

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Prova de Seleção de Doutorado

Data: 22 de fevereiro de 2016

Início: 14 horas

Término: 18 horas

1. PARTE 1 - JULGUE A VERACIDADE DE AFIRMAÇÕES, COM BREVE JUSTIFICATIVA.

1- O conjunto $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ é conexo.

Verdadeiro ou Falso

2- Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui todas as derivadas direcionais no ponto $p = (0, 0)$. Então f é diferenciável em p .

Verdadeiro ou Falso

3- Seja \mathcal{F} o conjunto das funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ que possuem ao menos um ponto crítico não-degenerado. Existe $f \in \mathcal{F}$ tal que as curvas de nível em uma vizinhança U de um dos seus pontos críticos são ou retas verticais ou retas horizontais.

Verdadeiro ou Falso

4- O conjunto $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ é J -mensurável (mensurável segundo Jordan).

Verdadeiro ou Falso

2. PARTE 2 - RESOLVA OS SEGUINTE PROBLEMAS

1- Seja $U = GL(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ o conjunto das matrizes $n \times n$ invertíveis. Considere a aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ definida por $f(X) = X^{-1}$. Prove que f é diferenciável e calcule $f'(A) \cdot V$.

2- Seja $S \subset \mathbb{R}^{n^2}$ o conjunto das matrizes $n \times n$ e posto $n-1$. Prove que S é localmente o gráfico de uma função de classe C^∞ (em particular S é uma hipersuperfície). Em seguida considere P a matriz $n \times n$ cujos elementos são todos nulos, exceto os $n-1$ primeiros da diagonal, os quais são iguais a 1. Determine $T_P S$.

3- Sejam $0 < a < b < c$ números reais e $E = \left\{ (x, y, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$ um elipsóide em \mathbb{R}^3 . Determine um atlas para E . Tal atlas é coerente? Justifique.

4- Dê exemplo de um conjunto de medida nula que não é J -mensurável. Em seguida, assumindo que $X \subset \mathbb{R}^n$ é J -mensurável, prove que $vol.X = 0$ se, e só se, interior de X é vazio.