Universidade Federal de Alagoas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Padrão de Resposta da Prova de Seleção de Doutorado

Q1- Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua em $a \in \mathbb{R}^n$. Prove que se $f(a)$ não pertence à bola fechada $B[b;r] \subset \mathbb{R}^m$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x)$ não pertence a $B[b;r]$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|x-a| < \delta$.

Solução: Como $f(a) \notin B[b;r]$, temos que $|f(a)-b| > r$, ou seja, $|f(a)-b|-r > 0$. Como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)-f(a)| < |f(a)-b|-r$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|x-a| < \delta$. Segue da Desigualdade Triangular que

$$\begin{aligned} |f(x)-b| &= |f(x)-f(a)+f(a)-b| \\ &\geq |f(a)-b|-|f(x)-f(a)| \\ &> r \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $|x-a| < \delta$.

Q2- Suponha que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $f(x/2) = f(x)/2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que f é um funcional linear.

Solução: Como $f(x/2) = f(x)/2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos que $f(0) = f(0/2) = f(0)/2$, ou seja, $f(0) = 0$. Por outro lado, segue diretamente da hipótese que

$$f\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{f(x)}{2^k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, como f é diferenciável, nós temos

$$f'(0)\cdot x = \lim_{t\to 0}\frac{f(tx)}{t} = \lim_{k\to\infty}\frac{f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} f(x) = f(x).$$

Isto prova que $f = f'(0)$, que é um funcional linear.

Q3- Considere a seguinte função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^4+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

a) Mostre que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.
b) A igualdade $\langle \nabla f(0,0), v\rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ é sempre válida?
c) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

Solução:
a) Seja $v = (a,b) \neq (0,0)$. Por um cálculo direto temos:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}\right) = \frac{a^3b^2}{a^4+b^4}.$$

Logo $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existe, pois o limite existe e é igual a $\frac{a^3b^2}{a^4+b^4}$.
b) Isto não é verdade. De fato, $\nabla f(0,0) = (0,0)$, porém $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ pode não ser nulo.
c) Não, pois se fosse verdade, $\langle \nabla f(0,0), v\rangle$ seria igual a $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

Q4- Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função que satisfaz

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^m$. Mostre que f é constante.

Solução: Basta observar que f é diferenciável e que $df(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Então vemos que,

$$f(x + h) = f(x) + O(h) + r(h),$$

onde O é a aplicação linear nula e

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(y) - O(h)\|}{\|h\|} \leq \limsup_{h\to 0} \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = 0.$$

Logo $\lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$. Desta forma f é diferenciável e $df(x) = 0$. Como $\mathbb{R}^m$ é convexo, segue que f é uma função constante.

Q5- Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto do $\mathbb{R}^2$ e , $a(x, y)$ e $b(x, y)$ funções positivas em $U \cup \partial U$, onde ∂U denota a fronteira de U. Deste modo a forma quadrática definida pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

é positiva definida para todo ponto (x, y). Para uma função de classe C^2, v, definida em $U \cup \partial U$ defina o operador L por

$$Lv = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

com esta condição de positividade definida L é dito elíptico. Uma função v é dita estritamente subharmônica relativa a L se $Lv > 0$. Mostre que uma função estritamente subharmônica não pode ter um ponto de máximo em U.

Solução: Em um ponto de máximo no interior teríamos $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0$. Como a e b são não-negativos, então Lv neste ponto de máximo é nào positivo, o que contradiz a hipótese de $Lv > 0$.