Vinícius Guardiano Souza

Estimativas de área e do espectro para superfícies mínimas estáveis

Maceió, Alagoas

Fevereiro de 2024

Vinícius Guardiano Souza

Estimativas de área e do espectro para superfícies mínimas estáveis

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Trabalho apresentado em 26 de fevereiro de 2024.

Universidade Federal de Alagoas – UFAL

Instituto de Matemática – IM

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante

Maceió, Alagoas

Fevereiro de 2024

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

S729e Souza, Vinícius Guardiano.
Estimativas de área e do espectro para superfícies mínimas estáveis / Vinícius Guardiano Souza. – 2024.
68 f.

Orientador: Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 66-68.

1. Superfícies mínimas. 2. Estimativas de áreas (Matemática). 3. Hipersuperfícies mínimas. I. Título.

CDU: 51

Vinícius Guardiano Souza

Estimativas de área e do espectro para superfícies mínimas estáveis

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Trabalho apresentado em 26 de fevereiro de 2024.

Marcos Petrúcio de A. Cavalcante

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante
Instituto de Matemática - UFAL
Orientador

Davi Maximo

Prof. Dr. Davi Máximo Alexandrino Nogueira
University of Pennsylvania
Examinador externo

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva
Instituto de Matemática - UFAL
Examinador interno

Maceió, Alagoas

Fevereiro de 2024

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todos os meus familiares pelo apoio inabalável ao longo da minha jornada. Em especial, quero destacar o papel fundamental do meu pai, *Hermann H. de Souza*, e da minha companheira, *Mainah A. B. de Medeiros*. Eles estiveram ao meu lado em todos os momentos, compartilhando alegrias, confortando em momentos difíceis e celebrando cada conquista. Suas presenças foram essenciais para moldar a pessoa que sou hoje.

Agradeço imensamente aos estimados professores *Abraão Mendes, Alan Anderson, Márcio Cavalcante, Márcio Batista, Rafael Lucena e Renan Medrado*, cujas aulas durante o mestrado foram fonte de profundo aprendizado. Além deles, quero reconhecer o valioso apoio de todos os outros professores do Instituto de Matemática da UFAL, cujas contribuições para minha formação vão além das salas de aula. Em especial, sou imensamente grato ao meu orientador, *Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante*, cuja disposição para esclarecer dúvidas e incentivar os estudos foi fundamental. A combinação de sua excelente didática e constante bom humor torna qualquer conversa enriquecedora e inspiradora.

Expresso minha sincera gratidão aos membros da banca examinadora pela generosidade ao oferecerem sugestões e contribuições valiosas para aprimorar este trabalho. Seu comprometimento com a excelência acadêmica e dedicação em fornecer opiniões construtivas foram fundamentais para o sucesso deste projeto.

Agradeço ainda aos colegas que a pós-graduação me fez criar laços pessoais e acadêmicos: *Bárbara Amorim, Cícero Calheiros, Cleisiane Fernandes, Davi Matheus, Elaine Sampaio, Gleydson Santos, Josafá Junior, José Marques Neto, Lucas Barreto, Maxmilian Barros, Matheus Barbosa, Talita de Araujo, Victor Ferreira e Vinicius Nascimento*. Estes são colegas que dividiram muito dos aflitos e deram soluções para problemas que eventualmente apareceram.

Expresso meu profundo agradecimento a toda equipe administrativa do IM-UFAL e a todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para minha formação. Reconheço que muitos outros merecem ser mencionados, mas, por questões de brevidade, não foi possível fazê-lo. Suas contribuições não passaram despercebidas e foram igualmente valorizadas.

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro concedido durante todo o mestrado.

Smile though your heart is aching
Smile even though it's breaking
When there are clouds in the sky, you'll get by
If you smile through your fear and sorrow
Smile and maybe tomorrow
You'll see the sun come shining through for you

Light up your face with gladness
Hide every trace of sadness
Although a tear may be ever so near

That's the time you must keep on trying
Smile, what's the use of crying?
You'll find that life is still worthwhile
If you just smile

— Smile, Nat King Cole.

Resumo

Esta dissertação se baseia nos resultados recentes de O. Munteanu, C.-J. Sung e J. Wang, publicados em 2023 no artigo da referência [MSW23]. A nossa principal motivação reside no estudo do crescimento da área de bolas geodésicas e estimativas para o espectro do operador Laplaciano em superfícies mínimas estáveis completas em uma variedade tridimensional com limitação na curvatura escalar. Após uma revisão sobre os tópicos e técnicas envolvidos, focamos inicialmente no caso do espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$. Neste caso, obtemos uma estimativa de área *ótima* que nos permite afirmar que as superfícies mínimas estáveis possuem crescimento de área exatamente como o plano Euclidiano. Isto é suficiente para provar que superfícies mínimas estáveis completas em $\mathbb{R}^3$ são planos. Esta é uma conclusão já conhecida pelas contribuições de Do Carmo e Peng [dCP79], Fisher-Colbrie e Schoen [FCS80], e Pogorelov [Pog81]. A técnica para provar a estimativa de área pode ser adaptada de modo a obter estimativas de área no caso de uma variedade ambiente mais geral.

Na segunda parte do trabalho, focamos em estimativas superiores para o ínfimo do espectro de hipersuperfícies mínimas estáveis. Inicialmente, recordamos que o ínfimo do espectro está estreitamente relacionado com o crescimento do volume de bolas geodésicas. Motivados por este fato, obtemos nossas estimativas utilizando funções testes que são construídas em termos da função de Green. Por uma questão técnica, estas estimativas valem apenas para hipersuperfícies mínimas estáveis em variedades completas com dimensão até seis.

Palavras-chave: Superfícies mínimas, estabilidade, estimativas de área, primeiro autovalor do Laplaciano.

Abstract

This dissertation is based on the recent results of O. Munteanu, C.-J. Sung, and J. Wang, published in 2023 in the referenced article [MSW23]. Our main motivation lies in the study of the area growth of geodesic balls and estimates for the bottom of the spectrum of the Laplacian operator on stable minimal surfaces in a three-dimensional manifold with scalar curvature bounded from below. After a review of the topics and techniques involved, we initially focus on the case of Euclidean space $\mathbb{R}^3$. In this case, we obtain an *optimal* area estimate that allows us to assert that stable minimal surfaces have area growth exactly like the Euclidean plane. This is sufficient to prove that complete stable minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ are planes. This conclusion is already known from the contributions of Do Carmo and Peng [dCP79], Fisher-Colbrie and Schoen [FCS80], and Pogorelov [Pog81]. The technique for proving the area estimate can be adapted to obtain area estimates in the case of a more general ambient manifold.

