Padrão de resposta- Prova de seleção de Doutorado-PPGMAT-UFAL 2022.2

1. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e conexo. Seja $f : K \to \mathbb{R}^n$ contínua.

   (a) Mostre que $\varphi : K \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dado por $\varphi(x) = (x, f(x))$ é contínua. Use isso para concluir que o conjunto graf $(f) := \{(x, f(x)); x \in K\}$ é conexo e compacto.

   Resposta:

   a) Considere $(x_n)_n\,, x_n \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma sequência convergente em K. Seja $x \in K$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Como f é contínua, temos

   $$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(x_n, f\left(x_n\right)\right) = (x, f(x)) = \varphi(x).$$

   Pelo critério de continuidade usando sequências, concluímos que φ é contínua. Para a outra parte, basta observar que $\operatorname{graf}(f) = \varphi(K)$, ou seja, é a imagem do conjunto K por φ. Como φ é contínua (a qual leva compacto em compacto e conexo em conexo), temos que $\varphi(K)$ é compacto e conexo. Portanto vale o mesmo para $\operatorname{graf}(f)$.

   (b) Seja $p \in \mathbb{R}^n$ um ponto que pertence a imagem de f. Prove que $f^{-1}(p)$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

   Resposta:

   Seja $p \in \operatorname{Im}(f)$. Como $\{p\}$ é um conjunto fechado e f é uma função contínua, temos que $f^{-1}(p)$ é um conjunto fechado. Como $f^{-1}(p)$ é subconjunto fechado de um compacto K, segue que $f^{-1}(p)$ é compacto. Suponha que haja um homeomorfismo $h : f^{-1}(p) \to \mathbb{R}^n$. Daí $\mathbb{R}^n = h\left(f^{-1}(p)\right)$, ou seja, seria igual a imagem de um compacto por uma função contínua. Mas isso é uma contradição, já que implicaria que $\mathbb{R}^n$ seria um conjunto compacto.

2. Mostre que a equação

   $$xy - z \log y + e^{xz} = 1$$

   pode ser resolvida de modo único na forma $y = g(x, z)$ em uma vizinhança aberta de $(0, 1, 1)$.

   Resposta:

   Considere a função $F(x, y, z) = xy - z \log y + e^{xz}$ e $p = (0, 1, 1)$. Note que $F(p) = 1$ e

   $$\frac{\partial F}{\partial y}(p) = -1.$$

   A afirmação segue então do Teorema da Função Implícita.

3. Considere a aplicação $H : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ definida por

   $$H(\rho, \theta, \phi) = (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \sin\theta \operatorname{sen}\phi, \rho \cos\phi)$$

   Mostre que H é um difeomorfismo sobre sua imagem. Determine também a imagem de H e sua inversa.

Resposta: Com uma rápida análise, é possível mostrar que H é injetiva. Além disso, o determinante jacobiano de H em um ponto arbitrário do domínio é dado por $-\rho^2 \sin\phi$, o qual nunca se anula no domínio de H. Portanto, pelo Teorema da Aplicação Inversa, H é um difeomorfismo local. Sendo H injetiva, temos que H é um difeo global sobre sua imagem. Além disso, efetuando cálculos diretos temos que $H^{-1}(x,y,z) = (\rho,\theta,\phi)$ é dado por $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \theta = \cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\phi = \cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. A imagem de H é $\mathbb{R}^3 \backslash \{(x,y,z) : y = 0 \ e \ x \geq 0\}$.

4. Encontre os valores de máximo e mínimo da função $f(x,y,z) = y^2 - 10z$ sujeito a condição $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

   Resposta:

   Inicialmente notemos que a função f é contínua no compacto dado por $A := \{(x,y,z); x^2 + y^2 + z^2 = 36\}$, logo ela atinge seu valor de máximo. Usando o método de multiplicadores de Lagrange, obtemos que os pontos críticos (x,y,z) de f devem satisfazer ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = 2x\lambda \\ 2y = 2y\lambda \\ -10 = 2z\lambda \\ x^2+y^2+z^2 = 36 \end{cases} \tag{1}$$

   para certo $\lambda \in \mathbb{R}$. Usando a primeira e a terceira equação, obtemos que $x = 0$. Usando a segunda equação temos que $\lambda = 1$ ou $y = 0$. Assumindo que $y = 0$ obtemos que $z = \pm 6$, obtendo o seguinte ponto $(0,0,-6)$ e $(0,0,6)$. Agora assumindo que $\lambda = 1$, obtemos os seguintes pontos: $(0,-\sqrt{11},-5)$ e $(0,\sqrt{11},-5)$. Calculando os valores obtemos $f(0,-\sqrt{11},-5) = 61 \quad f(0,\sqrt{11},-5) = 61 \quad f(0,0,-6) = 60 \quad f(0,0,6) = -60$. Portanto 61 é o valor de máximo e -60 é o valor de mínimo.

5. Prove que o gráfico de uma função integrável $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida num bloco n-dimensional tem medida nula em $\mathbb{R}^{n+1}$.

   Resposta: Para toda partição P do bloco A, o gráfico de f está contido na reunião dos blocos $(n+1)$ dimensionais $B \times [m_B, M_B]$, $B \in P$, onde m_B e M_B denotam, respectivamente, o supremo e o ínfimo de f em B. O volume de cada um desses blocos é $(M_b - m_B)vol(B)$. Como f é integrável, dado $\epsilon > 0$ existe uma partição P tal que $\sum_{B\in P}(M_b - m_b)vol(B) < \epsilon$. Portanto o gráfico de f tem medida nula.