Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Prova de Seleção de Doutorado

Data: 9 de novembro de 2015
Início: 13h e 30 min. (GMT-3)
Término:17h e 30 min.

---

1. Parte 1 - Julgue a veracidade das afirmações e dê uma breve justificativa.

1- A união enumerável de conjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado.
( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

2- Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo. Se $f : U \to \mathbb{R}$ possui derivadas direcionais em todo ponto $x \in U$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x) = 0$ para todo $x \in U$ e todo $v \in \mathbb{R}^n$, então f é constante.
( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

3- Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções tais que $g(x) = f(x)(1 + f(x)^4)$. Se $g \in C^k$, $k \geq 1$, então $f \in C^k$.
( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

4- Todo conjunto limitado do $\mathbb{R}^2$ é Jordan mensurável.
( ) Verdadeiro ou ( ) Falso

2. Parte 2 - Resolva os seguintes problemas

1- Sejam $f_1,\ f_2, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}^m$ caminhos diferenciáveis e $\varphi : \mathbb{R}^m \times \cdots \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação $p-$linear. Mostre que o caminho $g : I \to \mathbb{R}^n$ dado por $g(t) = \varphi(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_p(t))$ é diferenciável e $g'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \varphi(f_1(t), \ldots, f_i'(t), \ldots, f_p(t))$.
Conclua que, se $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n^2}$ é um caminho diferenciável, com $f(0) = I_n$, a matriz identidade $n \times n$ (aqui estamos identificando o espaço das matrizes $n \times n$ com $\mathbb{R}^{n^2}$) e $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ é definida por $g(t) = \det f(t)$, então $g'(0) = \mathrm{tr} A$ (traço de A), onde $A = f'(0)$.

2- Seja E o espaço das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Mostre que a aplicação $f : E \to E$ dada por $f(X) = X^3$ é diferenciável e calcule sua derivada.

3- Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$. Prove que:
(a) $\mathbb{P}^2 = f(\mathbb{S}^2)$ é uma superfície de dimensão 2 e suave, onde $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitária centrada na origem;

(b) $\mathbb{P}^2$ é uma superfície compacta e não-orientável.

4- Prove que o gráfico de uma função integrável $f : A \to \mathbb{R}$, definida num bloco n-dimensional, tem medida nula em $\mathbb{R}^{n+1}$.