Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Padrão de Resposta - Doutorado 2025.2

1. Defina a função $F : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $F(x, y, z) = xy - z \log y + e^{yz} - e$. Veja que: $F(0, 1, 1) = 0$, F é de classe C^1 (composta por funções elementares diferenciáveis) e

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,1,1)} = -\log 1 + 1 \cdot e^1 = e \neq 0$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança U de $(0, 1)$ e uma função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que $z = f(x, y)$ satisfaz $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in U$.

2. Suponha que f seja contínua e U seja um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Seja $a \in f^{-1}(U)$, então $f(a) \in U$ e, como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a); \varepsilon) \subseteq U$. Pela continuidade de f, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in A, \text{ com } |x - a| < \delta.$$

Isso significa que $f(B(a; \delta) \cap A) \subset B(f(a); \varepsilon) \subseteq U$. Portanto, $B(a; \delta) \cap A \subset f^{-1}(U)$, e assim $f^{-1}(U)$ é aberto em A. Isso prova que (a) implica (b).

Reciprocamente, suponha que (b) vale. Fixe $a \in A$ e $\varepsilon > 0$, e tome $U = B(f(a); \varepsilon)$. Por hipótese, $f^{-1}(U)$ é aberto em A e contém o ponto a, ou seja, existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \cap A \subset f^{-1}(U)$. Em outras palavras, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ com $|x - a| < \delta$, e portanto f é contínua.

3. Começamos recordando que a imagem de uma função contínua por um conjunto compacto é um conjunto compacto. Em particular $f(X)$ é fechado em $\mathbb{S}^n$. Por outro lado, f é uma aplicação aberta, donde, por definição, $f(X)$ é aberto em $\mathbb{S}^n$. Por fim, observe que $\mathbb{S}^n$ é um conjunto conexo, donde ela não admite subconjuntos próprios que são simultaneamente abertos e fechados. Assim, devemos ter que $f(X) = \mathbb{S}^n$.

4. Fixe $\epsilon > 0$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ grande o suficiente de modo que

$$f_n(x) - \epsilon < f(x) < f_n(x) + \epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$ e para todo $x \in A$. Segue-se que

$$\int_A f_n(x)dx - \epsilon \leq \int_A f(x)dx \leq \int_A f_n(x)dx + \epsilon.$$

Segue-se o resultado.

5.
   - A primeira afirmação é verdadeira, pois decorre da aplicação do Teorema da Função Inversa, visto que,
   $$|JF(r, \theta)| = r \neq 0$$
   para qualquer ponto (r, θ) de A_b. Portanto, f é injetora em uma vizinhança de cada (r, θ) de A_b.
   - A segunda afirmação é falsa, basta ver que $f(1, 2\pi) = f(1, 4\pi)$.