Universidade Federal de Alagoas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Padrão de Resposta - Mestrado

Q1- Considere uma sequência real $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $0 < x_n < 1$ e $4(x_{n+1} - x_{n+1}x_n) \geq 1$, para todo n. Mostre que:

(a) Para todo n vale $x_n \leq \dfrac{1}{4(1-x_n)}$;
(b) (x_n) é monótona;
(c) (x_n) é convergente. Determine seu limite.

Solução: (Assunto: Sequências)
(a) Observe que $4x_n^2 - 4x_n + 1 = (2x_n - 1)^2$ e o item segue;
(b) Observe que $x_n \leq \frac{1}{4(1-x_n)} \leq x_{n+1}$ e assim é monótona;
(c) Toda sequência limitada e monónota é convergente. Seu limite l satisfaz $4l(1-l) = 1$ e logo $l = 1/2$.

Q2- Apresente um exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não é contínua em ponto nenhum, porém $|f|$ é contínua em todo ponto. Justifique cuidadosamente.

Solução: (Assunto: Continuidade)
Considere $f(x) = -1$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Q3- Sejam $f, g : [0,1] \to [0,\infty)$ funções contínuas tais que $\sup f = \sup g$. Mostre que existe x_0 tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

Solução: (Assunto: Propriedades de funções contínuas)
Como $[0,1]$ é compacto e f e g são compactos, existem c e d em $[0,1]$ tais que $f(c) = \sup f$ e $g(d) = \sup g$. Se $c = d$, acabou. Assuma que $c < d$. Defina $h(x) = f(x) - g(x)$. Daí, $h(c) = \sup f - g(c) \geq 0$ e $h(d) = f(d) - \sup g \leq 0$. Como $[c,d]$ é conexo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in [c,d]$ tal que $h(x_0) = 0$.

Q4- Sejam f e g polinômios reais de grau k. Assuma que existem $a > 0$ e $C > 0$ tais que

$$|f(x) - g(x)| \leq C|x|^{k+1},$$

para todo x com $|x| \leq a$. Mostre que $f = g$.

Solução: (Assunto: Fórmula de Taylor)
Segue da desigualdade que as derivadas de f e g na origem são iguais para $j = 0, \ldots, k$ e daí concluí-se a igualdade.

Q5- Mostre que a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\sqrt{\text{sen}(x) + 3x}$ é integrável. Em seguida verifique que $0 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq 4/5$.

Solução: (Assunto: Propriedades da Integral)
Seja $f(x) = x\sqrt{\text{sen}(x) + 3x}$. Observe que f é integrável pois é contínua. Além disso, $f \geq 0$ em $[0,1]$ e portanto $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 0$. Note também, $\text{sen}(x) \leq x$ para todo $x \geq 0$ (basta analisar as derivadas). Então $f(x) \leq x\sqrt{x + 3x} = 2x^{3/2}$. Daí $\int_0^1 f(x)\,dx \leq 2\int_0^1 x^{3/2}\,dx = 4/5$.