UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Padrão de Resposta - Prova de Doutorado

1. Dados $K, L \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos do $\mathbb{R}^n$ defina $K * L$ como sendo a união de todos os segmentos de reta $[x, y]$ com $x \in K$ and $y \in L$.

   (a) Prove que se K e L são compactos então $K * L$ também é compacto.

   Solução: Verifique que o conjunto resultante é fechado e limitado.

   (b) Mostre que se $F \subset \mathbb{R}^n$ é apenas fechado e $a \in \mathbb{R}^n$ então $a * F$ pode não ser fechado.

   Solução: Construa um exemplo no $\mathbb{R}^2$ com F não limitado.

2. Prove que toda matriz real $n \times n$ é limite de uma sequência de matrizes invertíveis $n \times n$.

   Solução: Mostre, por exemplo, que o determinante é uma função contínua.

3. Seja $\wedge$ o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$. Para todo $v \in \mathbb{R}^3$ e todo caminho $f : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, prove que

$$\int_a^b [v \wedge f(t)]dt = v \wedge \int_a^b f(t)dt.$$

   Solução: Seja $P = \{t_0 = a, t_1, t_2, ..., t_k = b\}$ uma partição de $[a, b]$. Usando propriedade do produto vetorial, a soma superior do caminho $v \wedge f(t)$ é dada por

$$\sum_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1})(v \wedge M_i) = \sum_{i=1}^{k}(v \wedge (t_i - t_{i-1})M_i)$$

   Fazendo a norma da partição P tender a zero, obtemos que $\int_a^b [v \wedge f(t)]dt = v \wedge \int_a^b f(t)dt$.

4. Sejam $f_1, f_2, \cdots, f_k : I \to \mathbb{R}^m$ caminhos diferenciáveis e $\gamma : \overbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}^{\text{k vezes}} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação k-linear. Prove que o caminho $g : I \to \mathbb{R}^n$ dado por $g(t) = \gamma(f_1(t), f_2(t), \cdots, f_k(t))$ é um caminho diferenciável para todo $t \in I$.

   Solução: Por definição de derivada de uma caminho, usando a k-linearidade de γ e a deferencialidade de f_j, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\gamma(f_1(t), f_2(t), ..., f_k(t)) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\gamma(f_1(t+h), f_2(t+h), ..., f_k(t+h)) - \gamma(f_1(t), f_2(t), ..., f_k(t))] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\gamma(f_1(t+h) - f_1(t), f_2(t+h), ..., f_k(t+h))] \\
&\quad + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\gamma(f_1(t), f_2(t+h) - f_2(t), ..., f_k(t+h))] \\
&\quad + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\gamma(f_1(t), f_2(t), f_3(t+h) - f_3(t), \cdots, f_k(t+h))] \\
&\quad + \cdots + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\gamma(f_1(t), f_2(t), \cdots, f_{k-1}(t), f_k(h+t) - f_k(t))] \\
&= \gamma(f_1'(t), f_2(t), ..., f_k(t)) + \gamma(f_1(t), f_2'(t), ..., f_k(t)) + \cdots + \gamma(f_1(t), f_2(t), ..., f_k'(t)).
\end{aligned}$$

   Portanto $\gamma(f_1(t), f_2(t), ..., f_k(t))$ é diferenciável.

5. Sejam $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear auto-adjunto e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \langle A(x), x\rangle$. Mostre que os pontos críticos da restrição $f|_{\mathbb{S}^2}$, são os auto-valores de A, onde $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitária do $\mathbb{R}^3$ centrada na origem.

   Solução: É claro que $\mathbb{S}^2 = \varphi^{-1}(1)$, onde $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é definida por $\varphi(x) = \langle x, x\rangle$ e, como $\text{grad}\varphi(x) = 2x$, 1 é valor regular de φ. Por sua vez, $\text{grad} f(x) = 2Ax$. Portanto, os pontos críticos da restrição $f|_{\mathbb{S}^2}$ são as soluções x do sistema

$$\begin{cases} Ax = \lambda x, \\ \langle x, x\rangle = 1, \end{cases}$$

   isto é, são os autovetores do operador A que tem comprimento 1.