Universidad Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduación en Matemática

Prova de Seleção de Mestrado
Com Soluções

Data: 04 de Dezembro de 2017
Inicio: 09:00hs
Término: 12:00hs

---

1. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função derivável tal que $f(tx) = tf(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbf{R}$. Prove que $f(x) = f'(0)x$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Mais geralmente, se f é k vezes derivável e $f(tx) = t^k f(x)$ para quaisquer $t, x \in \mathbf{R}$, prove que $f(x) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ para todo $x \in \mathbf{R}$.
Solução:
Observe que $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0f(0) = 0$. **Portanto, para** $x = 0$, **temos que** $f(x) = f'(0)x$. **Se** $x \neq 0$, **temos que**
$$x\frac{f(tx)}{tx} = f(x)$$
para todo $t \neq 0$. **Fazendo** $t \to 0$ **acima, temos que**
$$xf'(0) = f(x)$$
para todo $x \in \mathbf{R}$.
Na segunda parte, use a Regra da Cadeia k **vezes para derivar ambos os lados da equação** $f(tx) = t^k f(x)$ **em relação a** t **para obter**
$$f^{(k)}(tx)x^k = k!f(x)$$
para quaisquer $t, x \in \mathbf{R}$. **Fazendo** $t = 0$, **temos que**
$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x)$$
para todo $x \in \mathbf{R}$.

2. **Seja** $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, **uma sequência de funções de classe** C^1 **tal que** f_n **converge pontualmente para uma função** $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ **(i.e.** $f_n(x) \to f(x)$ **para cada** $x \in \mathbf{R}$**) e** f_n' **converge uniformemente para uma função** $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. **Prove que** f **é de classe** C^1 **e** $f' = g$. **(Dica: Use o Teorema Fundamental do Cálculo.)**
Solução:
Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que
$$f_n(x) = f_n(0) + \int_0^x f_n'(s)ds$$
para todo $x \in \mathbf{R}$. **Como** f_n **converge pontualmente para** f, **temos que** $f_n(x) \to f(x)$ **e** $f_n(0) \to f(0)$. **Além disso, como** f_n' **converge uniformemente para** g, **temos que** g **é contínua e**
$$\int_0^x f_n'(s)ds \to \int_0^x g(s)ds$$
para todo $x \in \mathbf{R}$. **Portanto,**
$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(s)ds$$
para todo $x \in \mathbf{R}$. **Como** g **é contínua, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que** f **é derivável e**
$$f'(x) = g(x)$$
para todo $x \in \mathbf{R}$. **Portanto,** $f' = g$ **e** f **é de classe** C^1.

3. **Sejam X e Y conjuntos finitos, com $\mathcal{C}ard(X) = m$ e $\mathcal{C}ard(Y) = n$. Seja $\mathcal{F}(X;Y)$ o conjunto de todas as funções $f : X \to Y$. Prove que $\mathcal{C}ard(\mathcal{F}(X;Y)) = n^m$.**
   Solução:
   Sem perda de generalidade, podemos supor que $X = \mathcal{I}_m := \{1, 2, ..., m\}$. Agora, procedendo por indução sobre m:
   Para $m = 1$, temos que cada elemento de $\mathcal{F}(\mathcal{I}_1;Y)$ corresponde à escolha de um elemento de Y e, Portanto, $\mathcal{C}ard(\mathcal{F}(\mathcal{I}_1;Y)) = \mathcal{C}ard(Y) = n$. Suponha que $\mathcal{C}ard(\mathcal{F}(\mathcal{I}_m;Y)) = n^m$. Note que, para cada $f \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_{m+1};Y)$, existe uma única $f|_{\mathcal{I}_m} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_m;Y)$ tal que f é extensão de $f|_{\mathcal{I}_m}$. Por outro lado, cada $g \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_m;Y)$ pode ser estendida a exatamente $\mathcal{C}ard(Y)$ funções em $\mathcal{F}(\mathcal{I}_{m+1};Y)$. Portanto, $\mathcal{C}ard(\mathcal{F}(I_{m+1};Y)) = n^m \times \mathcal{C}ard(Y) == n^m \times n = n^{m+1}$.

4. **Seja X um conjunto enumerável. Prove que o conjunto $\mathcal{P}(X)$ das partes de X é enumerável se, e somente se, X é finito.**
   Solução:
   Se X é finito e $\mathcal{C}ard(X) = m$, então $\mathcal{P}(X)$ também é finito com $\mathcal{C}ard(\mathcal{P}(X)) = 2^m$ e, portanto, enumerável. Por outro lado, se X não é finito, existe uma bijeção $\varphi : \mathsf{N} \to X$. Logo, podemos considerar $X = \mathsf{N}$. Agora, basta olhar cada subconjuntos de $X \subset \mathsf{N}$ como uma sequência de zeros e uns, em que o n-esimo termo é igual a 1 se $n \in X$ e 0 se $n \notin X$.

5. **Mostre que toda coleção de abertos não vazios de R dois a dois disjuntos é enumerável.**
   Solução:
   Seja $X = \cup_{\lambda \in I} U_\lambda$, onde λ pecorre um conjunto de índices I, uma coleção de abertos não vazios dois a dois disjuntos. Como o conjunto dos números racionais Q é denso em R, em cada U_λ podemos escolher um racional q_λ. Como a coleção de conjuntos é disjunta, isto define uma bijeção da coleção de abertos em um subconjunto de Q, logo a coleção é enumerável.

6. **Seja $f : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função, e suponha que para cada $\epsilon > 0$ se possa obter uma função contínua $g : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \epsilon$. Prove que f é contínua.**
   Solução:
   Tome $a \in X$. Como g é contínua segue que dado $\epsilon > 0$ existe $delta > 0$ tal que $|g(x) - g(a)| \leq \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Combinando este fato com a desigualdade triangular e a hipótese do exercício segue que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - g(x) + g(x) - g(a) + g(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| + |g(a) - f(a)| < 3\epsilon \end{aligned}$$

   sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Isto prova que f é contínua em a.