Universidad Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduación en Matemática

Prova de Seleção para Doutorado
Com Soluções

Data: 04 de Dezembro de 2017
Inicio: 09:00hs
Término: 12:00hs

1- Prove que o interior de qualquer conjunto $X \subseteq \mathbf{R}^n$ é sempre aberto.
Solução:
Para que um conjunto X seja aberto basta que $X \subseteq int(X)$, pois sempre vale $int(X) \subseteq X$. Queremos provar que $int(X)$ é um conjunto aberto. Para isto vamos provar que $int(X) \subseteq int(int(X))$. Se $int(X) = \emptyset$, o resultado segue trivialmente. Portanto, podemos supor que $int(X) \neq \emptyset$. Seja $x \in int(X)$. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq X$. Afirmamos que $B(x, \varepsilon) \subseteq int(X)$. De fato, dado $y \in B(x, \varepsilon)$, defina $\delta = \varepsilon - \|y - x\| > 0$. Assim, dado $z \in B(y, \delta)$, nós temos

$$\|z - y\| < \delta = \varepsilon - \|y - x\|,$$

ou seja,

$$\|z - y\| + \|y - x\| < \varepsilon.$$

Portanto, segue da Desigualdade Triangular que

$$\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$z \in B(x, \varepsilon).$$

Como isto vale para todo $z \in B(y, \delta)$, temos que

$$B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq X.$$

Logo, $y \in int(X)$. Por fim, como isto vale para todo $y \in B(x, \varepsilon)$, temos que $B(x, \varepsilon) \subseteq int(X)$, ou seja, $x \in int(int(X))$. Logo,

$$int(X) \subseteq int(int(X)),$$

garantindo que $int(X)$ é aberto.

2- Sejam $X \subseteq \mathbf{R}^n$ um subconjunto ilimitado, $f : X \to \mathbf{R}^n$ uma aplicação e $a \in \mathbf{R}^n$. Escrevemos $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $\|x\| > r$ vale $\|f(x) - a\| < \varepsilon$. Prove que $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in \mathbf{R}^n$ com $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$, tem-se $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$.
Solução:
Suponha que $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ e seja $x_k \in X$ uma sequência tal que $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$. Fixe $\varepsilon > 0$. Segue da definição de $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ que existe $r > 0$ tal que $\|f(x) - a\| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ satisfaz $\|x\| > r$. Por outro lado, como $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$, existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\|x_k\| > r$ sempre que $k \geq k_0$. Em particular, $\|f(x_k) - a\| < \varepsilon$ sempre que $k \geq k_0$. Portanto, $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$.

Queremos provar agora que se $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$ para toda sequência $x_k \in X$ com $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. Vamos demonstrar a contrapositiva disto. De fato, suponha que não vale $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. Portanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $r > 0$ existe $x_r \in X$ com $\|x_r\| > r$ e $\|f(x_r) - a\| \geq \varepsilon$. Fazendo $r = k$

para cada $k \in \mathbf{N}$, temos que existe um sequência $x_k \in X$ com $\|x_k\| > k$ tal que $\|f(x_k) - a\| \geq \varepsilon$. Portanto, $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$ e $\|f(x_k) - a\| \geq \varepsilon$. Em particular, não vale $\lim_{k\to\infty} \|f(x_k) - a\| = 0$, ou seja, não vale $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$. Logo, não vale que $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a$ para toda sequência $x_k \in X$ com $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$. Isto garante o resultado.

3- Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ uma função de classe C^2.
$a)$ Prove que se $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$, então existem funções $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 tais que $g(x,y) = \phi(x) + \psi(y)$.
$b)$ Use o item (a) para provar que g satisfaz a EDP $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ se, e somente se, existem funções $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 tais que

$$g(x,y) = \phi(x+y) + \psi(x-y).$$

Solução:
$a)$ Como g é de classe C^2 e $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$, existe uma função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^1 talque $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = f(y)$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, existe $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 tal que $g(x,y) - \phi(x) = \int_0^y f(t)dt$. Fazendo $\psi(y) = \int_0^y f(t)dt$, obtemos o resultado.
$b)$ Considerando a mudança de variávies $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dada por $T(s,t) = (x(s,t), y(s,t)) = (\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2})$, a EDP $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ junto com o Teorema de Schwarz, implicam que: $\frac{\partial^2 g \circ T}{\partial t \partial s} = \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \cdot \frac{1}{4} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{4} = 0$. Logo pelo item (a), existem funções $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^2 tais que $g \circ T(s,t) = \phi(s) + \psi(t)$. Daí,segue que $g(x,y) = \phi(x+y) + \psi(x-y)$.

