Padrão de resposta - Prova de seleção de Doutorado-PPGMAT-UFAL 2021.2

1. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ contínua. As seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = \infty$.

   (b) A imagem inversa $f^{-1}(K)$ de todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacta.

   Solução: a) $\implies$ b). Como f é contínua, a imagem inversa de um compacto é fechado. Suponha, por absurdo, que exista um compacto K tal que $f^{-1}(K)$ não é limitado, então existe uma sequência em $f^{-1}(K)$ tendendo ao infinito, cuja imagem é limitada (contrariando a hipótese em a)).
   b) $\implies$ a). A afirmação no item a) é equivalente a dizer que para todo $M > 0$ existe $R > 0$ tal que se $|x| > R$ então $|f(x)| > M$. Como todo compacto K está contido em $\bar{B}_M(0)$ fechada, para algum $M > 0$. A afirmação em a) segue de b).

2. Estabeleça um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.
   Solução: Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := (\frac{x}{|x|}, \ln |x|).$$

   Basta mostrar que f é um homeomorfismo.

3. Seja A uma matriz $n \times n$, simétrica e de traço nulo. Mostre $det(\exp(tA)) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

   Solução: Podemos tomar $v_1, v_2, ..., v_n$ uma base de autovetores de A e $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ os respectivos autovalores associados, i.e., $Av_j = \lambda_j v_j$. Por definição

$$e^{tA}v_j = \sum_{k\geq 0} \frac{(tA)^k}{k!} v_j.$$

   Daí,

$$e^{tA}v_j = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k v_j.$$

   Mas, $A^k v_j = \lambda_j^k v_j$ e assim

$$e^{tA}v_j = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k v_j = \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda_j \cdot t)^k}{k!} v_j = e^{\lambda_j t} v_j.$$

   isto mostra que $e^{\lambda_j t}, 1 \leq j \leq n$ são os autovalores de e^{tA}. Como o determinante de uma matriz é o produto de seus autovalores temos que

$$det(e^{tA}) = \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j \cdot t} = e^{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot t} = 1, \forall\, t.$$

   pois A tem traço nulo e daí $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$.

4. Suponha que a sequência de caminhos contínuos $\alpha_k : [0,1] \to \mathbb{R}^{2021}$ converge uniformemente para $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^{2021}$. Mostre que α é contínuo e

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \alpha_k(t)dt = \int_0^1 \alpha(t)dt.$$

Solução: Como a integral de um caminho é obtida integrando cada função coordenada, é suficiente fazer o caso unidimensional. Sejam $\{\alpha_k\}_k$ funções contínuas que convergem uniformemente para $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$. Portanto, α é uma função contínua e assim integrável. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k > k_0$

$$\sup_{x\in[0,1]} |\alpha_k(x) - \alpha(x)| < \varepsilon.$$

Logo,

$$\left| \int_0^1 \alpha_k(x)dx - \int_0^1 \alpha(x)dx \right| \leq \int_0^1 |\alpha_k(x) - \alpha(x)|dx < \int_0^1 \varepsilon dx = \varepsilon.$$

Isto prova que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \alpha_k(x)dx = \int \alpha(x)dx.$$

5. Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f : C \to \mathbb{R}$ uma função convexa diferenciável. Seja D o conjunto dos pontos críticos de f. Mostre que D é convexo e que a função f restrita a D é constante.

Solução: Sejam a e b pertencentes a D, isto é, a e b são pontos críticos de f. Por f ser diferenciável e contínua, segue que $f(a)$ e $f(b)$ são pontos de mínimo global, logo $f(a) = f(b)$. Assim dado $t \in [0,1]$, tem-se $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) = f(a)$. Logo, pela minimalidade global de $f(a)$ $f((1-t)a + tb) = f(a)$ e por f ser diferenciável $(1-t)a + tb$ é ponto crítico, logo está em D. Portanto D é convexo.