Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Processo Seletivo PPGMAT
Data: 27/11/2024 Horário: De 09:00 Ás 12:00

Inscrição: ______________________________

Prova de Seleção do Doutorado

Exercício 1.
Defina a distância entre um ponto e um conjunto no espaço Euclidiano. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Mostre que existe $y_0 \in F$ tal que a distância entre x e F é dada por:

$$d(x, F) = \|x - y_0\|.$$

Exercício 2.
Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 tais que $\|f'(t)\| \leq \varphi'(t)$ para todo $t \in (a, b)$. Mostre que:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a).$$

Exercício 3.
Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in A$ tal que:

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(A)} \int_A f(x)\, dx = f(c).$$

Exercício 4.
Prove que o gráfico de uma função integrável $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida em um bloco n-dimensional, tem medida nula em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercício 5.
Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde $n > 1$, uma função contínua, possuindo todas as derivadas direcionais em qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$. Mostre que, se

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0 \quad \text{para todo } u \in S^{n-1},$$

então existe um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0, \quad \text{para qualquer } v \in \mathbb{R}^n.$$

Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Processo Seletivo PPGMAT
Data: 27/11/2024 Horário: De 09:00 Ás 12:00

Gabarito da prova de seleção do doutorado

Solução 1. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e F um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}^n$, definimos a distância entre x_0 e o subconjunto F por:

$$d(x, F) = \inf\{d(x_0, x) : x \in F\}.$$

Note que, por definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $x \in F$ tal que $d(x_0, F) \leq d(x_0, x) < d(x_0, F) + \varepsilon$. Logo, podemos sempre considerar uma sequência $(x_n)_n \subset F$ tal que $d(x_0, x_n) \to d(x, F)$. Em particular, obtemos que $(x_n)_n$ é uma sequência limitada.

Assumindo que F é um subconjunto fechando, temos que o fecho de $(x_n)_n$ é um subconjunto compacto e está contido em F. Podemos tomar uma subsequência $(x_{n_j})_j$ convergindo para y_0, com $y_0 \in F$. Usando que a função distância $d : \mathbb{R}^n \to R$, $x \mapsto d(x, F)$ é continua, podemos concluir que

$$d(x_0, y_0) = \lim_{j \to +\infty} d(x_0, x_{n_j}) = d(x_0, F).$$

Solução 2. Observe que como f é um caminho de classe C^1, ele é retificável. Logo,

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt \leq \int_a^b \varphi'(t) dt.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos que $\|f(b) - f(a)\| \leq \displaystyle\int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$.

Solução 3. Como o retângulo é compacto e conexo, e f é contínua, existem $a, b \in A$ tais que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad \text{para todo } x \in A.$$

Daí,

$$f(a) \leq \frac{1}{\text{vol}(A)} \int_A f(x)\, dx \leq f(b).$$

Aplicando o Teorema do Valor Intermediário, conclui-se o resultado.

Solução 4. Sendo o bloco A compacto e f contínua, temos que f é uniformemente continua em A. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in A$, com $\|x - y\| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{\text{vol}(A)}$. Assim, dado uma partição $\mathcal{P}$ de A com $|\mathcal{P}| < \delta$, temos que o gráfico de f está contido na união dos cubos da forma $B \times [\inf_{x \in B} f(x), \sup_{x \in B} f(x)]$ com $B \in \mathcal{P}$. Logo,

$$\text{vol}(graf(f)) \leq \text{vol}(\bigcup_{B \in \mathcal{P}} B \times [\inf_{x \in B} f(x), \sup_{x \in B} f(x)]) \leq \sum_{B \in \mathcal{P}} \text{vol}(B) \cdot (\sup_{x \in B} f(x) - \inf_{x \in B} f(x)) \leq \sum_{B \in \mathcal{P}} \text{vol}(B) \cdot \frac{\varepsilon}{\text{vol}(A)} = \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluímos que $\text{vol}(graf(f)) = 0$.

Solução 5. Note que a condição

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0, \quad \text{se } u \in S^{n-1},$$

implica que existe um $\epsilon > 0$ tal que, se $1 - \epsilon < t < 1$, então $f(tu) < f(u)$. Daí, o mínimo global de $f(x)$ em B (bola fechada de raio 1 centrada na origem) é atingido em um ponto a no interior da bola fechada. Então, para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, a função $\phi(t) = f(a + tv)$ tem um mínimo local em $t = 0$. Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \phi'(0) = 0.$$