Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Prova de Seleção - Doutorado em Matemática/ IM-UFAL 2017

Parte 1

Nas questões da primeira parte, responda afirmativamente ou negativamente dando uma justificativa plausível.

(1) Todo aberto conexo é conexo por caminhos.
(2) Dada uma função diferenciável $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
(3) Dadas funções contínuas $f, g : A \to \mathbb{R}^n$, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = g(x)\}$ é fechado.
(4) O limite uniforme de funções contínuas $f_n : A \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua.

Parte 2

(1) Prove que se $f : A \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $f(p)$ é ponto de máximo local de f, então $f'(p) = 0$.
(2) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.
  (a) Prove que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
  (b) Prove que f é contínua em $(0, 0)$.
  (c) Decida se f é diferenciável em $(0, 0)$, justificando sua resposta.
(3) Prove que existe $\epsilon > 0$, tal que se A é uma matriz $n \times n$ com coeficientes reais tal que $\|A - I\| < \epsilon$, então existe uma matriz $n \times n$ com coeficientes reais tal que B tal que $B^2 = A$.
(4) Enuncie precisamente os teoremas da função implícita e inversa em $\mathbb{R}^n$ e dê uma aplicação desses teoremas.

Boa Prova!