

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Prova de Seleção de Mestrado

Data: 9 de novembro de 2015

Início: 8h e 30 min. (GMT-3)

Término: 12h e 30 min.

1. PARTE 1 - JULGUE A VERACIDADE DE AFIRMAÇÕES, COM BREVE JUSTIFICATIVA.

- 1- Toda função convexa e limitada num intervalo da forma $(a, +\infty)$ é constante.
 Verdadeiro ou Falso
- 2- Se $A, B : E \rightarrow E$ são operadores lineares de mesmo posto r , então o produto BA tem posto r .
 Verdadeiro ou Falso
- 3- Uma matriz 3×3 que tem dois autovalores distintos é triangularizável.
 Verdadeiro ou Falso
- 4- Seja $X = \mathbb{Q} \cap [1, 2]$. O conteúdo de X é não nulo.
 Verdadeiro ou Falso

2. PARTE 2 - RESOLVA OS SEGUINTE PROBLEMAS

1- Seja

$$a_n = \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}}_{n \text{ raízes}}$$

Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2- Mostre que cada uma das equações

$$\sin(\cos(x)) = x \quad \text{e} \quad \cos(\sin(x)) = x$$

tem exatamente uma raiz em $[0, \pi/2]$. Além disso, se x_1 e x_2 são as raízes da primeira e da segunda equação, respectivamente, então $x_1 < x_2$.

3- No espaço vetorial das funções contínuas $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, sejam $F, G \subset E$ os espaços vetoriais formados pelas funções pares e pelas funções ímpares, respectivamente. Relativamente ao produto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$, mostre que G é o complemento ortogonal de F .

4- Quais são os autovetores do operador derivação $D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $D(f) = f'$?