Universidade Federal de Alagoas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Gabarito/Padrão de Resposta da Prova de Seleção de Mestrado
09 de Julho de 2018

Parte 1 - Objetivas.

Q1- Considere a sequência dos números de Fibonacci $\{F_n\}$ definida por

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ e } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Marque a alternativa **verdadeira**.

(a) [ ] Não existe $\limsup_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$;

(b) [ ] As sequências $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ e $s_n = \sum_{k=1}^{n} F_k$ convergem;

(c) [ ] As sequências $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ e $s_n = \sum_{k=1}^{n} F_k$ divergem;

(d) [X] A sequência $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ converge e a sequência $s_n = \sum_{k=1}^{n} F_k$ diverge;

(e) [ ] A sequência $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ diverge e a sequência $s_n = \sum_{k=1}^{n} F_k$ converge;

Solução Q1-: A alternativa correta é (d). De fato, como F_n é uma sequência linear de segunda ordem, podemos deduzir que

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}, \ \forall\, n \geq 1.$$

Daí,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Usando o teste da razão concluí-se que a série diverge.

Q2- Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, e $|f''(x)| \leq M \ \forall x$. Qual das seguintes alternativas **não é necessariamente verdadeira**?

(a) [ ] $f(1) \leq \frac{M}{2}$;

(b) [X] 0 não é valor máximo nem mínimo;

(c) [ ] $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $x \in (-\delta, \delta), |f(x)| < \epsilon$;

(d) [ ] Se $\lim s_n = 0$, então $\lim f(s_n) = 0$;

(e) [ ] Nenhuma das anteriores (todas são verdadeiras).

Solução Q2-: Alternativa correta: (b).

A alternativa a) é verdadeira. De acordo com a Fórmula de Taylor, temos que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)x^2}{2!}, \quad \text{onde } c \in [0, x].$$

Logo, $f(1) = \dfrac{f''(c)}{2} \leq \dfrac{M}{2}$.

A alternativa (b) não é necessáriamente verdadeira. Contra-exemplo: $f(x) = x^2$ (mínimo) ou $f(x) = -x^2$ (máximo), $f(x) = \text{sen}(x) - x$ (sela).

A alternativa (c) é verdadeira, pois é consequência da continuidade de f, decorrente de sua diferenciabilidade.

A alternativa (d) é verdadeira, pois sendo f contínua, $\lim f(s_n) = f(\lim s_n) = f(0) = 0$.

A alternativa (e) é falsa, pois o item (b) é falso.

Q3- Seja s_n uma sequência de números reais em um conjunto limitado S, onde $\liminf s_n \neq \limsup s_n$. Marque a alternativa **falsa**.

(a) [ ] $\lim s_n$ não existe;

(b) [ ] s_n não é uma sequência de Cauchy;

(c) [ ] $\liminf s_n < \limsup s_n$;

(d) [ ] Existe uma subsequência convergente de s_n;

(e) [X] s_n tem uma quantidade infinita de termos dominantes (Obs.: dizemos que s_n é um termo dominante se $s_n > s_m, \forall\, m > n$).

Solução Q3-: Alternativa correta: (e)

A alternativa (a) é verdadeira, pois o limite só pode existir se $\liminf s_n = \limsup s_n$.

A alternativa (b) é verdadeira, pois como o limite não existe, a sequência não pode ser de Cauchy.

A alternativa (c) é verdadeira, pois de modo geral $\liminf s_n \leq \limsup s_n$, e além disso o enunciado descarta a possibilidade da igualdade.

A alternativa (d) é verdadeira, de acordo com o Teorema de Bolzano-Weierstrass, observando-se que a sequência está contida em um conjunto limitado.

A alternativa (e) é falsa. Um contra-exemplo é a sequência $s_n = 1 - \frac{1}{n}$ para n par e $s_n = 0$ para n ímpar.

Q4- Considere as seguintes afirmações:

I) Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável, mas nem toda função integrável é contínua.

II) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $\displaystyle\int_a^b |f(x)| dx = 0$ se, e somente se, o conjunto $\{x \in [a, b];\ f(x) \neq 0\}$ tem interior vazio.

III) Se $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ é integrável, então $\displaystyle\int_{-1}^{1} x f(x^2)\, dx = 0 = \int_{-1}^{1} f(\text{sen}x) \cos x\, dx$.

É correto afirmar que:

(a) [ ] Todas as afirmações são verdadeiras.

(b) [ ] Todas as afirmações são falsas.

(c) [ ] Apenas a afirmação I) é verdadeira.

(d) [ ] Apenas a afirmação II) é verdadeira.

(e) [ ] Apenas a afirmação III) é verdadeira.

Solução Q4-: QUESTÃO ANULADA, POIS NÃO CONSTA A ALTERNATIVA CORRETA ENTRE AS OPÇÕES. PONTUAÇÃO CONCEDIDA A TODOS APLICANTES.

I) Verdadeira. Use: "Para que uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja integrável, é necessário e suficiente que o conjunto dos seus pontos de descontinuidades tenha medida nula."

II) Verdadeira. Seja $A = \{x \in [a, b];\ f(x) \neq 0\}$. Suponhamos que $\int_a^b |f(x)|dx = 0$. Se $int(A) \neq \emptyset$, então existe um intervalo fechado $[a_1, b_1] \subset A \subset [a, b]$ tal que $|f(x)| \neq 0$, para todo $x \in [a_1, b_1]$. Pelas propriedades de integrais,

$$0 = \int_a^b |f(x)|dx \geq \int_{a_1}^{b_1} |f(x)|dx > 0,$$

o que é um absurdo.

III) Falsa. A função $f(x) = x^2$ é integrável e $\int_{-1}^{1} f(\operatorname{sen} x) \cos x \, dx \neq 0$.

Parte 2 - Dissertativa.

Q5- Prove que o conjunto $X = \mathbb{Q} \cap [a, b]$, com $a < b$ é um conjunto enumerável que não tem conteúdo nulo. Conclua que um intervalo não-degenerado $[a, b]$ não tem conteúdo nulo.

Solução Q5-: A enumerabilidade é imediata. O ponto principal é não ter conteúdo nulo. De fato, se $c(X) = 0$, então dado $\epsilon < b - a$ existiria uma partição Q de $[a, b]$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P contendo pontos de X seria $< \epsilon$. Contudo, tal soma é igual a $b - a$. Logo alguns intervalos de P não conteriam pontos de X, o que é um absurdo. Como X está contido em $[a, b]$, então $[a, b]$ não tem conteúdo nulo.