Universidade Federal de Alagoas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Padrão de Resposta da Prova de Seleção de Mestrado

Q1- Responda os itens:

(a) Defina o que é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ser periódica. Em seguida, assumindo que f é contínua prove que f é limitada e assume seu máximo e seu mínimo;

(b) Considere a função maior inteiro $\lfloor x \rfloor = \max\{m : m \le x\}$. Considere a função

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + k/n \rfloor \right) - \lfloor nx \rfloor.$$

Mostre que f é identicamente nula.

Solução:

(a) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica se existe $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo x real. Se f é períodica e contínua, podemos restringir a mesma a $[0, T]$ e pelo Teorema do Valor extremo de Weierstrass f assume seu máximo e mínimo.

(b) f é periódica de período $T = 1/n$. Além disso, $f = 0$ em $[0, 1/n]$. Logo nula em toda reta.

Q2- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que f é uniformemente contínua.

Solução: Dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in [a, b]$ existe $\delta_x > 0$ tal que $x \in [a, b]$ e $|y - x| < 2\delta_x$ implica $|f(y) - f(x)| < \epsilon/2$, pois f é contínua. Defina $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ e observe que estes formam uma cobertura de $[a, b]$. Daí, pela compacidade de $[a, b]$, subtrai-se uma sub-cobertura finita $I_{x_1}, \dots, I_{x_k}$. Seja $\delta = \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_k}\}$. Se x, y pertencem a $[a, b]$ e $|x - y| < \delta$, observe que $x \in I_{x_j}$ para algum j e logo $|x - x_j| < \delta_{x_j}$ e assim $|y - x_j| < |y - x| + |x - x_j| < 2\delta_{x_j}$ o que implica que $|f(y) - f(x_j)| < \epsilon/2$ e $|f(x) - f(x_j)| < \epsilon/2$. Portanto, se $x, y \in [a, b]$ e $|x - y| < \delta$ então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, o que conclui o argumento.

Q3- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função crescente com $a < b$ números reais. Mostre que f é integrável.

Solução: Seja $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição arbitrária de $[a, b]$. Observe que $f(x_{j-1}) = m_j = \inf_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)$ e $f(x_j) = M_j = \sup_{x_{j-1} \le x \le x_j} f(x)$, $1 \le j \le n$, onde usamos que f é crescente. Daí,

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1}))(x_j - x_{j-1}) \le \max_{1 \le j \le n} (x_j - x_{j-1})(f(b) - f(a)),$$

e daí segue a integrabilidade.

Q4- Determine a expansão de Taylor de ordem n para a função $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ em torno da origem. Em seguida calcule a derivada de ordem 2019 de f na origem.

Solução: A derivada de f é $\frac{1}{1+x^2}$ cuja expansão em séries de potência é $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, para $|x| < 1$ (série do tipo geométrica). Logo $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, onde usamos que $f(0) = 0$. A expansão solicitada é a série truncada na ordem solicitada e $f^{(2019)}(0) = -(2018)!$.

Q5- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função positiva, isto é, $f(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$, $a < b$. Prove que existe $\alpha > 0$ tal que o conjunto $\mathcal{X} = \{x \in [a, b]\, f(x) \geq \alpha\}$ não tem medida nula.

Solução: Suponha por absurdo que não existe um tal α. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathcal{X}_n = \{x \in [a, b]\, f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ tem medida nula. Como a união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula, obtemos um absurdo, pois $[a, b]$ não tem medida nula e

$$[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n.$$