Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Prova de Seleção de Mestrado
Com soluções

Data: 14 de Julho de 2017
Início: 8h
Término: 11h

Banca Examinadora
Prof. Tiarlos Cruz
Prof. Marcos Ranieri
Prof. Feliciano Vitório

Escolha 4 das questões abaixo.

1- Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto discreto, isto é, todos os seus pontos são isolados.
a) Mostre que X é enumerável;
b) Mostre que se X é compacto, então X é finito;
c) Dê um exemplo de um conjunto discreto que não é fechado.

Solução:

(a) Como os pontos de X são todos isolados, para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que $B_{\delta_x}(x) \cap X = \{x\}$. Desde que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, então $B_{\frac{\delta_x}{2}}(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Fixemos para cada $x \in X$ algum $q_x \in B_{\frac{\delta_x}{2}}(x) \cap \mathbb{Q}$ e definamos a função $\phi : X \to \mathbb{Q}$ por $\phi(x) = q_x$. Essa função é injetora, logo X é enumerável.

(b) Para cada $x \in X$ tome uma bola B_x contendo x tal que $B_x \cap X = \{x\}$. Essas bolas $B_x{}'s$ são uma cobertura aberta para X, desde que X é compacto, $X \subset B_1 \cup \ldots \cup B_k$, ou seja, X é finito.

(c) Basta considerar $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

2- Sejam (a_n) e (b_n) sequências definidas por:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que
a) $a_n < b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
b) A sequência (a_n) é crescente;
c) A sequência (b_n) é decrescente.

Conclua que as sequências (a_n) e (b_n) são convergentes e têm o mesmo limite.

Sugestão para b) Use a desigualdade aritmética-geométrica usando $a_1 = 1$, $a_2 = \cdots = a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$.

Solução:

a) Note que as sequências (a_n) e (b_n) são formadas por números positivos e que $\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$, assim $b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n$.

b) Da desigualdade aritmética-geométrica usando $a_1 = 1$, $a_2 = \cdots = a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$, temos

$$\begin{aligned} \tfrac{n+2}{n+1} &\geq \sqrt[n+1]{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n} \Leftrightarrow \\ \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} &\geq \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \quad i.e. \\ a_{n+1} &\geq a_n. \end{aligned}$$

c) Da desigualdade geométrica-harmônica usando $a_1 = 1$, $a_2 = \cdots = a_{n+1} = 1 + \frac{1}{n-1}$, temos

$$\begin{aligned} \tfrac{n+1}{n} &\leq \sqrt[n+1]{\left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^n} \Leftrightarrow \\ \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} &\leq \left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^n \quad i.e. \\ b_n &\leq b_{n-1}. \end{aligned}$$

Para concluir, temos pelos itens acima que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1.$$

Em particular, (a_n) é uma sequência crescente limitada superiormente e (b_n) é uma sequência decrescente limitada inferiormente, consequentemente ambas são convergentes. Mais ainda passando o limite em

$$b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

obtemos que as sequências têm o mesmo limite.

3- Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua.

a) Prove que f tem um ponto fixo, isto é, existe um ponto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$;

b) Suponha f derivável com $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Mostre que existe exatamente um ponto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$;

c) Dê exemplo de uma função contínua $g : [0,1) \to [0,1)$ que não tem pontos fixos.

Solução:

a) Defina a função $F : [0,1] \to [0,1]$ dada por $F(x) = x - f(x)$, a qual também é contínua. Como $F(0) \geq 0$ e $F(1) \leq 0$. Pelo teorema do valor intermediário, deve existir $c \in [0,1]$ tal que $F(c) = 0$. Donde $f(c) = c$

b) Suponha exista $\tilde{c} \neq c$, digamos $\tilde{c} < c$, tal que $f(\tilde{c}) = \tilde{c}$. Pelo Teorema do valor médio, existe $a \in (\tilde{c}, c)$ tal que

$$f'(a) = \frac{f(c) - f(\tilde{c})}{(c - \tilde{c})} = 1.$$

Donde chegamos a uma contradição.

c) Entre os inúmeros exemplos, tome a função $g : [0,1) \to [0,1)$ dada por $g(x) = 1$ para cada $x \in [0,1)$. Tal função não tem pontos fixos.

4- Mostre que a equação

$$3^x + 4^x = 5^x$$

tem uma única solução.

Sugestão Use o teorema de Rolle.

Solução: Considere a função suave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$. É claro que os zeros de f coincidem com as soluções da equação $3^x + 4^x = 5^x$ e que $x = 2$ é uma solução para essa equação. Veja que $f'(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f'(x) = \log(3/5)\left(\frac{3}{5}\right)^x + \log(4/5)\left(\frac{4}{5}\right)^x$$

Suponha, por absurdo, que f possui outro zero $a \neq 2$, suponha sem perda de generalidade que $a > 2$, o Teorema de Rolle garante que existe um $\xi \in (2, a)$ tal que $f'(\xi) = 0$, o que é impossível.

5- Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo I. Se existe $\alpha > 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ para quaisquer $x, y \in I$ então f é contínua e possui derivada nula em todos os pontos de I. Consequentemente, f é constante.

Solução: Tome $a \in I$ Note que $|\frac{f(x)-f(a)|}{|x-a|} \leq c|x - a|^{\alpha-1}$. Desde que $\alpha - 1 > 0$ temos $f'(a) = 0$ para todo $a \in I$. Logo f é constante.

6- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

a) Mostre que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

b) Mostre com um exemplo que podemos ter $\int_a^b f(x)dx = 0$ e $f \neq 0$.

c) Mostre que se f é contínua então f é identicamente nula.

Solução:

a) Sejam $s(f, P)$ e $S(f, P)$ a soma inferior e soma superior relativa a uma partição P. Como $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$, então $s(f, P) \geq 0$ e $S(f, P) \geq 0$. Logo $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

b) Considere a função $\cos x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Ela é tal que $\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$.

c) Sendo f continua e não negativa, então existiria uma vizinhança suficientemente pequena $[a', b'] \subset [a, b]$ tal que $f(x) > 0$. No entanto teríamos $\int_a^b f(x)dx \geq \int_{a'}^{b'} f(x)dx > 0$.