UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Padrão de Resposta - Doutorado 2024.2

1. Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Uma aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ diz-se *localmente constante* quando para cada $x \in X$ existe uma bola B de centro x tal que f restrita a B é constante. Prove que, toda aplicação contínua $f : X \to \mathbb{R}^n$ cuja imagem $f(X)$ é um conjunto discreto, é localmente constante.

2. Seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Prove que se $T \neq 0$ então T **não** é uma aplicação limitada. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é uma conjunto limitado, prove que a restrição $T_X : X \to \mathbb{R}^n$ de T ao conjunto X é uma aplicação limitada.

3. Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k $(k \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é invertível então existe uma bola aberta $B = B(a;\delta) \subset U$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto V, com $f(a) \in V$? Em caso afirmativo justifique com uma demonstração, em caso negativo com um contra-exemplo.

4. Seja $\wedge$ o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$. Para todo $v \in \mathbb{R}^3$ e todo caminho $f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ integrável, prove que
$$\int_a^b [v \wedge f(t)]dt = v \wedge \int_a^b f(t)dt.$$

5. Prove que o conjunto das matrizes ortogonais $(n \times n)$ é um conjunto compacto.

Respostas:

Q1- Seja $x_0 \in X$. Por $f(X)$ ser discreto, existe $\epsilon > 0$ tal que
$$B(f(x_0),\epsilon) \cap f(X) = f(x_0). \tag{1}$$
Por f ser contínua, existe $\delta > 0$ de modo que, $x \in B(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0),\epsilon)$. Disso e da Equação (1), segue-se que f é constante em $B(x_0,\delta)$.

Q2- Se $|T(v)| = a > 0$ então $|T(nv)| = na$. Assim T não é limitada. Tomando $c = \max\{|Te_1|,...,|Te_m|\}$. Se o conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é limitado então existe $k > 0$ tal que, $\sum |x_i| \leq k$ para todo $x = (x_1,...,x_m) \in X$. Donde $|T(x)| = |\sum x_i Te_i| \leq \sum |x_i||Te_i| \leq c\sum |x_i| \leq ck$. Portanto $T_X : X \to \mathbb{R}^n$ é limitada.

Q3- Sim. Justificativa: Podemos admitir que existe $\delta > 0$ tal que $\bar{B} = B[a;\delta] \subset U$ e que $f|_{\bar{B}}$ é injetiva, assim $f : B \to f(B)$ é um homeomorfismo. Note que $f'(x)$ depende continuamente de x. Também sabemos que $f'(a)$ é invertível, donde podemos supor que, para todo $x \in B$ temos $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é invertível. Agora basta mostrar que $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto e o resultado segue.

Q4- Seja $P = \{t_0 = a, t_1, t_2, ..., t_k = b\}$ uma partição de $[a,b]$. Usando propriedade do produto vetorial, a soma de Riemann do caminho $v \wedge f(t)$ é dada por
$$\sum_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1})(v \wedge M_i) = \sum_{i=1}^{k}(v \wedge (t_i - t_{i-1})M_i),$$
onde $M_i = f(t_i)$. Fazendo a norma da partição P tender a zero, obtemos que $\int_a^b [v \wedge f(t)]dt = v \wedge \int_a^b f(t)dt$.

Q5- Seja M_n o conjunto das matrizes n por n. Defina a aplicação contínua $f : M_n \to M_n$, dada por $f(A) = AA^T$. Como o conjunto das matrizes ortogonais é formado por $f^{-1}(I_d)$, segue que tal conjunto é fechado. A limitação segue do fato de que em uma matriz ortogonal, suas colunas formam um conjunto ortonormal.