In the second part of the work, we focus on upper estimates for the bottom of the spectrum of stable minimal hypersurfaces. Initially, we recall that the bottom of the spectrum is closely related to the growth of the volume of geodesic balls. Motivated by this fact, we obtain our estimates using test functions constructed in terms of the Green's function. Due to technical reasons, these estimates are only valid for stable minimal hypersurfaces in complete manifolds with dimension up to six.

Keywords: Minimal surfaces, stability, growth of area, first eigenvalue.

Sumário

1	**INTRODUÇÃO**	**8**
2	**NOÇÕES PRELIMINARES**	**11**
2.1	**Operadores diferenciais em variedades**	**11**
2.1.1	O gradiente de uma função	11
2.1.2	A divergência de um campo vetorial	12
2.1.3	O Laplaciano de uma função	13
2.1.4	O Hessiano de uma função	14
2.2	**Desigualdade de Kato**	**15**
2.3	**Imersões isométricas**	**18**
2.3.1	Segunda forma fundamental	19
2.4	**Desigualdade de Shiohama-Tanaka**	**21**
2.5	**Parabolicidade**	**23**
3	**VARIAÇÕES DE ÁREA E ESTABILIDADE**	**26**
3.1	**Primeira variação de área**	**26**
3.2	**Segunda variação de área**	**29**
3.3	**Estabilidade de hipersuperfícies mínimas**	**32**
4	**ESTIMATIVAS DE ÁREA**	**38**
4.1	**Fórmulas integrais**	**38**
4.2	**Estimativa de área em $\mathbb{R}^3$**	**41**
4.3	**Estimativa de área em 3-variedades**	**44**
5	**ESTIMATIVAS DE ESPECTRO**	**49**
5.1	**O problema de Dirichlet**	**49**
5.2	**Estimativas ínfimo do espectro**	**50**
5.3	**Funções de Green**	**53**
	REFERÊNCIAS	**66**

1 Introdução

O estudo de hipersuperfícies minimais estáveis representa uma tentativa de demonstrar uma versão generalizada do teorema de Bernstein. Inicialmente, Bernstein estabeleceu que um gráfico mínimo inteiro, ou seja uma hipersuperfície mínima representada pelo gráfico em $\mathbb{R}^3$ de uma função definida em todo o plano $\mathbb{R}^2$, deve ser um plano. A validade do teorema de Bernstein em dimensões superiores foi comprovada para gráficos inteiros mínimos em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $n \leq 6$, graças às contribuições de vários autores, entre os quais se destacam Simons [Sim68], Fleming [Fle62], Almgren [Alm66], e DeGiorgi [Gio65]. Contra-exemplos para $n \geq 7$ foram obtidos por Bombieri, DeGiorgi e Guisti [BdGG69]. Dado que os gráficos inteiros mínimos são minimizantes de área (e em particular, estáveis), surge naturalmente a questão de saber se um teorema do tipo Bernstein é aplicável a hipersuperfícies minimais estáveis. Mais precisamente:

Problema de Bernstein estável: Seja Σ uma hipersuperfície completa, mínima estável no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $2 \leq n \leq 6$, então Σ é um hiperplano.

Em 1979, do Carmo e Peng [dCP79] resolveram o problema de Bernstein estável para o caso $n = 2$. Ou seja, eles mostraram que uma superfície completa, minimamente imersa e estável em $\mathbb{R}^3$ é obrigatoriamente um plano. Ao mesmo tempo, Fischer-Colbrie e Schoen [FCS80], de maneira independente, demonstraram que uma superfície Σ completa, estável e minimamente imersa em uma variedade tridimensional completa N com curvatura escalar não negativa deve ser, conformemente, ou um plano $\mathbb{R}^2$ ou um cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$. No cenário especial em que $N = \mathbb{R}^3$, eles também mostraram que Σ deve ser planar.

Em 1981, Pogorelov [Pog81] publicou uma terceira prova para o mesmo resultado, mas com uma abordagem diferente. A prova de Pogorelov se baseia numa estimativa de área, a saber

$$A(r) \leq \frac{4\pi}{3} r^2,$$

onde $A(r)$ denota a área da bola geodésica de raio r.

Neste trabalho, vamos apresentar um resultado recente, devido a Munteanu, Sung e Wang [MSW23], onde é demonstrado uma estimátiva ótima para o crescimento de área de superfícies mínimas estáveis em $\mathbb{R}^3$. Mais precisamente temos:

Teorema (O. Munteanu, C.-J. Sung, J. Wang, [MSW23])**.** *Se Σ é uma superfície mínima completa e estável em $\mathbb{R}^3$, então vale que*

$$A(r) \leq \pi r^2.$$

Isto nos mostra que o crescimento de área de bolas geodésicas para esta classe de superfícies se comporta como o plano Euclideano. Estimativas de área (ou de volume) são de grande importância para resolvermos o problema de Bernstein estável. De fato, um importante resultado de Schoen, Simon e Yau [SSY75, SS81], estabelece que se $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima estável completa com $A(r) \leq Cr^n$, onde $2 \leq n \leq 6$, então Σ é um hiperplano.

Através desse resultado, Chodosh e Li [CL21, CL23] resolveram o problema de Berstein estável para o caso $n = 3$ (veja também [CMR22]), e mais recentemente, Chodosh, Li, Minter e Stryker [CLMS24], resolveram o problema no caso $n = 4$. Assim, atualmente, o problema, sem condições adicionais, se mantém aberto nos casos $\mathbb{R}^6$ e $\mathbb{R}^7$.

No caso em que o ambiente é uma variedade tridimensional que possui curvatura limitada inferiormente, temos o seguinte teorema.

Teorema (O. Munteanu, C.-J. Sung, J. Wang, [MSW23])**.** *Considere Σ uma superfície mínima completa e estável em uma variedade tridimensional M. Nesse caso, existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que, para todo $R > 0$,*

$$A(R) \leq Ce^{\beta R}, \tag{1.1}$$

onde $\beta = 2$ se a curvatura escalar de M for tal que $\mathrm{Scal}_M \geq -6$, e $\beta = \frac{4}{\sqrt{7}}$ se a curvatura seccional de M atender a $Sec_M \geq -1$.

