Universidade Federal de Alagoas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Padrão de Resposta - Doutorado

Q1- Mostre que o conjunto das matrizes invertíveis de ordem $n \times n$ é aberto e denso no conjunto das matrizes de ordem $n \times n$.

solução (Assunto: Topologia dos espaços euclidianos):
É conhecido que o determinante é uma função contínua e o conjunto G das matrizes invertíveis é igual a $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e logo é aberto. Dada uma matriz A qualquer, podemos aproximá-la por $A + \frac{1}{n}I$ para n muito grande e estas estão em G.

Q2- Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diferenciável. Usando a definição, verifique que $F(x) = (x, f(x))$ é diferenciável.

solução (Assunto: diferenciabilidade):
Usando derivada direcional, temos que $\frac{\partial F}{\partial v} = (v, df(p) \cdot v)$. Usando tal expressão na definição de diferenciabilidade concluí - se a questão.

Q3- Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e conexo. Seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua.

(a) Mostre que o conjunto $\text{graf}(f) := \{(x, f(x));\ x \in K\}$ é conexo e compacto.

(b) Seja $p \in \mathbb{R}$ um ponto que pertence a imagem de f. Prove que $f^{-1}(p)$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

solução (Assunto: Continuidade e topologia):
(a) Defina $\varphi : K \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = (x, f(x))$. Note que φ é contínua e como $\varphi(K) = \text{graf}(f)$, segue $\text{graf}(f)$ é conexo e compacto.
(b) Seja $p \in Im(f)$. Como $\{p\}$ é um conjunto fechado e f é uma função contínua, concluímos que $f^{-1}(p)$ é um conjunto fechado, que contido num compacto, é também compacto. Se existisse homeomorfismo entre $f^{-1}(p)$ e $\mathbb{R}$, então $\mathbb{R}$ seria compacto

Q4- Obtenha o polinômio de Taylor de grau 2 para função $f(x, y) = x\,\text{sen}(y)$ em torno da origem.

solução (Assunto: Fórmula de Taylor):
Após o cálculo das derivadas de ordem menor ou igual a dois na origem, deduzimos que o polinômio solicitado é $p_2(x, y) = xy$.

Q5- Seja $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ definida em $\mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que f admite pontos de máximo e mínimo quando restrita à elipse de equação $x^2 + 2y^2 = 1$;

(b) Determine os pontos de mínimo e máximo.

solução (Assunto: Continuidade e Multiplicador de Lagrange):

(a) f é contínua e a elipse é um subconjunto compacto do plano. Basta usar o Teorema de Weierstress;
(b) Usando multiplicador de Lagrange obtemos:

Máximo: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Mínimo: $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ e $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$