Universidad Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduación en Matemática

Prova de Seleção de Mestrado
Com Soluções

Data: 08 de Fevereiro de 2018
Inicio: 09:00hs
Término: 12:00hs

---

1. (a) Para todo $X \subset \mathbf{R}$, prove que vale a união disjunta

$$\mathbf{R} = \mathrm{int}(X) \cup \mathrm{int}(\mathbf{R} - X) \cup F,$$

onde F é formado pelos pontos $x \in \mathbf{R}$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de X e pontos de $\mathbf{R} - X$. O conjunto $F = \mathrm{fr}(X)$ chama-se a *fronteira* de X. Obs.: $\mathrm{int}(X)$ denota o interior do conjunto X.

(b) Prove que $A \subset \mathbf{R}$ é aberto se, e somente se, $A \cap \mathrm{fr}(A) = \emptyset$.

Solução:

(a) Dado $x \in \mathbf{R}$, temos três opções:

- **existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$, neste caso $x \in \mathbf{int}(X)$,**
- **existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathbf{R} - X$, neste caso $x \in \mathbf{int}(\mathbf{R} - X)$, ou**
- **todo intervalo aberto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contém pontos de X e pontos de $\mathbf{R} - X$, o que significa que $x \in \mathbf{fr}(X)$.**

Além disso, é claro que apenas uma das opções acima acontece para cada $x \in \mathbf{R}$, ou seja, temos a união disjunta

$$\mathbf{R} = \mathbf{int}(X) \cup \mathbf{int}(\mathbf{R} - X) \cup \mathbf{fr}(X),$$

como desejado.

(b) Suponha que A é aberto. Se $A = \emptyset$, é claro que $A \cap \mathbf{fr}(A) = \emptyset$. Suponha então que $A \neq \emptyset$. Neste caso, dado $x \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A$. Portanto, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ é uma vizinhança de x que não contém pontos de $\mathbf{R} - A$. Portanto, $x \notin \mathbf{fr}(A)$. Isto mostra que $A \cap \mathbf{fr}(A) = \emptyset$.

Reciprocamente, suponha que $A \cap \mathbf{fr}(A) = \emptyset$. Se $A = \emptyset$ é claro que A é aberto. Se $A \neq \emptyset$, seja $x \in A$. Como $x \in A \subset \mathbf{fr}(A)^c$, segue da definição de fronteira que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$ ou $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathbf{R} - A$. Como a última alternativa não pode ocorrer pois $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A$, temos que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$. Isto prova que A é aberto.

Outra maneira de demonstrar este fato é a seguinte. Usando o item (a) temos que

$$A = A \cap \mathbf{R} = A \cap \mathbf{int}(A) \cup A \cap \mathbf{int}(\mathbf{R} - A) \cup A \cap \mathbf{fr}(A).$$

Como $A \cap \mathbf{int}(\mathbf{R} - A) = \emptyset$ e, por hipótese, $A \cap \mathbf{fr}(A) = \emptyset$, temos que $A = A \cap \mathbf{int}(A) \subset \mathbf{int}(A) \subset A$, ou seja, $A = \mathbf{int}(A)$. Logo, A é aberto.

2. Seja $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ uma função limitada e derivável tal que $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim_{x \to b^-} f(x)$ não existe.

(a) Prove que f' não é limitada.

(b) Use o item (a) para provar que dado $c \in \mathbf{R}$ existe $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) = c$.
Dica: Use o Teorema de Darboux.

Solução:

(a) Afirmamos que f' não é limitada inferiormente. Caso contrário, se $f' \geq M$ para algum $M \in \mathbf{R}$, temos que a função $g : (a,b) \to \mathbf{R}$ definida por $g(x) = f(x) - Mx$ satisfaz $g' \geq 0$. Logo, g é uma função monótona não-decrescente. Neste caso, existem os limites laterais $\lim_{x\to a^+} g(x)$ e $\lim_{x\to b^-} g(x)$, o que por sua vez implica que existem os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$, contradizendo a hipótese do problema.
Analogamente se demonstra que f' não é limitada superiormente.

(b) Dado $c \in \mathbf{R}$, segue do item (a) que existem $c_1, c_2 \in (a,b)$ tais que $f'(c_1) < c < f'(c_2)$. Se $c_1 < c_2$, segue do Teorema de Darboux que existe $x \in (c_1, c_2) \subset (a,b)$ tal que $f'(x) = c$. Se $c_2 < c_1$, tomando $h = -f$, temos que $h'(c_2) < -c < h'(c_1)$. Mais uma vez pelo Teorema de Darboux segue que existe $x \in (c_2, c_1) \subset (a,b)$ tal que $h'(x) = -c$, ou seja, $f'(x) = c$.