Recordamos que o crescimento de área de uma variedade completa também está relacionado com o ínfimo do espectro do operador Laplaciano. O ínfimo do espectro do operador Laplaciano de uma variedade completa Σ é a melhor constante onde vale a desigualdade de Poincaré

$$\lambda_0(\Sigma) \int_\Sigma \varphi^2 \leq \int_\Sigma |\nabla \varphi|^2$$

para todas as funções φ suaves e de suporte compacto. No artigo [LW06], extraímos a seguinte relação entre o ínfimo do espectro e a área de bolas geodésicas:

$$\lambda_0(\Sigma) \leq \frac{1}{4} \left(\liminf_{R \to \infty} \frac{\ln A(R)}{R} \right)^2.$$

Combinando a desigualdade acima com a estimativa de área na desigualdade (1.1) obtemos uma nova demonstração do seguinte teorema.

Teorema (P. Bérard, P. Castillon e M. Cavalcante, [BCC11])**.** *Seja Σ uma superfície completa mínima e estável em uma variedade M tridimensional.*

(a) Se a curvatura escalar de M satisfaz $\mathrm{Scal}_M \geq -6$, então $\lambda_0(\Sigma) \leq 1$.

(b) Se a curvatura seccional de M satisfaz $Sec_M \geq -1$, então $\lambda_0(\Sigma) \leq \frac{4}{7}$.

A prova original, apresentada em [BCC11], é derivada por meio de estimativas de área utilizando argumentos que dependem fortemente da dimensão do espaço ambiente. Pensando no problema análogo em dimensão mais alta, Munteanu, Sung e Wang propuseram uma nova abordagem envolvendo a função de Green G. Nesta parte, a nossa estratégia é bastante direta: escolheremos uma função de cut-off ψ de forma adequada para aplicar $\varphi = \psi|\nabla G|^{1/2}$ na desigualdade de Poincaré. Utilizaremos ferramentas conhecidas, como a desigualdade de Kato e a fórmula de Bochner, para estimar $|\nabla G|$, além de empregar a desigualdade de estabilidade para os termos relacionados à curvatura de Ricci. Seguindo essa abordagem estendemos o teorema de Bérard-Castillon-Cavalcante para hipersuperfícies mínimas estáveis de dimensões até 5. Mais precisamente.

Teorema (O. Munteanu, C.-J. Sung, J. Wang, [MSW23])**.** *Seja Σ uma hipersuperfície mínima completa e estável em uma variedade M $n+1$ dimensional, onde $n \leq 5$. Se a curvatura seccional de M satisfaz $K \geq -\kappa$ para alguma constante não negativa κ, então*

$$\lambda_0(\Sigma) \leq \frac{2n(n-1)^2}{6n - n^2 - 1}\kappa.$$

2 Noções preliminares

O objetivo principal deste capítulo é estabelecer as noções essenciais para compreender os capítulos subsequentes. Além disso, apresentaremos definições e resultados fundamentais relacionados à geometria das variedades. Esses conceitos serão de extrema importância para a teoria desenvolvida ao longo deste trabalho. Partimos do pressuposto de que o leitor possui familiaridade com conceitos de geometria Riemanniana, tais como variedades diferenciáveis, conexões afins e Riemannianas, geodésicas e curvaturas. Para uma abordagem mais aprofundada, consulte [dC15], [Lee18] ou [Jos17].

2.1 Operadores diferenciais em variedades

2.1.1 O gradiente de uma função

Ao longo deste capítulo, M denotará uma variedade Riemanniana.

Definição 2.1.1. Para uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ definimos o *gradiente* de f como o único campo vetorial suave ∇f que satisfaz

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 2.1.1. *Sejam $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Então, em U temos*

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j.$$

Além disso, o segundo membro da igualdade acima independe do referencial escolhido.

Demonstração. Ao expressar o campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ na base $\{e_1, \dots, e_n\}$ temos $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ e disso segue que

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i(f) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_i e_i, e_j(f) e_j \rangle = \left\langle X, \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j \right\rangle.$$

Pela definição de gradiente, segue que $\nabla f = \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j$. Além disso, considerando um outro referencial ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ em U, então pondo $E_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ obtemos uma matriz quadrada $(a_{ij})_{n \times n}$ ortogonal em U. Donde segue que

$$\sum_{j=1}^{n} E_j(f) E_j = \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ij} a_{kj} e_i(f) e_k = \sum_{i,k=1}^{n} \delta_{ik} e_i(f) e_k = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

O que prova que o gradiente é independente do referencial ortogonal considerado. $\square$

Proposição 2.1.2. *Seja M uma variedade suave. Para funções suaves $f, g : M \to \mathbb{R}$ valem*

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$ (ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração. Considerando um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f+g), X\rangle &= X(f+g) = X(f) + X(g) \\ &= \langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla g, X\rangle = \langle \nabla f + \nabla g, X\rangle . \end{aligned}$$

Analogamente seguem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \langle \nabla(fg), X\rangle &= X(fg) = g \cdot X(f) + f \cdot X(g) \\ &= g\langle \nabla f, X\rangle + f\langle \nabla g, X\rangle = \langle g\nabla f + f\nabla g, X\rangle . \end{aligned}$$

Como X é um campo arbitrário, fica demonstrado a proposição. □

2.1.2 A divergência de um campo vetorial

Definição 2.1.2. Considere X um campo de vetores sobre M. A *divergência* de X no ponto $p \in M$ é a função suave $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_pM$ e tr denota o funcional traço.

Definição 2.1.3. Um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é *geodésico* em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$, para $1 \le i, j \le n$.

Proposição 2.1.3. *Sejam X um campo suave de vetores em M e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ em U, então*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle).$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, então

$$(\operatorname{div} X)(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i)(p).$$

Demonstração. Segue da definição de divergência de um campo vetorial que

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} (e_i\langle X, e_i\rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle).$$

O resto é imediato a partir da definição de referencial geodésico. □

Proposição 2.1.4. *Sejam X e Y campos de vetores suaves em M e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave, então:*

(i) $\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$. (ii) $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X\rangle$.