4- Determine os pontos críticos da função $f : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$ dada por $f(x,y) = \langle x, y \rangle$, restrita à esfera unitária $|x|^2 + |y|^2 = 1$, e conclua daí a desigualdade de Schwarz $(\langle x, y \rangle \leq |x||y|)$.
Solução:
Considerando a função $g(x,y) = |x|^2 + |y|^2$, temos que (x,y) é um ponto crítico de f restrita à esfera unitária $|x|^2 + |y|^2 = 1$ se, e somente se, existe $\lambda \neq 0$ tal que $\bigtriangledown f(x,y) = \lambda \bigtriangledown g(x,y)$, isto é, $x = \lambda y$ e $y = \lambda x$. Donde $x = \pm y$. Em particular, os máximos locais f restrita à esfera unitária $|x|^2 + |y|^2 = 1$ acontecem nos pontos onde $x = y$, em cujos casos $f(x,y) = |x|^2 = |y|^2 = \frac{1}{2}$. Sendo assim, para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}^n$, tem-se $f(\frac{\sqrt{2}x}{2|x|}, \frac{\sqrt{2}y}{2|y|}) \leq \frac{1}{2}$. Donde $\langle x, y \rangle \leq |x||y|$.

5- Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ um caminho diferenciável tal que $f(a) = f(b) = 0$. Prove que existe $c \in (a,b)$ tal que $\langle f(c), f'(c) \rangle = 0$
Solução:
Defina a função real $\phi : [a,b] \to \mathbf{R}$ por $\phi(t) = |f(t)|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle$. Como f é derivácel no aberto (a,b) e contínua no fechado $[a,b]$ segue do Teorema de Rolle que existe $c \in (a,b)$ tal que $\phi'(c) = 2\langle f(c), f'c \rangle = 0$. Como queríamos mostrar.

6- Seja $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ um caminho diferenciável tal que $f(t) \neq 0$ e $f'(t) = \lambda(t) f(t)$ para todo $t \in I$, onde $\lambda : I \to \mathbf{R}$ é uma função real derivável. Prove que a imagem $f(I)$ está contida numa reta que passa pela origem.
Solução:

Derivando ϕ e usando a hipótese do exercício obtemos

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \frac{f'(t)}{|f(t)|} + f(t)\frac{d}{dt}(\langle f(t), f(t)\rangle^{-1/2}) \\
&= \frac{f'(t)}{|f(t)|} - \frac{1}{2}\langle f(t), f(t)\rangle^{-3/2}\frac{d}{dt}(\langle f(t), f(t)\rangle)f(t) \\
&= \frac{f'(t)}{|f(t)|} - \frac{1}{2}\langle f(t), f(t)\rangle^{-3/2}2\langle f(t), f'(t)\rangle f(t) \\
&= \frac{f'(t)}{|f(t)|} - \frac{\langle f(t), f'(t)\rangle}{|f|^3}f(t) \\
&= \frac{f'(t)\langle f(t), f(t)\rangle - \langle f(t), f'(t)\rangle f(t)}{|f|^3} \\
&= \frac{\lambda(t)f(t)\langle f(t), f(t)\rangle - \langle f(t), \lambda(t)f(t)\rangle f(t)}{|f|^3} = 0
\end{aligned}$$

Logo $\phi(t) := \frac{f(t)}{|f(t)|} = c$, onde c é um vetor constante. Portanto $f(t) = c|f(t)|$ e $f(t)$ está contido na reta parametrizada por tc.