Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Padrão de Resposta - Doutorado

Q1- Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \colon ||x|| = 1\}$ a esfera unitária. Prove que, se $f : K \to \mathbb{S}^n$ é uma função contínua e aberta, então f é uma função sobrejetora.

Solução (Assunto: Continuidade e Topologia):

Lembre que a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é um compacto. Em particular, $f(K)$ é fechado em $\mathbb{S}^n$. Por outro lado, f é uma aplicação aberta, donde, por definição, $f(K)$ é aberto em $\mathbb{S}^n$. Por fim, observe que $\mathbb{S}^n$ é um conjunto conexo, donde ela não admite subconjuntos próprios que são simultaneamente abertos e fechados. Assim, como $f(K) \neq \emptyset$, devemos ter que $f(K) = \mathbb{S}^n$.

Q2- Seja $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, com K compacto e U aberto, prove que existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^n$, $|x - y| < \epsilon$ implica que $[x, y] \subset U$.

Solução (Assunto: Topologia):

Como K, compacto, e $\mathbb{R}^n - U$, fechado, são disjuntos, existem $a \in K$, $b \in \mathbb{R}^n - U$ tais que para todo $x \in K$ e $y \in \mathbb{R}^n - U$ vale $|x - y| \geq |a - b| =: \varepsilon > 0$. Portanto, para todo $x \in K$, tem-se $B(x; \varepsilon) \subset U$. Se $x \in K$ e $|y - x| < \varepsilon$, então $[x, y] \subset B(x, \varepsilon)$ e daí $[x, y] \subset U$.

Q3- Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e conexo. Seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua.

(a) Mostre que o conjunto $\operatorname{graf}(f) := \{(x, f(x));\ x \in K\}$ é conexo e compacto.

(b) Seja $p \in \mathbb{R}$ um ponto que pertence a imagem de f. Prove que $f^{-1}(p)$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Solução (Assunto: Continuidade):

(a) Defina $\varphi : K \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = (x, f(x))$. Note que φ é contínua e como $\varphi(K) = \operatorname{graf}(f)$, segue $\operatorname{graf}(f)$ é conexo e compacto.

(b) Seja $p \in Im(f)$. Como $\{p\}$ é um conjunto fechado e f é uma função contínua, concluímos que $f^{-1}(p)$ é um conjunto fechado, que contido num compacto, é também compacto. Se existisse homeomorfismo entre $f^{-1}(p)$ e $\mathbb{R}$, então $\mathbb{R}$ seria compacto

Q4- Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : X \times K \to \mathbb{R}^p$ contínua. Suponha que, para cada $x \in X$, exista um único $y \in K$ tal que $f(x, y) = 0$. Prove que y depende continuamente de x.

Solução (Assunto: Função Implícita):

Para cada $x \in X$, seja $\xi(x) \in K$ o único ponto tal que $f(x, \xi(x)) = 0$. Se $\lim x_k = x_0$ em X, admitamos que $a = \lim_{k \in \mathbb{N}'} \xi(x_k)$ e $b = \lim_{k \in \mathbb{N}''} \xi(x_k)$ sejam valores de aderência da sequência $(\xi(x_k))_{k \geq 1}$. Pela continuidade de f tem-se $f(x_0, a) = \lim_{k \in \mathbb{N}'} f(x_k, \xi(x_k)) = 0$, e analogamente, $f(x_0, b) = 0$. Logo $a = b$. A seqüência de pontos $\xi(x_k)$ no compacto K tem portanto um único valor de aderência, logo converge para o ponto $c = \lim \xi(x_k) \in K$, com $f(x_0, c) = \lim f(x_k, \xi(x_k)) = 0$. Assim $c = \xi(x_0)$ e ξ é contínua.

Q5- Seja $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ definida em $\mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que f admite pontos de máximo e mínimo quando restrita à elipse de equação $x^2 + 2y^2 = 1$;

(b) Determine os pontos de mínimo e máximo.

Solução (Assunto: Continuidade e Multiplicador de Lagrange):

(a) f é contínua e a elipse é um subconjunto compacto do plano. Basta usar o Teorema de Weierstress;

(b) Usando multiplicador de Lagrange obtemos:

Máximo: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Mínimo: $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$