Demonstração. O primeiro item segue do fato que o traço é um funcional linear. Para o segundo item, iremos considerar um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em $U \subset M$. Pela Proposição 2.1.3 temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i(f)X + f\nabla_{e_i}X, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\langle e_i(f)e_i, X\rangle + f\langle \nabla_{e_i}X, e_i\rangle) = \langle \nabla f, X\rangle + f \operatorname{div} X.\end{aligned}$$

□

2.1.3 O Laplaciano de uma função

Definição 2.1.4. De posse do gradiente da função suave f, definimos seu *Laplaciano* como a função suave Δf, dada por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Proposição 2.1.5. *Seja $f \in C^\infty(M)$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}e_i)f).$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, então temos em p que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f))$$

Demonstração. Considerando um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ numa vizinhança aberta $U \subset M$, segue da Proposição 2.1.3 que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}e_i)\, f).$$

O resto é imediato a partir da definição de referencial geodésico. □

Proposição 2.1.6. *Dada as funções $f, g \in C^\infty(M)$ vale que*

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$$

Demonstração. O resultado é imediato a partir da definição, Proposição 2.1.2 e Proposição 2.1.4. De fato, note que

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= \operatorname{div}(\nabla(fg)) = \operatorname{div}(f\nabla g + g\nabla f) \\ &= \operatorname{div}(f\nabla g) + \operatorname{div}(g\nabla f) \\ &= (f\operatorname{div}(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle) + (g\operatorname{div}(\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle) \\ &= f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.\end{aligned}$$

□

2.1.4 O Hessiano de uma função

Definição 2.1.5. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Definimos o *Hessiano de f* como o tensor $\operatorname{Hess} f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, definido por

$$(\operatorname{Hess} f)(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle ,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Segue prontamente da definição que

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Hess} f)(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle = X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\
&= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\
&= Y(X(f)) + [X,Y](f) - (\nabla_Y X)(f) \\
&= Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f) \\
&= Y \langle \nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, \nabla_Y X \rangle = (\operatorname{Hess} f)(Y,X)
\end{aligned}$$

para quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e, portanto, $\operatorname{Hess} f$ é simétrico.

Outra propriedade crucial desse tensor se manifesta quando consideramos um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Nesse caso,

$$\operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f) = \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{Hess} f)(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = \operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f.$$

Proposição 2.1.7 (Fórmula de Bochner)**.** *Seja $f \in C^\infty(M)$, então vale*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + |\operatorname{Hess} f\,|^2. \tag{2.1}$$

Demonstração. Fixa $p \in M$ e seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$ de p que é geodésico em p. Então, temos em p que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\operatorname{Hess} |\nabla f|^2\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{Hess} |\nabla f|^2\right)(e_i, e_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i \left(e_i \langle \nabla f, \nabla f \rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i \langle \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla f \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \nabla f, \nabla f \rangle + |\operatorname{Hess} f|^2.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Utilizando a definição do tensor de curvatura, para qualquer campo $X \in \mathfrak{X}$ vale:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle R(X, e_i) \nabla f, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} \nabla_X \nabla f + \nabla_{[X,e_i]} \nabla f, e_i \right\rangle . \tag{2.3}$$

Vamos lidar inicialmente com o primeiro termo do lado direito da igualdade em (2.3). Como o referencial é geodésico em p, temos $(\nabla_X e_i)(p) = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma, o primeiro termo de (2.3) em p é

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(X \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X e_i \rangle\right) = X(\Delta f) = \langle X, \nabla(\Delta f) \rangle . \tag{2.4}$$

Utilizando novamente que o referencial tomado é geodésico em p e que Hess f é um operador simétrico, o segundo termo da direita de (2.3) em p é

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\nabla_X\nabla f+\nabla_{[X,e_i]}\nabla f,e_i\rangle\\
&\qquad=\sum_{i=1}^{n}\Big(e_i\left\langle\nabla_X\nabla f,e_i\right\rangle-\left\langle\nabla_X\nabla f,\nabla_{e_i}e_i\right\rangle+\left\langle\nabla_{[X,e_i]}\nabla f,e_i\right\rangle\Big)\\
&\qquad=\sum_{i=1}^{n}\left(e_i\left\langle\nabla_{e_i}\nabla f,X\right\rangle+\left\langle\nabla_{e_i}\nabla f,[X,e_i]\right\rangle\right)\\
&\qquad=\sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f,X\right\rangle+\left\langle\nabla_{e_i}\nabla f,\nabla_{e_i}X\right\rangle+\left\langle\nabla_{e_i}\nabla f,\nabla_X e_i-\nabla_{e_i}X\right\rangle\right)\\
&\qquad=\sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f,X\right\rangle+\left\langle\nabla_{e_i}\nabla f,\nabla_X e_i\right\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f,X\right\rangle. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.4) e (2.5) em (2.3), segue que

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle R(X,e_i)\nabla f,e_i\right\rangle=\left\langle X,\nabla(\Delta f)\right\rangle-\sum_{i=1}^{n}\left\langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f,X\right\rangle. \qquad (2.6)$$

Em particular,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left\langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\nabla f,X\right\rangle&=\left\langle X,\nabla(\Delta f)\right\rangle-\sum_{i=1}^{n}\left\langle R(X,e_i)\nabla f,e_i\right\rangle\\
&=\left\langle X,\nabla(\Delta f)\right\rangle+\sum_{i=1}^{n}\left\langle R(e_i,X)\nabla f,e_i\right\rangle\\
&=\left\langle X,\nabla(\Delta f)\right\rangle+\mathrm{Ric}(X,\nabla f).
\end{aligned}$$

Fazendo a escolha $X=\nabla f$ na igualdade acima e substituindo em (2.2) obtemos (2.1). $\square$

2.2 Desigualdade de Kato

A desigualdade de Kato é essencialmente um resultado algébrico, contudo, será de considerável utilidade em cálculos subsequentes ao longo deste trabalho. Sua versão para operadores lineares num espaço vetorial de dimensão finita é a seguinte.

