Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Padrão de Resposta - Mestrado 2024.2

1. Calcule o limite
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

2. Diz-se que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *limitada superiormente* quando sua imagem é um conjunto limitado superiormente. Então põe-se $\sup f = \sup\{f(x); x \in X\}$. Prove que se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são limitadas superiormente o mesmo ocorre com $f + g : X \to \mathbb{R}$ e tem-se $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$.

3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Prove que o seguinte conjunto também é compacto:
$$S := \{x + y \colon x, y \in X\}$$

4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Prove que, se f é convexa, então vale
$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a),$$
para todo $x, a \in I$.

5. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dados $a, b \in X$ com $[a, b] \subset X$ existe $c \in [a, b]$ tal que
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Respostas:

Q1- O limite em questão é igual a 3. De fato, por um lado, $2^n + 3^n > 3^n$, para todo número natural n. Por outro lado, $2^n + 3^n < 2 \times 3^n$. Portanto,
$$3 < \sqrt[n]{2^n + 3^n} < \sqrt[n]{2} \times 3.$$
O resultado segue de lembrar que $\sqrt[n]{2} \to 1$ quando $n \to \infty$ e do Teorema do Sanduíche.

Q2- De $f, g : X \to \mathbb{R}$ limitadas superiormente, temos que $f(X)$ e $g(X)$ são conjuntos limitados superiormente. Assim, existem a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq a$ e $g(x) \leq b$ para todo $x \in X$. Donde
$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \leq a + b := c$$
para todo $x \in X$. Portanto, $f + g$ é limitada superiormente.

Como
$$(f + g)(x) \leq a + b := c$$
para todo $x \in X$, segue que $a + b$ é uma cota superior de $(f + g)(X)$. Donde, $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$.

Q3- Seja $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em S. É suficiente provarmos que essa sequência possui uma subsequência convergente. Pela definição de S, existem duas sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X de modo que $x_n + y_n = s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por X ser compacto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, digamos, convergindo para $a \in X$. O mesmo é válido para a sequência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Para evitar criar mais um índice, vamos supor que a própria $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente, converge para $b \in X$. Logo, a sequência $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e converge para um ponto de S, o ponto $a + b$.

Q4- Fixe $x, a \in I$ com $x \neq a$ e assuma que $\lambda \in (0.1]$. Como f é convexa tem-se

$$\begin{aligned} f(a+\lambda(x-a)) &= f((1-\lambda)a+\lambda x) \\ &\leq (1-\lambda)f(a)+\lambda f(x) \\ &= f(a)+\lambda(f(x)-f(a)). \end{aligned} \tag{1}$$

Portanto,

$$\frac{f(a+\lambda(x-a))-f(a)}{\lambda(x-a)}(x-a) \leq f(x)-f(a).$$

Fazendo λ tender a zero o resultado segue.

Q5- Como f é contínua em $[a, b]$, existem x_1 e x_2 em [a,b] tais que

$$m = \min_{[x_1,x_2]} f = f(x_1) \text{ e } M = \max_{[x_1,x_2]} f = f(x_2).$$

Usando propriedade de integrais temos que

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f dx \leq f(x_2).$$

Pelo TVI, existe algum ponto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.