Padrão de Resposta - Prova de Mestrado

1. (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}_n = \{X \subset \mathbb{N};\ \text{card}\ X = n\}$. Prove que $\mathcal{P}_n$ é enumerável. Conclua que o conjunto $\mathcal{P}_f$ dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

   Solução: Veja que todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável e que $\mathcal{P}_n$ pode ser visto como subconjunto de $\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ (n cópias de $\mathbb{N}$). Finalmente, veja que $\mathcal{P}_f = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$.

   (b) Prove que o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$ é não enumerável.

   Solução: Veja que há uma correspondência entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e o conjunto das aplicações de $\mathbb{N}$ no conjunto $\{0,1\}$. Proceda por contradição, ou seja, suponha que seja possível enumerar e construa uma função diferente de todas as anteriores.

2. Prove que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

   Solução: Prove inicialmente que toda sequência monótona limitada é convergente e depois mostre que em uma sequência limitada podemos extrair subsequência monótona.

3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) = f(1)$ e seja $n$ um número natural. Prove que existe $x \in [0, \frac{1}{n}]$ tal que $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$.

   Solução: Suponha o contrário, isto para todo $x$ tem-se $f(x+\frac{1}{n}) \neq f(x)$. Afirmamos que ou $f(x+\frac{1}{n}) > f(x)$ para todo $x \in [0,1]$ ou $f(x+\frac{1}{n}) < f(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Com efeito, caso exita $a$ e $b$ em $[0,1)$ tal que $f(a+\frac{1}{n}) > f(a)$ e $f(b+\frac{1}{n}) < f(b)$ o Teorema do valor intermediário aplicado na função $h(x) = f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$ no intervalo $[a,b]$ garante a existência de um $c \in (a,b)$ tal que $h(c) = f(c+\frac{1}{n}) - f(c) = 0$, uma contradição. Agora, assuma sem perda de generalidade que $f(x+\frac{1}{n}) > f(x)$. Então

   $$f(0) < f(1+\frac{1}{n}) < f(1+\frac{2}{n}) < \cdots < f(1),$$

   gerando uma contradição, pois por hipótese $f(0) = f(1)$.

4. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $a < b$. Mostre que existe $c \in (a,b)$ tal que

   $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c).$$

   A conclusão ainda é verdadeira se $f$ for apenas uma função integrável?

   Solução: Como $f$ é continua em um compacto, existem

   $$m = \inf\{f(x);\ x \in [a,b]\} \quad \text{e} \quad M = \sup\{f(x);\ x \in [a,b]\}.$$

   Com isso é fácil obter $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, o que implica em

   $$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

   O teorema do valor intermediário garante a existência de $c \in [a,b]$ tal que

   $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c).$$

Se retirarmos a hipótese de continuidade a conclusão não vale. Para isso, considere

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Note que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Porém $f(x) \neq \frac{1}{2}$ qualquer que seja $x \in [0,2]$.

5. Defina conjunto de medida nula. Sejam $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função positiva, isto é, $f(x) > 0$, para todo $x \in [a,b]$. Mostre que existe $\alpha > 0$ tal que o conjunto $X = \{x \in [a,b];\ f(x) \geq \alpha\}$ não tem medida nula.

   Solução: **Definição:** *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe uma cobertura enumerável $X \subset \bigcup I_k$ de $X$ por intervalos abertos $I_k$ cuja soma dos comprimentos é $\sum |I_k| < \epsilon$.*

   Suponha que $X = \{x \in [a,b];\ f(x) \geq \alpha\}$ tem medida nula qualquer que seja $\alpha > 0$. Seja,

$$X_n = \{x \in [a,b];\ f(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

   Por hipótese, $X_n$ tem medida nula, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ tem medida nula. Mas isso é absurdo, pois

$$[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

   e $[a,b]$ não tem medida nula.