3. Para cada $n \in \mathbf{N}$, seja $\wp_n = \{X \subseteq \mathbf{N} | \mathcal{C}ard(X) = n\}$.

(a) Prove que $\wp_n$ é enumerável.

(b) Prove que o conjunto de todos os subcojuntos finitos de $\mathbf{N}$ é enumerável.

Solução:

(a) Se $X \in \wp_n$, então $\mathcal{C}ard(X) = n$. Logo, considerando $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de modo que $x_i < x_{i+1}$, podemos definir a aplicação

$$\Psi : \wp_n \to \mathbf{N}^n$$

por $\Psi(X) = (x_1, \ldots, x_n)$. Agora note que Ψ é injetiva, e sendo $\mathbf{N}^n$ enumerável, segue que $\wp_n$ é também enumerável.

(b) Seja $\Im$ a coleção de todos os subconjuntos finítos de $\mathbf{N}$. Então $\Im \subseteq \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \wp_n$. Agora, como a união de conjuntos enumeráveis é também enumerável, segue do item (a) que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} \wp_n$ é enumerável. Por conseguinte, $\Im$ é também enumerável.

4. Para cada $n \in \mathbf{N}$, seja $b_n = log(1+\frac{1}{n})$. Prove que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

Solução:
Sendo o logaritmo uma função crescente, segue que $b_n = log(1 + \frac{1}{n})$ define uma sequência monôtona decrescente. Alem disso, para todo $n \in \mathbf{N}$, temos que $b_n = log(1 + n) - log(n) \geq 0$. Portanto, a sequência $\{b_n\}$ converge. Agora, dado $\varepsilon > 0$, temos que $e^{\varepsilon} - 1 > 0$ e, pela propriedade arquimediana de $\mathbf{R}$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $1 < N(e^{\varepsilon} - 1)$. Donde $b_N = log(1 + \frac{1}{N}) < \varepsilon$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Por último, temos que $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} log(\frac{k+1}{k}) = log(\frac{(n+1)!}{n!}) = log(n+1)$. Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

5. Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ uma função integrável. Mostre que $|f|$ é integrável e que vale $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$.

Solução:
Escrevemos $f = f_+ - f_-$, onde $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$ e $f_-(x) = \min\{0, f(x)\}$.

Então precisamos mostrar que f_+ e f_- são integráveis.

Como f é integrável dado $\epsilon > 0$ existe uma partição $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) < \epsilon$, onde $S(f;P)$ e $s(f;P)$ denotam as somas superior e inferior de

f, respectivamente, com respeito a partição P. Sejam M_i e m_i, respectivamente, o supremo e o ínfimo de f em $[t_i, t_{i+1}]$ e sejam M_i^+ e m_i^+, respectivamente, o supremo e o ínfimo de f_+ em $[t_i, t_{i+1}]$, para $i \in \{1, 2, \cdots n-1\}$.

Se existe $x \in [t_i, t_{i+1}]$ tal que $f(x) > 0$, então $M_i = M_i^+$ e $m_j^+ \geq m_j$, logo $M_j^+ - m_j^+ \leq M_j - m_j$. No outro caso, se para todo $x \in [t_i, t_{i+1}]$ vale $f(x) \leq 0$, então $f_+ = 0$ em $[t_i, t_{i+1}]$, o que implica em $M_j^+ = m_j^+ = 0$. Daí também temos $M_j^+ - m_j^+ \leq M_j - m_j$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
S(f_+; P) - s(f_+, P) &= \sum_{i=1}^{n-1} (M_i^+ - m_i^+)(t_{i+1} - t_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} (M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) = S(f; P) - s(f, P) < \epsilon.
\end{aligned}
$$

Logo f_+ é integrável. A prova do fato f_- ser integrável é similar.

A segunda parte segue da desigualdade $-|f| \leq f \leq |f|$ combinado com a integrabilidade de $|f|$.

6. Dada uma sequência de funções $f : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, suponha que exista $c \in \mathbf{R}$ tal que $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c < 1$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbf{N}$. Prove que a série $\sum_{n \in \mathbf{N}} |f_n(x)| \leq c < 1$ converge uniformemente em X.

Solução:
De $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c$, segue que $|f_n(x)| \leq c^n$ para todo $n \in \mathbf{N}$ e $x \in X$. Como $0 \leq c < 1$ a série $\sum_{i=1}^{n} c^i$ converge. Portanto pelo teste M de Weirstress a série $\sum_{n \in \mathbf{N}} |f_n(x)|$ converge uniformemente.