Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Prova de Seleção para o Doutorado

Data: 03 de março de 2017. Início: 9 horas. Término: 13 horas

---

1. **Parte 1 - Julgue a veracidade de afirmações, com breve justificativa.**

1- Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $a \in \mathbb{R}$ é um valor regular de f, então $f^{-1}(a)$ é uma hipersuperfície orientável.
( ) Verdadeiro ou ( ) Falso
Verdadeiro, usando o Teorema da função implicita observe que $f^{-1}(a)$ é localmente um gráfico e que o gradiente de f é um campo de vetores contínuo normal à $f^{-1}(a)$.

2- O conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 1\}$ é um conjunto desconexo.

( ) Verdadeiro ou ( ) Falso
Verdadeiro. Basta notar que o conjunto é uma hipérbole equilátera.

3- O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é separável, ou seja, possui um subconjunto enumerável e denso.

( ) Verdadeiro ou ( ) Falso
Verdadeiro. Tome o subconjunto formado pelos pontos com coordenadas racionais.

4- Dado $n \geq 3$, o conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.
( ) Verdadeiro ou ( ) Falso
Falso, pois $\mathbb{R}^n$ é contrátil e $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ não é.

2. **Parte 2 - Resolva os seguintes problemas**

1- Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que é duas vezes diferenciável em (a, b) e tal que para todo $x \in (a, b)$ tem-se $f''(x) = \alpha f(x)$, para alguma constante $\alpha > 0$. Prove que

$$|f(x)| \leq \max\{|f(a)|, |f(b)|\}, \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

O candidato deve estudar propriedades de convexidade de f para obter o resultado desejado, utilizando funções auxiliares como $g(x) = f(x)^2$, se necessário.

2- Seja $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear invertível. Mostre que existe $c > 0$ tal que $|H(x)| \geq c|x|$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
O candidato deverá usar as propriedades da norma em relação à composição de transformações lineares para concluir que c pode ser tomado maior que $1/\|H\|$.

3- Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto convexo. Dada $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável, mostre que $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in U$ se, e somente se, f é Lipschitz.

O candidato deve usar corretamente o Teorema do Valor Médio para uma implicação e a propriedade de Lipschitz junto com a definição de derivada para a outra implicação.

4- Determine os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \langle x, y \rangle$, restrita à esfera unitária $|x|^2 + |y|^2 = 1$.

O candidato deve derivar corretamente e obter o gradiente de f em um ponto genérico (x, y), utilizar a expressão $g(x, y) = |x|^2 + |y|^2$ para definir a superfície de modo implícito, observando que 1 é valor regular de g, aplicar o teorema dos multiplicadores de Lagrange para concluir que os pontos críticos são da forma (x, x) ou $(x, -x)$ onde $|x|^2 = 1/2$.