Proposição 2.2.1. *Seja V um espaço vetorial $n-$dimensional e $A:V\to V$ um operador linear autoadjunto tal que* $\mathrm{tr}(A)=0$. *Então para todo $v\in V$ vale*

$$\|Av\|^2\leq\frac{n-1}{n}\|A\|^2\|v\|^2.$$

Demonstração. Considere $\{e_1,\ldots,e_n\}$ uma base ortonormal composta por autovetores de A, com $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ sendo os autovalores associados, ou seja, $Ae_i=\lambda_i e_i$. Assim, como A é um operador autoadjunto segue imediatamente que

$$\|A\|^2=\mathrm{tr}(A^2)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle A^2e_i,e_i\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.$$

Dado que $\mathrm{tr}(A) = 0$, temos $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Fixando um índice i, obtemos $\lambda_i = -\sum_{i \neq j} \lambda_j$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\lambda_i^2 = \Big(\sum_{i \neq j} \lambda_j\Big)^2 \leq \sum_{i \neq j} 1 \cdot \sum_{i \neq j} \lambda_j^2 = (n-1) \sum_{i \neq j} \lambda_j^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} n\lambda_i^2 &= (n-1)\lambda_i^2 + \lambda_i^2 \leq (n-1)\lambda_i^2 + (n-1) \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_j^2 \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^{n} \lambda_j^2 = (n-1) \left\| A \right\|^2. \end{aligned}$$

Ou seja, para todo $1 \leq i \leq n$ vale $\lambda_i^2 \leq \dfrac{n-1}{n} \left\| A \right\|$. Para um vetor $v \in V$ expresso como $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$, temos

$$\left\| Av \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} v_i \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 v_i^2 \leq \frac{n-1}{n} \left\| A \right\|^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \frac{n-1}{n} \left\| A \right\|^2 \left\| v \right\|^2.$$

$\square$

No caso de uma função v sobre uma variedade, obtemos a seguinte versão para a desigualdade de Kato

$$|\nabla|\nabla v||^2 \leq |\operatorname{Hess} v\,|.$$

A verificação desta desigualdade é bem simples. Escolha um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ com $|\nabla v| e_1 = \nabla v$. Usaremos a seguinte notação: $v_{ij} = e_j(e_i(v))$. Veja que esta escolha de referencial implica em

$$|\nabla|\nabla v||^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla|\nabla v|, e_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i(|\nabla v|))^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_1(v)))^2 = \sum_{i=1}^{n} v_{1i}^2 \tag{2.7}$$

Assim,

$$|\nabla|\nabla v||^2 = \sum_{i=1}^{n} v_{1i}^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} v_{ij}^2 = |\operatorname{Hess} v\,|^2.$$

No entanto, podemos melhorar esta desigualdade no caso em que a função considerada é harmônica. E assim, obtemos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.2. *Se v é uma função harmônica sobre uma variedade n-dimensional, com $n \geq 2$, então vale*

$$|\nabla|\nabla v||^2 \leq \frac{n-1}{n} |\operatorname{Hess} v\,|^2. \tag{2.8}$$

Demonstração. Poderíamos tentar imitar a prova da Proposição 2.2.1, porém escolhemos uma abordagem mais elementar. Considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal e geodésico em $p \in M$ sobre a variedade com $|\nabla v| e_1 = \nabla v$. Como v é harmônica então, segue que

$$\sum_{i=1}^{n} v_{ii} = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} v) = \Delta v = 0.$$

Por outro lado, usando Cauchy-Schwarz segue

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Hess} v|^2 &\geq v_{11}^2 + 2\sum_{i=2}^{n} v_{1i}^2 + \sum_{i=2}^{n} v_{ii}^2 \\
&\geq v_{11}^2 + 2\sum_{i=2}^{n} v_{1i}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^{n} v_{ii}\right)^2 \\
&= v_{11}^2 + 2\sum_{i=2}^{n} v_{1i}^2 + \frac{1}{n-1}(\Delta v - v_{11})^2 \\
&= \frac{n}{n-1} v_{11}^2 + 2\sum_{i=2}^{n} v_{1i}^2,
\end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade o fato de v ser harmônica. Agora de $n \geq 2$ segue $\dfrac{n}{n-1} \leq 2$ e portanto (2.7) implica em

$$|\operatorname{Hess} v|^2 \geq \frac{n}{n-1}\left(v_{11}^2 + \sum_{i=2}^{n} v_{1i}^2\right) = \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla v||^2.$$

□

Como uma aplicação imediata da desigualdade de Kato podemos encontrar uma desigualdade inspirada na fórmula de Bochner em (2.1).

Proposição 2.2.3. *Seja v uma função harmônica sobre uma variedade n-dimensional, então nos pontos em que $\nabla v \neq 0$ vale*

$$\Delta|\nabla v| \geq \operatorname{Ric}(\nabla v, \nabla v)|\nabla v|^{-1} + \frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla v||^2 |\nabla v|^{-1}. \tag{2.9}$$

Demonstração. Segue da Proposição 2.1.6 que o Laplaciano da função $|\nabla v|$ é dado por

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla v|^2 = |\nabla|\nabla v||^2 + |\nabla v|\Delta|\nabla v|.$$

Por outro lado, usando a fórmula de Bochner (2.1) e que v é harmônica segue que

$$\begin{aligned}
|\nabla|\nabla v||^2 + |\nabla v|\Delta|\nabla v| &= \operatorname{Ric}(\nabla v, \nabla v) + \langle \nabla v, \nabla(\Delta v)\rangle + |\operatorname{Hess} v|^2 \\
&= \operatorname{Ric}(\nabla v, \nabla v) + |\operatorname{Hess} v|^2
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Kato na desiguadaldade acima nos vem

$$|\nabla|\nabla v||^2 + |\nabla v|\Delta|\nabla v| \geq \operatorname{Ric}(\nabla v, \nabla v) + \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla v||^2,$$

ou ainda,

$$|\nabla v|\Delta|\nabla v| \geq \mathrm{Ric}(\nabla v, \nabla v) + \frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla v||^2.$$

Assim, sempre que $|\nabla v| \neq 0$, basta dividirmos esta última desigualdade por este termo para que encontremos a desigualdade (2.9). $\square$

2.3 Imersões isométricas

Denotaremos variedades diferenciais Σ e M de dimensões n e m, respectivamente. Salvo quando mencionado, as variedades serão assumidas conexas. Uma função $f : \Sigma \to M$ é chamada de *imersão* se sua diferencial $df_p : T_p\Sigma \to T_{f(p)}M$ é injetiva para todo $p \in \Sigma$. O número $k = m - n$ é chamado de *codimensão* de f. Usualmente nos referimos a f, ou a $f(\Sigma)$, como uma *subvariedade imersa* de M. Em particular, quando a codimensão da imersão é igual a 1 dizemos que Σ é uma *hipersuperfície* de M.

