UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Instituto de Matemátia
Programa de Pós graduação em Matemática

Padrão de Respostas da Seleção de Mestrado
Data: 07 de março de 2025

---

1. Se $a = b$, temos $\lim \sqrt[n]{2b^n} = b \lim \sqrt[n]{2} = b = \max\{a, b\}$. Suponha, sem perda de generalidade, $b > a$. Neste caso, $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = \lim \left[b \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} \right] = b = \max\{a, b\}$, pois $\left(\frac{a}{b}\right) < 1$.

2. Tomemos $c = \frac{[g(a)+f(a)]}{2}$ e $\epsilon = g(a) - c = c - f(a)$. Então $\epsilon > 0$ e $f(a) + \epsilon = g(a) - \epsilon = c$. Como f e g são contínuas em a, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X$, $|x - a| < \delta_1$ implica $f(a) - \epsilon < f(x) < c$ e $x \in X$, $|x - a| < \delta_2$ implica $c < g(x) < g(a) + \epsilon$. Seja δ o menor dos números δ_1 e δ_2. Então $x \in X$, $|x - a| < \delta$ implica $f(x) < c < g(x)$.

3. Fixe $x, a \in I$ com $x \neq a$ e assuma que $t \in (0, 1]$. Como f é convexa tem-se

$$f(a + t(x - a)) \leq f(a) + t(f(x) - f(a)).$$

Portanto,

$$\frac{f(a + t(x - a)) - f(a)}{t(x - a)}(x - a) \leq f(x) - f(a).$$

Fazendo t tender a zero o resultado segue.

4. Existe (y_k) tal que $|x - y_k| \to d(x, F)$. Logo, $|x_k| \leq |y_k - x| + |x|$ é limitada. Usando o Teo. de Bolzano-Weierstrass, existem (y_{k_j}) e $y \in F$ tais que $y_{k_j} \to y$. Logo, $d(x, F) = \lim |y_{k_j} - x| = |y - x|$.

5. Definindo $G(y) = \int_a^y f(t)dt$ temos que $G \in C^1([a, b])$ e $G'(y) = f(y)$. Usando as propriedades da integral, temos $F(x) = G(\psi(x)) - G(\phi(x))$. Como ϕ, ψ e G são de classe C^1 temos que F é de classe C^1 e, pela regra da cadeia concluímos que $F'(x) = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$