Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Prova de Seleção de Doutorado

Data: 19 de Julho de 2017

Início: 8h.

Término:11h
Escolha quatro questões

Nome:

1- Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto e $\{B_j\}$ uma sequencia de bolas abertas que cobrem K. Prove que existe um número real positivo ε tal que cada bola de raio ε centrada em um ponto de K está contida em uma das bolas B_j. Solução:

Suponha que não existe um tal ε. Então existe uma sequencia (x_n) em K tal que nenhuma das bolas $B(x_n, \frac{1}{n})$ está contido em alguma bola B_j. Como K é compacto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, (x_n) converge a algum ponto $x \in K$. Então, desde que as bolas $B_j{}'s$ são uma cobertura aberta de K, existe um j e um $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset B_j$. Tome $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ e escolha $n > N$ tal que $|x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Então $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(x, \varepsilon) \subset B_j$, contradizendo nossa escolha dos $x_n{}'s$. Portanto, o ε desejado deve existir.

2- Sejam $A \subset R^n$ compacto e $x \in A$. Suponha que $\{x_i\}$ é uma sequencia em A tal que toda subsequencia convergente de $\{x_i\}$ converge a x.

a) Prove que a sequencia $\{x_i\}$ converge.

b) Dê um exemplo para mostrar que se A não é compacto, o resultado no item a) não é necessariamente verdadeiro.

Solução:

a) Suponha que a sequencia $\{x_i\}$ não converge para x. Temos que existe uma vizinhança V de x, $x \in V$, tal que para todo $i \in \mathbb{N}$ existe um $x_{n_i} \notin V$. Desde que A é compacto, (x_{n_i}) possui subsequência convergente que não converge para x. O que é uma contradição a hipótese.

b) Tome $A = \mathbb{R}$ e $(x_i) \subset \mathbb{R}$ dada por $x_{2i-1} = i$ e $x_{2i} = 0$, $i \in \mathbb{N}$.

3- Responda:

a) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e suponhamos que a equação $F(x, y, z) = 0$ determina cada uma das variáveis como função, de classe C^1, das restantes, ou seja,

$$x = x(y, z); \ \ y = y(x, z) \ \ ; z = z(x, y).$$

Mostre que se tem

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = -1$$

b) A equação $xy - z\ln\, y + e^{xy} = 1$ define funções diferenciáveis $x = f(y,z)$, $y = g(x,z)$, $z = h(x,y)$ em uma vizinhança do ponto $(0,1,1)$?

Solução:

a) É imediato que pelo teorema da função implicita temos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Logo é imediato que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = -1$$

b) Vamos utilizar novamente o Teorema da função implícita. Defina a função $F(x,y,z) = xy - z\ln\, y + e^{xy} - 1$ e note que $F(0,1,1) = 0$. Observe que como $F_x(0,1,1) \neq 0$, $F_y(0,1,1) \neq 0$, $F_z(0,1,1) = 0$, então F apenas define implicitamente funções diferenciáveis $x = f(y,z)$ e $y = g(x,z)$.

4- a) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no 0. Suponha que $f(tx) = tf(x)$ para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é linear.

b) A partir do item anterior, deduza que a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2+y^2)}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \quad , & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável na origem.

c) Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no 0 tal que $g(tx) = |t|g(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $g(x) = 0$ para todo x.

Solução:

a) Fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Note que se f é diferenciável em 0, então f é contínua em 0, assim

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(tx) = \lim_{t \to 0} tf(x) = 0.$$

Se t é um número positivo suficientemente pequeno , a diferenciabilidade de f no 0 implica que

$$\begin{aligned} f(tx) &= f(0) + t\nabla f(0)\cdot x + o(t) \\ tf(x) &= t\nabla f(0)\cdot x + o(t) \\ f(x) &= \nabla f(0)\cdot x + o(t)/t \\ f(x) &= \nabla f(0)\cdot x \end{aligned}$$

onde tomamos o limite para obter a última igualdade. Temos assim que f é linear.

b) Note que a função h, satisfaz $h(tx,ty) = th(x,y)$, mas h não é linear. Portanto, pelo item anterior h não é diferenciável na origem.

c) Fixe $x \in \mathbb{R}^n$. Pelo primeiro item temos que g é linear. Mais ainda, temos $-g(x) = g(-x) = |-1|g(x) = g(x)$, o que implica que $g(x) = 0$.

5- Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^3. Suponha que o Laplaciano de f,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

é positivo em todos os pontos. Prove que f não pode ter um máximo local.

Solução:

Suponha que f tem um máximo local em um ponto $a \in \mathbb{R}^2$ então a hessiana de f é não-positiva em a. Desde que o laplaciano é o traço da Hessiana, ele deveria ser não-positivo. Contrariando a hipótese.

6- Dados $n > 1$ números reais positivos $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Mostre usando o método dos multiplicadores de Langrange que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Dica: Considere $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ sujeita a condição $g(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$. Solução: Considere $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ sujeito a condição $g(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{n} x_1^{1/n} x_2^{1/n} \cdots x_1^{1/n-1} \cdots x_n^{1/n}$$

para todo inteiro $1 \leq i \leq n$. Por outro lado, $\nabla g = (1, 1, ..., 1)$. Assim pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \lambda \nabla g$. Sendo assim $n\lambda x_1 = n\lambda x_2 = ...n\lambda x_n$. Donde temos $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{c}{n}$. Logo

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \sqrt[n]{\frac{c}{n}\frac{c}{n}...\frac{c}{n}}.$$

O resultado segue.