Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Prova de Seleção de Mestrado

Data: 22 de fevereiro de 2016

Início: 14 horas (Brasília)

Término: 18 horas

---

1. PARTE 1 - JULGUE A VERACIDADE DE AFIRMAÇÕES, COM BREVE JUSTIFICATIVA.

1- Se $\alpha > 1$, então a série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^{\alpha}}$ converge.
( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

2- Se $p(x)$ é um polinômio com todas as raizes reais, então o polinômio $p'(x) = \frac{d}{dx}p(x)$ pode ter raízes imaginárias.
( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

3- Existem transformações lineares sobrejetivas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, $n < m$.
( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

4- A união de dois conjuntos linearmente independentes em um espaço vetorial ainda é um conjunto linearmente independente.
( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

2. PARTE 2 - RESOLVA OS SEGUINTES PROBLEMAS

1- Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $f''(x)$ é limitada. Mostre que se $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

2- Seja $X \subset \mathbb{R}$ e sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $a \in X$, com $f(a) < g(a)$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.

3- Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador linear $T : V \to V$ é não-negativo se for auto-adjunto e $\langle T(v), v\rangle \geq 0$ para todo $v \in V$. Mostre que um operador auto-adjunto é não-negativo se, e somente se, todos os seus autovalores são não-negativos.

4- Seja $M(n \times n)$ o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n. Uma matriz quadrada $A = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ é dita simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ e é dita anti-simétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i e todo j. Prove que o conjunto $S \subset M(n \times n)$ das matrizes simétricas e o conjunto $A \subset M(n \times n)$ das matrizes anti-simétricas são subsespaços vetoriais de $M(n \times n)$ e que $M(n \times n)$ é soma direta de S com A.