**Universidade Federal de Alagoas**
**Instituto de Matemática**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

---

Prova de Seleção de Mestrado

**Data: 03 de março de 2017.** Início: 8 horas. Término: 12 horas

---

1. **Parte 1 - Julgue a veracidade de afirmações, com breve justificativa.**

**1-** Seja $a > 1$. Considere a sequência $a_n = \dfrac{a^n}{n^5}$. Então $\lim a_n = +\infty$.

(■) Verdadeiro ou ( ) Falso

Justificativa: Note que a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = \frac{a^x}{x^5} \to +\infty$ quando $x \to +\infty$.

**2-** Seja $a_n$ uma sequência de números reais não-negativos tal que $\sum a_n$ converge. Então $\sum a_n^3$ converge.

(■) Verdadeiro ou ( ) Falso

Justificativa: Se $\sum a_n$ converge então $a_n \to 0$, assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n < 1$ para $n \geq n_0$ e deste modo para todo $n \geq n_0$ tem-se

$$(a_n)^3 \leq (a_n)^2 \leq a_n.$$

A convergência da série $\sum a_n^3$ é garantida pela comparação das séries.

**3-** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par, isto é, $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se $f$ é derivável no ponto $x = 0$, então $f'(0) = 0$.

(■) Verdadeiro ou ( ) Falso

Justificativa: Se $f$ é derivável no ponto $x = 0$, então para $h$ suficientemente pequeno temos $f(h) = f(0) + f'(0)h + r(h)$, onde $\frac{r(h)}{h} \to 0$ quando $h \to 0$. Como $f$ é par tem-se também $f(h) = f(-h) = f(0) + f'(0)(-h) + r(-h)$. Consequentemente,

$$2f'(0) = \frac{r(-h) - r(h)}{h}. \tag{1}$$

Como claramente $h \to 0 \Rightarrow -h \to 0$ passe ao limite em (1) para concluir o resultado

**4-** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q}, \text{ onde } \frac{p}{q} \text{ é uma fração irredutível com } q > 0. \end{cases}$$

Então $f$ é diferenciável no zero.

( ) Verdadeiro ou (■) Falso

Justificativa: Para que a derivada de $f$ exista no 0, faz-se necessário que para qualquer sequência $x_n \to 0$ o limite da sequência $\frac{f(x_n)}{x_n}$ existe e é igual a $f'(0)$. Note que isto não se verifica para as sequências $x_n = 1/n$ e $y_n = 2/n$.

## 2. Parte 2 - Resolva os seguintes problemas

**1-** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que é duas vezes diferenciável em $(a, b)$ e tal que para todo $x \in (a, b)$ tem-se $f''(x) = \alpha f(x)$, para alguma constante $\alpha > 0$. Prove que $f$ não possui máximo positivo nem mínimo negativo no interior do intervalo. Conclua que

$$|f(x)| \leq \max\{|f(a)|, |f(b)|\}, \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Solução: Suponha, por absurdo, que $f$ possui máximo positivo no interior do intervalo e denote por $x_0$ este ponto de máximo, temos que $f''(x_0) \leq 0$. Por outro lado $f''(x_0) = \alpha f(x_0) > 0$. Um argumento análogo mostra que $f$ não possui mínimo negativo no interior do intervalo.

Agora, como $[a, b]$ é compacto e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, temos que $f$ possui máximo e mínimo em $[a, b]$, sem perda de generalidade suponha que $f(a)$ seja o mínimo e $f(b)$ seja o máximo. Temos assim, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, para todo $x \in [a, b]$. Portanto,

$$f(x) \leq f(b) \leq |f(b)| \leq \max\{|f(a)|, |f(b)|\}$$

e

$$f(x) \geq f(a) \geq -|f(a)| \geq -\max\{|f(a)|, |f(b)|\}.$$

**2-** Sejam $I_k = (k - \frac{1}{k}, k + \frac{1}{k})$, $k \in \mathbb{N}$, e $I = \cup_{k \in \mathbb{N}} I_k$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $f^{-1}(I)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Solução: Para todo $k \in \mathbb{N}$ tem-se que $I_k$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. Logo $I$ é aberto, pois a união arbitrária de abertos é um aberto. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e tome um ponto $x \in f^{-1}(I)$. Por definição temos que $f(x) \in I$. Desde que $I$ é aberto $f(x)$ é ponto interior de $I$, i.e., existe um número real positivo $\epsilon > 0$ tal que $(f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \subset I$. A continuidade de $f$ implica que existe um número real $\delta > 0$ tal que $f(x - \delta, x + \delta) \subset (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon) \subset I$, o que significa, novamente por definição, que $(x - \delta, x + \delta) \subset f^{-1}(I)$. Consequentemente, $x$ é ponto interior de $f^{-1}(I)$ e o resultado segue.

**3-** Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos. Mostre que se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1,$$

então série de termos $a_n$ é divergente.

Solução: Se $\lim_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$n > n_0$ tem-se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \dfrac{c+1}{2}$, assim $a_{n+1} > a_n\left(\dfrac{c+1}{2}\right)$. Indutivamente podemos facilmente ver que $a_{n_1+k} > a_{n_1}\left(\dfrac{c+1}{2}\right)^k$, onde $n_1 > n_0$ e $k \in \mathbb{N}$. Como $\left(\dfrac{c+1}{2}\right) > 1$ temos que o termo geral da série $\sum a_n$ é ilimitado, logo a série $\sum a_n$ é ilimitada.

**4-** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

para toda função contínua $g$ definida no intervalo $[a,b]$. Mostre que $f$ é identicamente nula.

Solução: Note que tomando $g(x) = f(x)$, basta mostrar que se uma função contínua não-negativa $h$ tem integral nula então ela deve ser nula. Para tanto, observe que se uma função $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ é não-negativa então para qualquer $[c,d] \subset [a,b]$, tem-se

$$\int_a^b h(x)dx \geq \int_c^d h(x)dx.$$

Suponha, por absurdo, que $h$ seja não nula, isto significa que existe um ponto $x_0 \in [a,b]$ tal que $h(x_0) > 0$, como $h$ é contínua podemos escolher um intervalo $[c,d] \subset [a,b]$ de modo que $h(x) > 0$, para todo $x \in [c,d]$. Temos então que $\int_c^d h(x)dx > 0$ . Combinando essas informações temos que

$$\int_a^b h(x)dx \geq \int_c^d h(x)dx > 0.$$

O que é uma contradição.