Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Processo Seletivo PPGMAT
Data: 27/11/2024 Horário: De 09:00 Ás 12:00

Inscrição: ______________________________

Prova de seleção do mestrado

Exercício 1.
Mostre que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + \sqrt{17}$ possui exatamente um raiz real.

Exercício 2.
Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se *localmente limitada* quando para cada $x \in X$ existe um intervalo I_x, contendo x, tal que $f\,|_{X\cap I_x}$ é limitada. Mostre que:

(a) se X é compacto, toda função f localmente limitada é f é limitada.

(b) se X é conexo, toda função f localmente limitada é f é constante.

Exercício 3.
Mostre que $f(x) = |x|^{2n+1}$ é de classe C^{2n} na reta inteira, mas não é $2n+1$ diferenciável.

Exercício 4.
Prove que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Exercício 5.
Seja $\lambda \in \mathbb{R}, 0 < \lambda < 1$, e seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que para cada n vale que $|x_{n+1}| \leq \lambda |x_n|$. Mostre que $x_n \to 0$ quendo $n \to \infty$.

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Processo Seletivo PPGMAT
Data: 27/11/2024 Horário: De 09:00 Ás 12:00

Gabarito da Prova de seleção do mestrado

Solução 1. Como f é um polinômio, temos que é diferenciável e, também, contínua. Usando que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

temos que existe α suficientemente grande tal que $f(-\alpha) < 0 < f(\alpha)$. Logo, usando o Teorema do Valor Intermediário, podemos concluir que existe $c \in (-\alpha, \alpha)$ tal que $f(c) = 0$. Ou seja, f possui pelo menos uma raiz real.

Para mostrar que c é a única raiz real, suponha por absurdo que existem $c_1 < c_2$ tais que $f(c_1) = 0 = f(c_2)$. Pelo Teorema de Rolle, deveria existir $d \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(d) = 0$. No entanto,

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4 = 0$$

não possui raiz, desde que o discriminante $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 36 - 48 = -12 < 0$. Absurdo!

Solução 2.

(a) Considere uma cobertura $(I_x)_x$ de X tal que $f\,|_{X\cap I_x}$ é limitada por $K_x > 0$. Isto é, para todo $y \in X \cap I_x$ tem-se $|f(y) - f(x)| \le K_x$. Como X é compacto, pode tomar uma subcobertura finita $(I_{x_j})_{j=0}^n$. Então, dado $y \in X$, existe $x_j \in X$ com $0 \le j \le n$, tal que $y \in X \cap I_{x_j}$. Assim,

$$|f(y) - f(x_0)| \le |f(y) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x_0)| \le K,$$

onde $K = \max\{K_{x_j} : 0 \le j \le n\} + \max\{|f(x_j) - f(x_0)| : 0 \le j \le n\}$.

(b) Seja $x_0 \in X$ um ponto qualquer. Defina $\Sigma = \{x \in X : f(x) = f(x_0)\}$. Claramente, $x_0 \in \Sigma$. Mostraremos a seguir que Σ é aberto e fechado em X e, pela conexidade de X, concluiremos que $\Sigma = X$, resolvendo o item (b).

- Dado $x \in \Sigma$, temos $f(x) = f(x_0)$ por definição de Σ. Por outro lado, como f é localmente constante, existe um intervalo I_x contendo x tal que $f(y) = f(x)$ para todo $y \in X \cap I_x$. Logo, $f(y) = f(x_0)$ para todo $y \in X \cap I_x$, mostrando que $X \cap I_x \subset \Sigma$. Portanto, Σ é aberto em X.
- Seja $x_n \in \Sigma$ uma sequencia convergindo para $x \in X$. Usando novamente que f é localmente constante, temos $f(y) = f(x)$ para todo $y \in X \cap I_x$. Tomando n suficientemente grande temos que $x_n \in X \cap I_x$, implicando que $x \in \Sigma$ porque $f(x) = f(x_n) = f(x_0)$. Isto implicar portanto que Σ é fechado em X.

Solução 3. Como $|x| = \begin{cases} x & , x \ge 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$. Vamos usar um argumento de recorrência. Para isso, defina $f_m = |x|^m$. Então, temos que

$$f'_m(x) = \begin{cases} mx^{m-1} & , x > 0 \\ m(-x)^{m-1} & , x < 0 \end{cases}.$$

Para $x = 0$, temos que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f_m(h) - f_m(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(-h)^m}{h} = 0 = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^m}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f_m(h) - f_m(0)}{h}.$$

Portanto, $f'(0) = 0$. Consequentemente, $f'_m(x) = m|x|^{m-1} = mf_{m-1}(x)$ é continua e assim de classe C^1. Logo, derivando f_m k-vezes com $1 \le k \le m-1$, obtemos por recorrência que:

$$\frac{d^k f_m}{dx^k}(x) = m\frac{d^{k-1} f_{m-1}}{dx^{k-1}}(x) = \cdots = [m \cdot (m-1) \cdots (m-k+2)] \frac{d}{dx} f_{m-k+1}(x) = [m \cdot (m-1) \cdots (m-k+1)] f_{m-k}(x). \tag{1}$$

Como f_{m-k} é contínua para $1 \le k \le m-1$, temos que f_m é de classe C^k. Em particular, obtemos que f_{2n+1} é de classe C^{2n}.

No entanto, por (1), podemos concluir que

$$\frac{d^{m-1} f_m}{dx^{m-1}}(x) = [m \cdot (m-1) \cdots 2] f_1(x)$$

não diferenciável devido ao fato que $f_1(x) = |x|$ não é diferenciável em $x = 0$ já que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \neq 1 = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h}.$$

Ou seja, f_{2n+1} é de classe C^2, mas não é $(2n+1)$-vezes diferenciável.

Solução 4. Como f é contínua em um compacto $[a, b]$, temos que existem $\alpha, \beta \in [a, b]$ tais que $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ para todo $x \in [a, b]$. Logo, temos que

$$f(\alpha)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(\beta)(b-a) \Longrightarrow f(\alpha)(b-a) \leq 0 \leq f(\beta)(b-a).$$

Assim, podemos concluir que $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(c) = 0$.

Solução 5. Note que $|x_{n+1}| \leq \lambda |x_n| \leq \cdots \leq \lambda^n |x_1|$. Como $0 < \lambda < 1$, temos $\lambda^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, $|x_n| \to 0$ e, consequentemente, $x_n \to 0$ quando $n \to \infty$.