Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Padrão de Resposta - Mestrado

Q1- Sejam $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ e $(t_n)_{n\geq 1}$ sequência de números reais satisfazendo as seguinte condições: $0 \leq t_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = L.$$

Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} [t_n x_n + (1-t_n)y_n]$$

existe e calcule seu valor.

Solução (Sequências): Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \geq 1$ de modo que $L-\epsilon < x_n < L+\epsilon$ e $L-\epsilon < y_n < L+\epsilon$. Portanto, $t_n(L-\epsilon) < t_n x_n < t_n(L+\epsilon)$ e $(1-t_n)(L-\epsilon) < (1-t_n)y_n < (1-t_n)(L+\epsilon)$.
Segue-se das últimas duas linhas que,

$$L-\epsilon < t_n x_n + (1-t_n)y_n < L+\epsilon.$$

Portanto, a sequência em questão converge para L.

Q2- Prove que toda coleção de conjuntos dois a dois disjuntos, abertos e não-vazios de $\mathbb{R}$ é enumerável.

Solução (Abertos e enumerabilidade): Lembre que o conjunto dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Assim, em cada conjunto aberto de $\mathbb{R}$ é possivel obter um número racional. Portanto, existe uma função injetora entre a coleção de conjuntos abertos dois a dois disjuntos de $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números racionais.

Q3- Prove o seguinte resultado: Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$ com $a_n \leq b_n$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução (Topologia da Reta): Definamos uma sequência (x_n) escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in [a_n, b_n]$. Esta sequência está no compacto $[a_1, b_1]$, logo possui uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots)$ convergindo para um ponto $c \in [a_1, b_1]$. Dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos $x_{n_k} \in [a_n, b_n]$ sempre que $n_k > n$. Como $[a_n, b_n]$ é compacto, seque-se que $c \in [a_n, b_n]$. Isto prova o problema.

Q4- Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e f, $g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $a \in X$ com $f(a) < g(a)$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$.

Solução (Continuidade): Defina $h(x) = g(x) - f(x)$. Observe que h é contínua em a e $h(a) > 0$. Pela definição de continuidade, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta$ implica $h(x) > h(a)/2 > 0$. Daí o resultado segue.

Q5- Sejam f, $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $\inf f = \inf g$. Mostre que existe a tal que $f(a) = g(a)$.

Solução (Continuidade e TVI): Por compacidade existem c e d em $[-1, 1]$ tal que $f(c) = \inf f$ e $g(d) = \inf g$. Se $c = d$, acabou. Caso não, defina $h(x) = g(x) - f(x)$. Note h é contínua em um intervalo conexo, $h(c) = \inf f - g(c) < 0$ e $h(d) = f(d) - \inf g > 0$. Daí segue o resultado.