Definição 2.3.1. Uma imersão $f : \Sigma \to M$ entre variedades Riemannianas com métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ é dita ser *imersão isométrica* se

$$\langle u, v \rangle_\Sigma = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_M \tag{2.10}$$

para todos $p \in \Sigma$ e $u, v \in T_p\Sigma$.

Note que se temos uma imersão então (2.10) nos mostra um jeito de definir uma métrica em Σ a partir de uma métrica de M. Quando isto ocorre, esta nova métrica é chamada de *métrica induzida* por f. Munindo a variedade Σ pela métrica induzida, tornamos f uma imersão isométrica de Σ em M. Por simplicidade denotaremos as métricas de Σ e M por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e portanto deixaremos claro conforme o contexto qual métrica está sendo considerada.

Para cada $p \in \Sigma$ o produto interno do espaço T_pM induz a seguinte decomposição

$$T_pM = T_p\Sigma \oplus (T_p\Sigma)^\perp, \tag{2.11}$$

onde $(T_p\Sigma)^\perp$ denota o complemento ortogonal de $T_p\Sigma$ em T_pM. Isto nos dá uma motivação para estender campos definidos de abertos em Σ a campos definidos localmente em M.

Além disso, se $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de M, então para extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ de X e Y a Σ definindo

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^\top,$$

onde $(\,\cdot\,)^\top$ é a projeção ortogonal de $TM|_\Sigma$ sobre $T\Sigma$, obtemos uma conexão Riemanniana relativa a métrica induzida em Σ, uma prova desse fato pode ser vista em [Net14].

2.3.1 Segunda forma fundamental

Denotaremos a conexão em M por $\overline{\nabla}$ e a conexão em Σ simplesmente por ∇. Dado uma imersão $f : \Sigma \to M$, definimos a *segunda forma fundamental* de f, representada por $\mathrm{I\!I} : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)^{\perp}$, como

$$\vec{\mathrm{I\!I}}(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp} = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y. \tag{2.12}$$

A prova da linearidade e simetria de $\vec{\mathrm{I\!I}}$ é direta, pois temos $\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X = [X,Y]$, onde $[X,Y]$ representa o colchete de Lie.

Se assumirmos que Σ é uma hipersuperfície orientada, com ν sendo o campo normal unitário sobre Σ, podemos também analisar a *segunda forma fundamental escalar* dada por

$$\vec{\mathrm{I\!I}}(X,Y) = \mathrm{I\!I}(X,Y)\nu.$$

Quando não houver risco de confusão, representaremos ambas as aplicações por $\mathrm{I\!I}$.

Um dos principais objetos geométricos tratados neste trabalho é a curvatura média, que definimos agora.

Definição 2.3.2. Se Σ é uma hipersuperfície orientada em M, então a *curvatura média* de Σ é o traço da segunda forma fundamental, ou seja $H = tr\mathrm{I\!I}$. Dizemos que Σ é uma *hipersuperfície mínima* se $H = 0$.

Vamos estabelecer também o *operador forma* A_ξ de f em $p \in \Sigma$, em relação a $\xi \in (T_p\Sigma)^{\perp}$, como segue:

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \mathrm{I\!I}(X,Y), \xi\rangle\,, \tag{2.13}$$

onde X e Y pertencem a $\mathfrak{X}(\Sigma)$.

Vejamos que $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, então

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\right\rangle &= X\langle \xi, Y\rangle - \left\langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\right\rangle = -\left\langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\right\rangle \\ &= \langle \xi, \nabla_X Y + \mathrm{I\!I}(X,Y)\rangle = -\langle \xi, \mathrm{I\!I}(X,Y)\rangle = -\langle A_\xi X, Y\rangle\end{aligned}$$

e disto concluímos que $(\overline{\nabla}_X \xi)^{\top} = -A_\xi X$. Consideremos os campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e denotaremos pelos mesmos símbolos as suas extensões, então temos que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \mathrm{I\!I}(Y,Z)) = \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X \mathrm{I\!I}(Y,Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \mathrm{I\!I}(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X^{\perp} \mathrm{I\!I}(Y,Z) - A_{\mathrm{I\!I}(Y,Z)} X.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Por uma conta análoga obtemos

$$\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + \mathrm{I\!I}(Y, \nabla_X Z) + \nabla_Y^{\perp} \mathrm{I\!I}(X,Z) - A_{\mathrm{I\!I}(X,Z)} Y. \tag{2.15}$$

Temos ainda que

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \mathrm{I\!I}([X,Y], Z). \tag{2.16}$$

Subtraindo (2.15) e (2.16) de (2.14) obtemos

$$\begin{aligned} R_M(X,Y)Z =& R_\Sigma(X,Y)Z + A_{\mathrm{II}(X,Z)}Y - A_{\mathrm{II}(Y,Z)}X + \nabla^\perp_X \mathrm{II}(Y,Z) \\ & - \nabla^\perp_Y \mathrm{II}(X,Z) + \mathrm{II}(X,\nabla_Y Z) - \mathrm{II}(Y,\nabla_X Z) - \mathrm{II}([X,Y],Z) \\ =& R_\Sigma(X,Y)Z + A_{\mathrm{II}(X,Z)}Y - A_{\mathrm{II}(Y,Z)}X + (\nabla^\perp_X \mathrm{II})(Y,Z) - (\nabla^\perp_X \mathrm{II})(X,Z), \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde $(\nabla^\perp_X \mathrm{II})(Y,Z) := \nabla^\perp_X \mathrm{II}(Y,Z) - \mathrm{II}(\nabla_X Y, Z) - \mathrm{II}(Y,\nabla_X Z)$. Tomando as componentes tangenciais e normais obtemos

$$(R_M(X,Y)Z)^\top = R_\Sigma(X,Y)Z + A_{\mathrm{II}(X,Z)}Y - A_{\mathrm{II}(Y,Z)}X \tag{2.18}$$

$$(R_M(X,Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp_X \mathrm{II})(Y,Z) - (\nabla^\perp_X \mathrm{II})(X,Z). \tag{2.19}$$

