Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Prova de Seleção de Mestrado

Parte 1

Nas questões da primeira parte, responda afirmativamente ou negativamente dando uma justificativa plausível.

(1) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$. A aplicação identidade é o único operador linear $L : V \to V$, tal que $L = L^{-1}$.

(2) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $T : V \to V$ um operador linear. Sob qualquer base $\mathcal{B}$ de V, $[T]_{\mathcal{B}}$ é semelhante a uma matriz triangular.

(3) Existe um número real $x \in \mathbb{R}$ tal que para qualquer número natural $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\sqrt[n]{n!} < x.$$

(4) Um limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua.

Parte 2

---

(1) Sejam V o espaço vetorial real tridimensional e $T : V \to V$ um operador linear que sob uma base $\mathcal{B}$ de V se escreve como

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine os polinômios característico e minimal, os valores e os vetores característicos de T.

(2) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se existe um número natural n tal que

(a) $T^n = I_V$, então T é diagonalizável;

(b) $T^n = 0$, então $I_V - T$ é invertível.

(3) Sejam f e g funções contínuas tais que $f(x + 1) = f(x)$ e $g(x + 1) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx.$$

(4) Enuncie os teoremas da função implícta e inversa e prove a equivalência desses teoremas.

Boa Prova!