**Universidade Federal de Alagoas**
**Instituto de Matemática**

---

**Prova de Seleção de Mestrado**

## Parte 1

Nas questões da primeira parte, responda afirmativamente ou negativamente dando uma justificativa plausível.

(1) Um conjunto $A$ é aberto se, e somente se, cumpre a seguinte condição: "dada uma sequência $(x_n)$ de reais que converge para um ponto $a \in A$ então existe uma subsequência $n_i$ tal que $x_{n_i} \in A$.

(2) Se $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ é diferenciável sobre um intervalo $\mathbf{I}$, então $f'$ satisfaz uma propriedade de valor intermediário sobre $\mathbf{I}$.

(3) Se duas matrizes $A$ e $B$ têm o mesmo polinômio minimal, então $A$ e $B$ são semelhantes.

(4) Uma matriz cujos os autovalores reais são nulos é nilpotente.

## Parte 2

Nesta parte dê respostas detalhadas. Soluções incompletas podem ter pontuação parcial ou nenhuma pontuação.

(1) Para um número natural $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\sigma(n)$ e $\tau(n)$ a soma de todos os números naturais divisores de $n$ e a quantidade desses divisores, respectivamente. Mostre que $\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \geq \sqrt{n}$. Discuta o que acontece quando a igualdade é atingida.

(2) Dados dois números positivos $a_1$ e $a_2$, prove que a sequência recursiva definida por

$$a_n = \frac{2}{a_{n-1} + a_{n-2}}, \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3,$$

converge.

(3) Mostre que a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $[z]$ denota a parte inteira de $z \in \mathbb{R}$, é integrável à Riemann.

(4) Seja $A$ e $B$ duas matrizes complexas $n \times n$. Prove que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$.
Sugestão: Mostre inicialmente que se $f(t) = e^{tA}$, então $f'(t) = Ae^{tA}$, depois considere a função $g(t) = e^{t(A+B)}e^{-tA}e^{-tB}$.

Boa Prova!