

Padrão de Resposta - Mestrado 2025.2

1. Seja k um número natural que satisfaz $b_n > a_n$ para todo $n \geq k$. Segue-se que

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=k}^{\infty} b_n < \infty.$$

Portanto, $\sum a_n$ é convergente.

2. A afirmação é verdadeira. Suponha que $f(0) > 0$ e considere $g(x) = f(x) - x$. É imediato que $g(0) > 0$. Se existe $x_0 \in [0, \infty)$ tal que $f(x_0) < x_0$ então $g(x_0) < 0$ e o problema está encerrado pelo teorema do valor intermediário. O caso contrário é um absurdo, pois $f(x) \geq x$ para todo $x \in [0, \infty)$ implica que f não é limitada.

$$\sup f(x) =: M < \infty.$$

3. Dados $x \neq y$, temos

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq |x - y|^\alpha.$$

Como $\lim_{x \rightarrow y} |x - y|^\alpha = 0$, deduzimos que

$$\lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = 0,$$

o que implica, para todo $t \in \mathbb{R}$, que $f'(t)$ existe e

$$f'(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = 0,$$

concluimos que $f(x)$ é constante.

4. (a) Como f é contínua, então $|f|$ também o é. Se $|f(c)| \neq 0$ para algum $c \in [a, b]$, por continuidade existe uma constante $C > 0$ tal que $|f| \geq C$ no intervalo $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b] \cap [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, para algum ε . Logo

$$\int_a^b |f| \geq \int_\alpha^\beta |f| \geq (\beta - \alpha)C > 0.$$

Uma contradição. Portanto $f(c) = 0$.

(b) Tome $g = f$ e argumente similarmente.

5. Suponha o contrário, isto é, todo elemento do conjunto dado X não é ponto de acumulação, logo este é um ponto isolado. Então o conjunto X é formado por pontos que são isolados. Para cada ponto p de X podemos obter um intervalo aberto, centrado neste ponto, tal que o único elemento deste intervalo pertencente ao conjunto X é o próprio ponto p . Assim, definimos uma família de intervalos abertos tal que em cada intervalo deste existe apenas um elemento do conjunto X . Portanto em cada um destes intervalos, que são abertos, escolhemos um número racional e definimos assim uma função injetora que leva X em um subconjunto dos racionais. Como o conjunto dos números racionais é enumerável o resultado segue.