Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Exame de selção do Doutorado IM/UFAL

Data: 11 de agosto de 2015
Duração: 04h

Candidato: ______________________________

Parte 1

Assinale se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira (V) ou falsa (F) justificando de forma breve sua resposta ou através de um contra-exemplo.

1. ( ) Os teorema da função implícita e inversa são equivalentes;
2. ( ) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Os conjuntos de níveis regulares $f^{-1}(c)$ são hipersuperfícies orientáveis;
3. ( ) O produto cartesiano de duas superfícies orientáveis é orientável.
4. ( ) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função sem pontos críticos tal que $g \circ f$ é identicamente nula. Então o determinante Jacobiano de f é identicamente nulo.

Parte 2

1. Seja $\phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação bilinear.
   (a) Calcule sua derivada $\phi'(a, b)$;
   (b) Prove que ϕ é diferenciável;
   (c) Argumente que ϕ é uma aplicação de classe C^∞.
2. Dentre os pontos do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, determine os mais próximos da origem em $\mathbb{R}^3$.

3. Prove que o conjunto $M \subset \mathbb{R}^{k^2}$ das matrizes $k \times k$ de posto $k-1$ é uma hipersuperfície. Seja $P = (p_{ij})$ a matriz $k \times k$ definida por:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & se \quad i = j \neq k \\ 0, & se \quad i \neq j \text{ ou } i = j = k. \end{cases}$$

Calcule o espaço tangente $T_P M$.

4. Encontre um atlas coerente para o toro bi-dimensional.

Boa Prova !!!!!