Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Padrão de Resposta - Prova de Doutorado

1. Estabeleça um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e o produto cartesiano $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. (obs: $\mathbb{S}^{n-1}$ denota o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\}$.)

   Solução: Defina $f : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ por $f(t, x) = e^t x$, mostre que f é contínua. Em seguida mostre que $g(y) = (\frac{y}{|y|},\ \ln|y|)$ é a inversa de f e mostre que g é contínua.

2. Prove que o complementar de um conjunto enumerável Z em $\mathbb{R}^n$ é conexo.

   Mostre que o conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}$ é conexo por caminhos. Para isso tome a e b em $\mathbb{R}^n \setminus Z$ e mostre que existe um $c \in R^n$ tal que os segmentos de reta $[a, c]$ e $[c, b]$ estão ambos contidos em $\mathbb{R}^n \setminus Z$.

3. Mostre que o conjunto das matrizes quadradas de ordem n, onde $n > 1$, e posto $n-1$ é uma hiperfície de classe C^∞.

   Solução: Usando a regra de Cramer deduz-se que
   $$\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}(A) = (-1)^{i+j} A_{[ij]},$$
   onde $A_{[ij]}$ é o determinante da matriz quadrada de ordem $n-1$ obtida de A pela omissão da linha i e coluna j. Visto que o posto da matriz A é $n-1$, para algum par (i, j) teremos $\frac{\partial \det}{\partial x_{ij}}(A) \neq 0$ e pelo Teorema da Função Implícita deduz-se o desejado.

4. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função
   $$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$
   no ponto $(1, 2)$.

   Solução: Após um cálculo obtemos que $f(1, 2) = e^{-5}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -2e^{-5}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -4e^{-5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 2) = 2e^{-5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 2) = 14e^{-5}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 2) = 8e^{-5}$. O polinômio procurado é
   $$p(x, y) = e^{-5}(1 - 2(x-1) - 4(y-2) + (x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) + 7(y-2)^2).$$

5. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde $n > 1$, uma função contínua, possuindo todas as derivadas direcionais em qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$. Mostre que se $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u) > 0$ para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ então existe um ponto $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$, para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$.

   Solução: Note que a condição $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u) > 0$, se $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, implica que existe um $\delta > 0$ tal que se $1 - \delta < t < 1$ então $f(tu) < f(u)$. Daí o mínimo global de $f(x)$ em $\mathbb{B}^n$ é atingido em um ponto a no interior da bola fechada. Então para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, a função $\phi(t) = f(a + tv)$ tem um mínimo local em $t = 0$. Portanto
   $$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \phi'(0) = 0.$$