UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Instituto de Matemátia

Programa de Pós graduação em Matemática

Padrão de Resposta (Retificado)– Seleção de Mestrado

---

1. Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em S. É suficiente provarmos que essa sequência possui uma subsequência convergente. Pela definição de S, existem duas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X de modo que $x_n + y_n = s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por X ser compacto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, digamos, convergindo para $a \in X$. O mesmo é válido para a sequência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Para não carregar a notação, não vamos gerar uma nova sequência de índices, vamos supor que a própria $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente, converge para $b \in X$. Logo, a sequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e converge para um ponto de S, o ponto $a + b$.

2. **(a)** Seja $f : X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, e seja $a \in X$. Dizemos que f é contínua em a se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$,

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Diz-se que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma funão contínua quando f é contínua em todos os pontos de $a \in X$.

(b) Dado $\varepsilon > 0$. Como g é contínua em b, existe $\eta > 0$ tal que

$$|y - b| < \eta \;\Rightarrow\; |g(y) - g(b)| < \varepsilon.$$

Como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \eta.$$

Logo, se $|x - a| < \delta$, então

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Assim, o resultado segue.

3. Continuidade em 0.

Sabemos que $|\sin(1/x)| \leq 1$. Daí, $|f(x)| = |x^2 \sin(1/x)| \leq x^2$.

Como $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, segue pelo Teorema do Confronto que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Como $f(0) = 0$, conclui-se que f é contínua em 0.

Derivabilidade em 0.

Note que, para $h \neq 0$, vale que

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} = h \sin(1/h).$$

Também note que

$$\lim_{h\to 0} h \sin(1/h) = 0.$$

Portanto, $f'(0) = 0$. Ou seja, f é derivável em $x = 0$.

4. Primeiro note que, como f é derivável, ela é contínua em todo intervalo fechado contido em $(c, +\infty)$. Agora fixe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c < n_0$. Para cada $n \geq n_0$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $x_n \in (n, n+1)$ tal que $f(n+1) - f(n) = f'(x_n)$. Como $n < x_n$ para todo $n > n_0$, temos $x_n \to +\infty$. Combinando isso com $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = b$, obtemos $\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x_n) = b$. Portanto,

$$b = \lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to+\infty} [f(n+1) - f(n)] = a - a = 0.$$

5. Sim pois

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (x-1) f\left((x-1)^2\right) dx &= \int_0^1 (x-1) f\left((x-1)^2\right) dx + \int_1^2 (x-1) f\left((x-1)^2\right) dx \\
&= \int_0^1 (x-1) f\left((x-1)^2\right) dx - \int_1^2 (-x+1) f\left((-x+1)^2\right) dx \\
&= \int_{-1}^0 u f\left(u^2\right) du + \int_0^{-1} v f\left(v^2\right) dv \\
&= \int_{-1}^0 u f\left(u^2\right) du - \int_{-1}^0 v f\left(v^2\right) dv = 0
\end{aligned}$$

em que na terceira igualdade foram usadas as mudanças de variáveis $u = x - 1$ e $v = -x + 1$.