A expressão (2.18) é comumente referida na literatura como *equação de Gauss*, enquanto a equação (2.19) é reconhecida como a *equação de Codazzi*. Relembrando a definição do operador forma A_ξ segue que $\left\langle A_{\mathrm{II}(X,Z)}Y, W \right\rangle = \langle \mathrm{II}(Y,W), \mathrm{II}(X,Z)\rangle$ para quaisquer campos $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e daí tomando o produto interno com $W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ em (2.17) segue

$$\begin{aligned} \langle R_M(X,Y)Z, W\rangle &= \langle R_\Sigma(X,Y)Z, W\rangle + \left\langle A_{\mathrm{II}(X,Z)}Y - A_{\mathrm{II}(Y,Z)}X, W \right\rangle \\ &= \langle R_\Sigma(X,Y)Z, W\rangle + \langle \mathrm{II}(Y,W), \mathrm{II}(X,Z)\rangle - \langle \mathrm{II}(X,W), \mathrm{II}(Y,Z)\rangle. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Em particular, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são ortogonais e unitários então vale

$$\begin{aligned} \mathrm{Sec}_\Sigma(X,Y) &= \langle R_\Sigma(X,Y)Y, X\rangle \\ &= \langle R_M(X,Y)X, Y\rangle + \langle \mathrm{II}(X,X), \mathrm{II}(Y,Y)\rangle - \langle \mathrm{II}(Y,X), \mathrm{II}(X,Y)\rangle \\ &= \mathrm{Sec}_M(X,Y) + \langle \mathrm{II}(X,X), \mathrm{II}(Y,Y)\rangle - |\mathrm{II}(X,Y)|^2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

As expressões (2.20) e (2.21) são igualmente referidas como as equações de Gauss.

Para o que se segue, representaremos as curvaturas de Ricci, escalar e seccional de uma variedade como Ric, Scal e Sec, respectivamente. Para maior clareza quanto à variedade considerada, adicionaremos o subíndice Σ ou M.

Proposição 2.3.1. *Se $\Sigma \subset M$ é uma superfície de $2-$lados, então*

$$\mathrm{Scal}_M = \mathrm{Scal}_\Sigma + 2\,\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{II}|^2 - H^2. \tag{2.22}$$

Demonstração. Escolha uma base ortonormal $\{e_1,\dots,e_n\}$ para $T_p\Sigma$ de modo a obter uma base ortonormal $\{e_1,\dots,e_n,e_{n+1}=\nu\}$ para T_pM. Segue de (2.20) as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \mathrm{Scal}_M &= \sum_{i,j=1}^{n+1} \langle R_M(e_i,e_j)e_j, e_i\rangle = 2\sum_{i=1}^{n} \langle R_M(\nu,e_i)e_i,\nu\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \langle R_M(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle \\ &= 2\,\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\langle R_\Sigma(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle + |\mathrm{II}(e_i,e_j)|^2 - \langle \mathrm{II}(e_i,e_i), \mathrm{II}(e_j,e_j)\rangle \Big) \\ &= 2\,\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + \mathrm{Scal}_\Sigma + (|\mathrm{II}|^2 - |\mathrm{II}(\nu,\nu)|^2) - (|\vec{H}|^2 - |\mathrm{II}(\nu,\nu)|^2) \\ &= \mathrm{Scal}_\Sigma + 2\,\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) - H^2 + |\mathrm{II}|^2. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.3.2. *Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mínima* 2−*lados. Então*

$$K_\Sigma = \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}_M - \left(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + \frac{1}{2}|\mathrm{II}|^2\right), \tag{2.23}$$

onde K_Σ representa a curvatura gaussiana de Σ .

Demonstração. Visto que Σ é uma superfície mínima, podemos escrever $\mathrm{Scal}_\Sigma = 2K_\Sigma$ e $H = 0$. Ao substituir isso em (2.22) e realizar uma breve manipulação, obtemos a igualdade desejada. □

2.4 Desigualdade de Shiohama-Tanaka

Seja M uma variedade Riemanniana e $\mathrm{dist}_M(x,y)$ a função distância entre x e y em M induzida pela métrica de M. Fixado $p \in M$, o comportamento da função $r(x) = \mathrm{dist}_M(x,p)$ está intimamente relacionado à estrutura do *cut locus* de p. Lembre-se que o cut locus de um ponto $p \in M$ é definido da seguinte forma: para qualquer geodésica γ_u normalizada que emana de p com a direção inicial $u = \gamma_u'(0) \in T_pM$, existe o parâmetro $i_p(u)$ até o qual γ_u é um segmento de geodésica minizante, ou seja, $\gamma_u|_{[0,t]}$ realiza a distância $d(\gamma_u(t),p)$ para $0 < t \leq i_p(u)$. Nos referimos a $\gamma_u(i_p(u))$ como o *ponto mínimo de p* e $i_p(u)$ como a distância de corte até p ao longo de γ_u. Então, o cut locus de p (ou lugar dos pontos mínimos) é definido como

$$\mathrm{Cut}(p) = \{\gamma_u(i_p(u)) \mid u \in T_pM\}.$$

É possível mostrar que q é um ponto mínimo de p ao longo de γ_u se, e somente se, existe outra geodésica minimizante γ_v, com $v \in T_pM$ e $v \neq u$, que emana de p satisfazendo

$$\gamma_u(i_p(u)) = q = \gamma_v(i_p(u)),$$

ou q é um ponto conjugado de p ao longo de γ_u, o que significa que existe um campo de Jacobi (não-trivial) $Y(t)$ ao longo de γ_u com $Y(0) = Y(i_p(u)) = 0$.

Desse modo, se $q \notin \mathrm{Cut}(p) \cap \{p\}$, então r é diferenciável em q e seu vetor de gradiente $\nabla r(q)$ é dado por $\gamma'(L)$, onde γ é a única geodésica minimizante normalizada que une p a q, onde $L = \mathrm{dist}_M(p,q)$ (veja [Sak96, Chapter II]). Em particular, deste resultado obtemos que $|\nabla r| = 1$.

Denotando por $B_p(R) = \{x \in \Sigma; r(x) < R\}$ a bola geodésica com centro em p e raio R em Σ, vamos considerar as funções $L(r) = \int_{\partial B_p(r)} ds$ e $A(r) = \int_{B_p(r)} dA$, que representam, respectivamente, o comprimento do círculo geodésico $\partial B_p(r)$ e a área de $B_p(r)$.

Observe que pela fórmula da co-área segue

$$A(r) = \int_{B_p(r)} dA = \int_0^r \left(\int_{\partial B_p(s)} ds\right) dt = \int_0^r L(t)dt,$$

assim, segue que $A'(r) = L(r)$.

