



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Instituto de Matemática
Programa de Pós graduação em Matemática

Padrão de Resposta – Seleção de Doutorado

1. Sim. Tome $B = B(a; r)$ a bola aberta de centro a e raio $r > 0$. Se $x, y \in B$ então $|x - a| < r$ e $|y - a| < r$. Para qualquer $t \in [0, 1]$, temos que:

$$|(1 - t)x + ty - a| = |(1 - t)(x - a) + t(y - a)| \leq (1 - t)|x - a| + t|y - a| < r.$$

Justificamos de maneira análoga no caso de uma bola fechada $\bar{B}[a; r]$.

2. Seja $x_0 \in X$. Por $f(X)$ ser discreto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(f(x_0), \epsilon) \cap f(X) = f(x_0). \quad (1)$$

Por f ser contínua, existe $\delta > 0$ de modo que, $x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \epsilon)$. Disso e da Equação (1), segue-se que f é constante em $B(x_0, \delta)$.

3. Como T não é identicamente nula, existe $v \in \mathbb{R}^m$ de modo que $|T(v)| = a > 0$. Como T é linear, para todo $n \in \mathbb{N}$ é válido que $|T(nv)| = na$. Assim T não é limitada.

Para a segunda parte, considere $c = \max\{|Te_1|, \dots, |Te_m|\}$. Se o conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é limitado então existe $k > 0$ tal que, $\sum |x_i| \leq k$ para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in X$. Onde $|T(x)| = |\sum x_i Te_i| \leq \sum |x_i| |Te_i| \leq c \sum |x_i| \leq ck$. Portanto $T_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é limitada.

4. Como f é contínua e $f(0, t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$, para cada $t \in [a, b]$ existe uma vizinhança aberta $V_t \subset \mathbb{R}^m$ da origem e um número $\epsilon_t > 0$ tais que $f(V_t \times (t - \epsilon_t, t + \epsilon_t)) \subset U$. Os conjuntos $V_t \times (t - \epsilon_t, t + \epsilon_t)$ são abertos em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ e formam uma cobertura para o compacto $\{0\} \times [a, b]$ (pois $(0, t) \in V_t \times (t - \epsilon_t, t + \epsilon_t)$, para cada $t \in [a, b]$). Assim existem $t_1, \dots, t_k \in [a, b]$ tais que

$$\{0\} \times [a, b] \subset \bigcup_{j=1}^k V_{t_j} \times (t_j - \epsilon_{t_j}, t_j + \epsilon_{t_j}). \quad (2)$$

Defina $V = \bigcap_{j=1}^k V_{t_j}$. Então V é uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{R}^m$ (interseção finita de abertos contendo a origem). Afirmamos que $f(V \times [a, b]) \subset U$. De fato, se $(v, s) \in V \times [a, b]$ então segue de (2) que existe $j_0 \in 1, \dots, k$ tal que $(0, s) \in V_{t_{j_0}} \times (t_{j_0} - \epsilon_{t_{j_0}}, t_{j_0} + \epsilon_{t_{j_0}})$. Consequentemente $s \in (t_{j_0} - \epsilon_{t_{j_0}}, t_{j_0} + \epsilon_{t_{j_0}})$ e $f(v, s) \in f(V \times (t_{j_0} - \epsilon_{t_{j_0}}, t_{j_0} + \epsilon_{t_{j_0}})) \subset f(V_{t_{j_0}} \times (t_{j_0} - \epsilon_{t_{j_0}}, t_{j_0} + \epsilon_{t_{j_0}})) \subset U$.

5. Fazendo a mudança de variáveis $h(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ temos $|\det h'(r, \theta)| = r$ e consequentemente

$$\iint_{B(0, R)} e^{-x^2 - y^2} d(x, y) = \int_0^R \int_0^{2\pi} r e^{-r^2} = \pi(-e^{-R^2} + 1).$$