Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Padrão de Resposta - Prova de Mestrado - 2020.1

1. Sejam $\sum_{n+1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n+1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos positivos, e suponha que

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty.$$

Então, uma das seguintes alternativas ocorre: (i) ambas as séries convergem, (ii) ambas as séries divergem.

Solução: Seja $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ tem-se $\frac{-L}{2} < \frac{a_n}{b_n} - L < \frac{L}{2}$, então para $n > n_0$ tem-se

$$\frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n.$$

Portanto o resultado segue do critério de comparação.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica. Mostre que se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe, então f é uma função constante. Deduza que $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x)$ não existe.

Solução: Assuma que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$. Assuma que há $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \neq L$. Denote por T o período de f e $\epsilon = \frac{|f(a)-L|}{2}$. Pela propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$, dado M real, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a + nT > M$. Pela definição de limite no infinito, para o ϵ dado existe M real tal que se $x > M$ temos $|f(x) - L| < \epsilon$. Usando $x = a + nT$ no termo anterior deduzimos uma contradição e logo f é constante igual a L. Para a segunda parte basta observar que a função seno é periódica.

3. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Mostre que f leva sequência de Cauchy em sequência de Cauchy. Em seguida apresente um exemplo de uma função contínua que não verifica a tese da primeira parte do problema.

Seja $\{x_n\}$ sequência de Cauchy contida em X. Dado ϵ positivo, existe, pela definição de continuidade uniforme, δ positivo tal que

$$x, y \in X,\ |x - y| < \delta \text{ implica } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Escolha n_0 natural tal que $n, m > n_0$ implica $|x_n - x_m| < \delta$. Daí segue que $\{f(x_n)\}$ é Cauchy. Para a segunda parte, considere $X = (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ e $x_n = \frac{1}{n}$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $f(0) = 0$ e, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale $[f(x)]^2 = f'(x)$. Mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Solução: Em primeiro lugar, observe que f é integrável. Se f não fosse identicamente nula, então teríamos:

$$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = 1,$$

integrando ambos os membros da equação acima em relação a x, obtemos

$$f(x) = -\frac{1}{x + c},$$

onde c é uma constante. Observe que qualquer que seja a constante c, a função f admite valores positivos e negativos. Por outro lado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x [f(t)]^2 dt \geq 0,$$

um absurdo. Portanto, a única função satisfazendo as condições requeridas é a função identicamente nula.

5. Sejam $I = [a - \delta, a + \delta]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$, onde $0 \leq k < 1$. Se $|f(a) - a| \leq (1 - k)\delta$, prove que existe um único $x \in I$ com $f(x) = x$.

Solução: Note que, por definição, f é uma contração, como I é um intervalo fechado, então pelo Teorema do Ponto fixo das Contrações, resta provar que $f(I) \subset I$. Com efeito, se $x \in I$ então

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - a| \leq k|x - a| + (1 - k)\delta \leq k\delta + (1 - k)\delta = \delta.$$

Portanto $f(x) \in I$.