$  é contínua e a esfera é compacta, existe  $A$  na esfera tal que  $f(y) \leq f(A) < 0$ , para todo ponto na esfera. Definamos  $a := -f(A) > 0$ , por outro lado observe que  $f(x) = \|x\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$  para todo  $x \neq 0$ . Daí  $f(x) \leq -a\|x\|$  para todo  $x \neq 0$ . Por fim, note que  $f(0) = 0$  e logo verifica a mesma desigualdade.

2. Prove que duas normas quaisquer no espaço  $\mathbb{R}^n$  são equivalentes.

**Solução:** Basta mostrar que toda norma em  $\mathbb{R}^n$  é equivalente à norma da soma.

Seja  $\{e_1, \dots, e_m\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^m$ . Para todo  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ , pela desigualdade triangular,

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^m x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^m |x_i| \|e_i\| \leq C\|x\|_1,$$

onde  $C := \max_{1 \leq i \leq m} \|e_i\|$ . Por outro lado, o conjunto  $S := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_1 = 1\}$  é compacto e a aplicação  $x \mapsto \|x\|$  é contínua. Portanto, existe uma constante  $c > 0$  tal que  $\|x\| \geq c, \forall x \in S$ . Dado  $x \neq 0$ , definindo  $y = x/\|x\|_1 \in S$ , obtemos

$$\|x\| = \|x\|_1 \|y\| \geq c\|x\|_1.$$

Concluimos que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\| \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

o que prova a equivalência entre  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|_1$ .

3. Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e conexo. Mostre que  $X$  é conexo por caminhos.

**Solução:** Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo. Fixe  $x_0 \in X$  e defina

$$Y = \{x \in X \mid \text{existe um caminho contínuo em } X \text{ ligando } x_0 \text{ a } x\}.$$

Claramente  $x_0 \in Y$ , logo  $Y \neq \emptyset$ . Mostraremos que  $Y$  é aberto e fechado em  $X$ . Como  $X$  é conexo, teremos  $Y = X$ , e portanto  $X$  é conexo por caminhos.

*Y é aberto em X:* Tome  $y \in Y$ . Como  $X$  é aberto, existe  $r > 0$  tal que a bola aberta  $B(y, r) \subset X$ . Para qualquer  $z \in B(y, r)$ , o segmento de reta de  $y$  a  $z$  está contido em  $B(y, r)$  (pois a bola é convexa). Concatenando o caminho de  $x_0$  a  $y$  (que existe por  $y \in Y$ ) com esse segmento, obtemos um caminho de  $x_0$  a  $z$  inteiramente contido em  $X$ . Logo  $z \in Y$  e, portanto,  $B(y, r) \subset Y$ . Assim,  $Y$  é aberto.

*X \setminus Y é aberto:* Tome  $w \in X \setminus Y$  (não existe caminho de  $x_0$  a  $w$ ). Como  $X$  é aberto, existe  $\varepsilon > 0$  com  $B(w, \varepsilon) \subset X$ . Se houvesse  $u \in B(w, \varepsilon) \cap Y$ , então existiria caminho de  $x_0$  a  $u$ ; o segmento de reta de  $u$  a  $w$  está em  $B(w, \varepsilon) \subset X$ , e a concatenação daria um caminho de  $x_0$  a  $w$ , contradizendo  $w \notin Y$ . Logo  $B(w, \varepsilon) \subset X \setminus Y$ . Assim,  $X \setminus Y$  é aberto.

Temos  $X = Y \cup (X \setminus Y)$ , união disjunta de dois abertos em  $X$ . Como  $X$  é conexo e  $Y \neq \emptyset$ , segue que  $X \setminus Y = \emptyset$ , ou seja,  $Y = X$ . Portanto todo ponto de  $X$  pode ser ligado a  $x_0$  por um caminho em  $X$ , mostrando que  $X$  é conexo por caminhos.

4. Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções contínuas definidas em  $C = [0, 1]^d \subset \mathbb{R}^d$ . Suponha que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente em  $C$ . Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n = \int_C f.$$

**Solução:** Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Da convergência uniforme, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n \geq N$  e para todo  $x \in C$ ,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Então, para  $n \geq N$ ,

$$\left| \int_C f_n - \int_C f \right| = \left| \int_C (f_n - f) \right| \leq \int_C |f_n - f| \leq \int_C \varepsilon \, dx = \varepsilon.$$

Segue-se o desejado.

5. Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$ . Prove que, se  $a \in U$  é um ponto de mínimo local de  $f$  então a matriz hessiana  $Hf(a) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right]_{(i,j)}$  é semidefinida positiva (isto é,  $\langle Hf(a)v, v \rangle \geq 0$ , para cada  $v \in \mathbb{R}^n$ ).

**Solução:** Como  $U$  é aberto existe  $r > 0$  tal que  $B(a, r) \subset U$ . Dado  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  defina  $\varphi(t) = f(a + tv)$ , para  $|t| < \frac{r}{|v|}$ . Note que  $\varphi$  é de classe  $C^2$  em  $(-\frac{r}{|v|}, \frac{r}{|v|})$ . Ademais, como  $a$  é ponto de mínimo local de  $f$  temos que  $t = 0$  é mínimo local de  $\varphi$ . Logo,  $\varphi'(0) = 0$  e  $\varphi''(0) \geq 0$ . Por outro lado, da regra da cadeia:

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + tv) v_j \quad \text{e} \quad \varphi''(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + tv) v_i v_j.$$

Aplicando  $t = 0$  temos

$$\langle Hf(a)v, v \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i v_j = \varphi''(0) \geq 0.$$