Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Seleção de Doutorado: Análise no $\mathbb{R}^n$
Soluções

1. Mostre que:
   (a) O conjunto das transformações lineares sobrejetivas é um aberto em $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$;
   (b) O conjunto dos operadores lineares inversíveis é denso em $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$.

   Solução:
   (a) Dado T sobrejetiva, então existem m vetores da base canônica $\{e_{i_1},\ldots,e_{i_m}\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que a matriz de entradas $\langle Te_{i_k},\tilde{e}_l\rangle$ é inversível, onde $\{\tilde{e}_1,\ldots,\tilde{e}_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$. Note que a aplicação $\mathcal{I}:\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\to M(m\times m;\mathbb{R})$ dada por $\mathcal{I}(S)$ igual a matriz de entradas $\langle Se_{i_k},\tilde{e}_l\rangle$ é contínua e como T é sobrejetiva, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\det\mathcal{I}(T)>0$. Usando a continuidade de $\det\circ\mathcal{I}$, obtém-se uma vizinhança do operador T tal que naquela vizinhança todos as transformações lineares são sobrejetivas.
   (b) Dado um operador T qualquer, é possível verificar que existe $n_0\in\mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que $T-\frac{1}{n}I$ é invertível para $n>n_0$. Daí segue a densidade.

2. Prove que:
   (a) Toda transformação linear $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é Lipschitz.
   (b) Toda aplicação bilinear $\phi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ é localmente Lipschitz.

   Solução:
   (a) Note que
   $$|Ax-Ay|=|A(\sum_i(x_i-y_i)e_i)|\le|x-y|\sum_i|Ae_i|,$$
   onde $\{e_i\}$ é uma base do domínio. Basta tomar $C=\sum_i|Ae_i|$ para finalizar.
   (b) Note que
   $$|\phi(x,y)-\phi(a,b)|\le|\phi(x,y)-\phi(x,b)|+|\phi(x,b)-\phi(a,b)|,$$

e logo

$$|\phi(x,y)-\phi(a,b)| \leq \sum_{i,j}|x_i||y_j-b_j||\phi(e_i,\tilde{e}_j)| + \sum_{i,j}|x_i-a_i||b_j||\phi(e_i,\tilde{e}_j)|.$$

Assim, após algumas estimativas temos

$$|\phi(x,y)-\phi(a,b)| \leq \left(\sum_{i,j}|\phi(e_i,\tilde{e}_j)|\right)(|x|+|b|)|(x,y)-(a,b)|,$$

e desta desigualdade o resultado segue.

3. Seja $f:\mathbb{R}^{n^2}\to\mathbb{R}^{n^2}$ definida por $f(A)=A^2$. Responda os seguintes itens:
   (a) Calcule $df_A(V)$ usando a definição e mostre que f é de classe C^1;
   (b) Mostre que existem abertos V e W contendo I tal que para todo $Y\in W$ existe único $X\in V$ tal que $Y=X^2$.

   Solução:

   (a) Verifica-se usando a definição que

   $$\frac{\partial f}{\partial V}(A)=AV+VA;$$

   e daí notamos que

   $$r(V)=f(A+V)-f(A)-\frac{\partial f}{\partial V}(A)=V^2.$$

   Para finalizar, veja que $\lim_{V\to 0}\frac{r(V)}{|V|}=0$. Ainda, note que $|df_A-df_B|\leq 2|A-B|$ e logo a derivada é contínua.

   (b) Use o Teo. da Aplicação Inversa em $A=I$.

4. Seja $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ uma função contínua satisfazendo: $f(tx)=tf(x)$, quando $t\geq 0$ e $x\in\mathbb{R}^n$. Mostre que, se $f(y)<0$, para cada $y\in\mathbb{S}^{n-1}$, então existe $a>0$ tal que $f(x)\leq -a\|x\|$, para cada $x\in\mathbb{R}^n$.

   Solução: Como f é contínua e a esfera é compacta, existe A na esfera tal que $f(y)\leq f(A)<0$, para todo y na esfera. Seja $a=-f(A)>0$ e use a homogeneidade para deduzir que $f(x)=||x||f(\frac{x}{||x||})$, se $x\neq 0$. Daí, $f(x)\leq -a||x||$, para $x\neq 0$. Por fim, note que $f(0)=0$ e logo verifica a mesma desigualdade.

5. Sejam $A\subset\mathbb{R}^n$ um retângulo fechado e $f:A\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $c\in A$ tal que

   $$\frac{1}{\text{vol}\,A}\int_A f(x)dx=f(c).$$

Solução: Como o retângulo é compact e conexo e f é contínua, existem $a, b \in A$ tal que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo x em A. Daí,

$$f(a) \leq \frac{1}{\operatorname{vol} A} \int_A f(x) dx \leq f(b).$$

Aplicando o Teo. do Valor Intermediário, concluí-se o resultado.