Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Padrão de Resposta - Prova de Mestrado - 2020.1

1. Prove que existe um número real $b > 0$ tal que $b^2 = 2$.

   Solução: Considere os conjuntos $X = \{x \in ; x \geq 0, x^2 < 2\}$, então este conjunto é não vazio e limitado superiormente. Mostre que X não tem elemento máximo. Agora defina o conjunto $y = \{x \in ; x \geq 0, x^2 > 2\}$. Então este conjunto é não vazio e limitado inferiormente. Mostre que este conjunto não tem elemento mínimo. Além disso, note que se $x \in X$ e $y \in Y$, então $x < y$. Usando esses fatos mostre que o número $b = \sup X$, satisfaz a condição $b^2 = 2$

2. Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a, mostre que $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\sigma_n = \frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}$ também converge para a.

   Solução: Como $\{a_n\}$ converge, segue que a mesma é limitada, digamos, $|a_n| \leq k$, para todo n. Além disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2}$, se $n > n_0$. Seja n_1 tal que $\frac{k}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}$, se $n > n_1$. Seja $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Use esses fatos, junto com a desigualdade triangular para mostrar que dado $n > n_2$, tem-se $|\sigma_n - a| \leq \epsilon$. Isso prova o resultado.

3. Encontre todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfazem $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

   Solução: Como $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, segue que $f(0) = 0$. Dado n um número natural, tem-se que $f(n) = f(1 + \cdots 1) = nf(1)$ e $f(1) = f(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n})$ implica que $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}f(1)$. Usando esses fatos pode-se mostrar que para qualquer número racional q tem-se $f(q) = qf(1)$. Além disso, dado q racional $f(0) = f(q - q) = f(q) + f(-q)$, logo $f(-q) = -f(q) = -qf(1)$. Pela continuidade de f tem-se que para qualquer a real vale $f(a) = af(1)$. Logo todas as funções que satisfazem as propriedades do enunciado, são da forma $f(x) = bx$, onde b é um número real fixado.

4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em um intervalo aberto I tal que sua derivada não é limitada. Mostre que f não é Lipschitz. Dê um exemplo de uma tal função.

   Solução: Com efeito, suponha que f é Lipschitz, isto é, existe um $c > 0$ tal que

   $$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad \forall x, y \in I,$$

   neste caso é fácil mostrar que $|f'(x)| \leq c$ em I. Contrariando a hipótese.

   Exemplo de tal função: $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Verifique que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ é ilimitada.

5. Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, onde I é um intervalo aberto. Prove que vale o Teorema do Valor Intermediário para $f' : I \to \mathbb{R}$ (mesmo que f' não seja contínua).

   Solução: Seja $[a, b] \subset I$, assuma, sem perda de generalidade, que $f'(a) < f'(b)$. Seja λ um número real tal que $f'(a) < \lambda < f'(b)$, Considere a função $g(x) = f'(x) - \lambda x$. Então $g'(a) < 0$ e $g'(b) > 0$. Consequentemente, g atinge seu mínimo global em $[a, b]$ em um ponto x_0 do intervalo (a, b). Portanto, $g'(x_0) = 0$, ou seja, $f'(x_0) = \lambda$.