Universidad Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduación en Matemática

Prova de Seleção de Doutorado
Com Soluções

Data: 08 de Fevereiro de 2018
Inicio: 09:00hs
Término: 12:00hs

1. Seja $A_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de subconjuntos de $\mathbf{R}^n$ abertos e conexos tais que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$. Prove que $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ é conexo por caminhos.

   Solução:
   Fixemos um ponto $x_0 \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$. Agora, dados $x, y \in A$, existem $\lambda, \delta \in \Lambda$ tais que $x \in A_\lambda$ e $y \in A_\delta$. Então $x, x_0 \in A_\lambda$ e $y, x_0 \in A_\delta$. Como A_λ e A_δ são abertos e conexos em $\mathbf{R}^n$, segue que eles são conexos por caminhos. Logo existem caminhos $f : [0,1] \to A_\lambda$ e $g : [0,1] \to A_\delta$ tais que $f(0) = x$, $f(1) = x_0$, $g(0) = x_0$ e $g(1) = y$, então considerando a justaposição dos caminhos f e g obtemos um caminho em A que nos leva de x até y. Consequentemente, A é conexo por caminhos.

2. **Seja $X \subseteq \mathbf{R}^m$. Uma aplicação $f : X \to \mathbf{R}^n$ chama-se localmente injetiva se, para cada $x \in X$, existe uma bola B com centro em x tal que $f|_{B\cap X}$ é injetiva. Prove que se f é contínua, localmente injetiva e X é compacto, então, para todo $y \in \mathbf{R}^n$, a imagem inversa $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.**

   Solução:
   Como f é contínua e $\{y\}$ é um conjunto fechado em $\mathbf{R}^n$, então $f^{-1}(\{y\})$ também é fechado em X e, sendo X compacto, segue que $f^{-1}(\{y\})$ também é compacto. Agora, como f é localmente injetiva, para cada $x \in f^{-1}(\{y\})$, existe uma bola B_x com centro em x tal que $f|_{B_x\cap X}$ é injetiva. Assim $\{B_x \cap X\}_{x\in f^{-1}(\{y\})}$ forma uma cobertura aberta do compacto $f^{-1}(\{y\})$ e, portanto admite uma subcobertura finita, digamos $\{B_{x_i} \cap X | i = 1, \dots, k\}$. Consequentemente $f^{-1}(\{y\})$ possui no máximo k elementos.

3. **Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ um caminho contínuo, fechado e diferenciável em (a,b). Prove que existe $t \in (a,b)$ tal que $\langle \alpha(t), \alpha'(t)\rangle = 0$.**
   Solução:
   Defina $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ por $f(t) = \langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle$. Como α é fechado, temos que $f(a) = f(b)$. Portanto, segue do Teorema do Valor Médio que existe $t_0 \in (a,b)$ tal que $f'(t_0)(b-a) = f(b) - f(a) = 0$. Portanto, $\langle \alpha(t_0), \alpha'(t_0)\rangle = f'(t_0)/2 = 0$, como queríamos demonstrar.

4. **Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ uma função contínua que possui todas as derivadas direcionais em qualquer ponto de $\mathbf{R}^n$. Prove que se $\frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0$ para todo $u \in \mathbf{S}^{n-1}$, então existe $a \in \mathbf{R}^n$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ qualquer que seja $v \in \mathbf{R}^n$.**

   Solução:
   Seja $a \in \bar{B}(0;1) = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ tal que $f(a) = \min_{x\in\bar{B}(0;1)} f(x)$. Afirmamos que $a \notin \mathbf{S}^{n-1}$. De fato, se $a \in \mathbf{S}^{n-1}$, defina $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ por $g(t) = f(a + ta)$. Observe que g é derivável e $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial a}(a) > 0$. Portanto, $f(a + ta) = g(t) < g(0) = f(a)$ para $t < 0$

com $|t| \ll 1$, o que contradiz a definição de a. Portanto, $a \in B(0;1)$. Assim, para cada $v \in \mathbf{R}^n$, a função $h_v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $h_v(t) = f(a+tv)$ possui um mínimo local em $t = 0$. Portanto, $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = h_v'(0) = 0$ para cada $v \in \mathbf{R}^n$, o que conclui a demonstração.

5. **Seja $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^4 + 2x\ \cos y + \sin\ z$. Analise se em um vizinhança de 0, a equação $f(x,y,z) = 0$ define z como função diferenciável das variáveis x e y. Em caso afirmativo calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial x}$.**

   Solução:
   Como $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2\ \cos\ y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2x\text{sen}\ y$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = \cos\ z$ então f é uma função de classe C^1. Além disso, temos $\frac{\partial f}{\partial z} = \cos\ z \neq 0$ em uma vizinhança de $(0,0,0)$. Logo, pelo teorema da função implícita, em uma vizinhança próxima de $(0,0,0)$ a equação $f(x,y,z) = 0$ define z implicitamente como funções de x e y, além disso vale $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} = \frac{-(4x^3+2\cos\ y)}{\cos\ z}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z} = \frac{2x\ \text{sen}\ \ y}{\cos\ z}$.

6. **Considere a função $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ dada por $f(x,y,z) = xyz$. Encontre o valor máximo de f na hiper superfície $M = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x+y+z = c,\ y > 0,\ z > 0\}$, onde c denota uma constante não negativa.**

   Solução:
   Inicialmente, como $\overline{M}$ é compacto segue que o máximo de f existe em $\overline{M}$. Como $f(x) > 0$ se $x \in M$ e $f(x) = 0$ se $x \in \overline{M} \setminus M$ segue que o máximo está em M. Temos que $\nabla f = (yz, xz, xy)$ e $M = \varphi^{-1}(c)$, onde $\varphi = x+y+z$ e $\nabla\varphi = (1,1,1)$. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, num ponto onde $f|M$ é máxima devemos ter $xy = xz = xy = \lambda$, para algum número real λ, e $x+y+z = c$. Como em M temos $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$, segue que num ponto onde $f|M$ é máximo devemos ter $x = y = z = \frac{c}{3}$ e portanto $f(x,y,z) = \frac{c^3}{27}$.