Faremos agora um breve comentário sobre o Laplaciano da função distância. Considere uma hipersuperfície Σ de M, onde M é uma variedade $(n+1)$-dimensional, e uma bola geodésica $B_p(r)$ de Σ. Note que ∇r é um vetor unitário e normal a $\partial B_p(r)$, então isto nos motiva a considerar o referencial $\{\nabla r, e_1, \ldots, e_n\}$ sobre $p \in \Sigma$. Desse modo, utilizando que $|\nabla r| = 1$ segue

$$\begin{aligned}\Delta r = \operatorname{div}(\nabla r) &= \left\langle \nabla r, \overline{\nabla}_{\nabla r}\nabla r\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i}\nabla r\right\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_i, \nabla r\right\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\left\langle \left(\overline{\nabla}_{e_i}e_i\right)^N, \nabla r\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathrm{II}^{\partial B_p(r)}(e_i,e_i), \nabla r\right\rangle = \left\langle H^{\partial B_p(r)}\nabla r, \nabla r\right\rangle = H^{\partial B_p(r)},\end{aligned}$$

onde $\mathrm{II}^{\partial B_p(r)}$ é a segunda forma fundamental de $\partial B_p(r)$ em Σ e $H^{\partial B_p(r)}$ é a sua curvatura média. Em particular, quando $n = 2$, temos $\Delta r = \kappa_g$, onde κ_g denota a curvatura geodésica de $\partial B_p(r)$.

Suponha agora que Σ é uma superfície em uma variedade tridimensional M. Para uma bola geodésica $B_p(R)$ que não possui interseção com a fronteira de Σ ou com o cut locus de p, o Teorema de Stokes e a fórmula da co-área fornecem:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}L(r) &= \frac{d}{dr}\left(\int_{\partial B_p(r)} ds\right) = \frac{d}{dr}\left(\int_{\partial B_p(r)} \langle \nabla r, \nabla r\rangle\, ds\right) \\ &= \frac{d}{dr}\left(\int_{B_p(r)} \Delta r\right) = \int_{\partial B_p(r)} \Delta r = \int_{\partial B_p(r)} \kappa_g.\end{aligned}$$

Desse modo, pelo Teorema de Gauss-Bonnet segue

$$\frac{d}{dr}L(r) = 2\pi\chi(B_p(r)) - \int_{\partial B_p(r)} K_M \leq 2\pi - \int_{\partial B_p(r)} K_M, \tag{2.24}$$

onde K_M denota a curvatura Gaussiana de M. A desigualdade em (2.24) foi primeiramente introduzida na literatura pelo trabalho pioneiro em [Fia41]. Contudo, nos referiremos a esta expressão como *Desigualdade de Shiohama-Tanaka*.

Inspirando-se no artigo [Pog81], apresentaremos mais resultado envolvendo a função comprimento que se revelará crucial para alcançarmos uma das estimativas desejadas.

Proposição 2.4.1. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície mínima, completa, orientável e simplesmente conexa. A função $L(r)$ é convexa e satisfaz*

$$2\pi \leq \frac{L(r)}{r} \leq \frac{L(R)}{R},$$

para todo $0 < r < R$.

Demonstração. Denotando por K_Σ a curvatura Gaussiana de Σ, sabemos por (2.23) que esta quantia é não-positiva uma vez que vale $K_\Sigma = -\frac{1}{2}|\mathrm{II}|^2$. Pelo Teorema de Hadamard, segue que a função exponencial $\exp_p : T_p\Sigma \to \Sigma$ é um difeomorfismo e disso podemos escrever a métrica de Σ utilizando coordenadas polares

$$dr^2 + g(r,\theta)^2 d\theta^2$$

onde $g(r,\theta) > 0$ é suave e satisfaz para todos θ as seguintes igualdades:

$$g(0,\theta) = 0, \qquad g_r(0,\theta) = 1.$$

É bem sabido que a curvatura Gaussiana em (r,θ) pode ser expressa por $K_\Sigma = -\dfrac{g_{rr}}{g}$. Desse modo, $g_{rr}(r,\theta) \geq 0$ e assim $r \mapsto g(r,\theta)$ é uma função convexa. Logo, para todos $r \geq 0$ e θ obtemos

$$\frac{g(r,\theta) - g(0,\theta)}{r - 0} \geq g_r(0,\theta) = 1 \implies g(r,\theta) \geq r.$$

Uma vez que $L(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} g(r,\theta)d\theta$ segue que

$$L(r) \geq 2\pi r \tag{2.25}$$

para todo $r \geq 0$ e ainda ao derivarmos duas vezes sob o sinal de integral segue que $L(r)$ é uma função convexa. Donde, para $0 < r < R$ vale

$$\frac{L(r)}{r} = \frac{L(r) - L(0)}{r - 0} \leq \frac{L(R) - L(0)}{R - 0} = \frac{L(R)}{R}.$$

Juntando a expressão acima com (2.25) segue que

$$2\pi \leq \frac{L(r)}{r} \leq \frac{L(R)}{R},$$

para todo $0 < r < R$. □

2.5 Parabolicidade

Destacamos a seguinte observação: Quando M é uma variedade fechada, podemos considerar $u \in C^\infty(M)$ tal que $u > 0$ e $\Delta u \leq 0$. Vamos definir a função $v = \ln u$, assim, $\nabla v = \dfrac{\nabla u}{u} \leq 0$. Disso segue

$$\begin{aligned}\Delta v = \operatorname{div}(\nabla v) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{u}\right) &= \frac{1}{u}\operatorname{div}(\nabla u) + \left\langle \nabla\left(\frac{1}{u}\right), \nabla u\right\rangle \\ &= \frac{\Delta u}{u} + \left\langle -\frac{\nabla u}{u^2}, \nabla u\right\rangle = \frac{\Delta u}{u} - |\nabla v|^2 \leq -|\nabla v|^2 \leq 0\end{aligned}$$

Em particular,

$$0 \leq \int_M \Delta v \leq -\int_M |\nabla v|^2 \leq 0.$$

Isso implica que u é uma função constante em M. No caso em que M é completa e não compacta, existem exemplos nos quais uma função com Laplaciano não-positivo pode ser constante ou não, ou seja, o espaço das variedades completas pode ser classificado em duas categorias distintas, conforme a seguinte definição.

Definição 2.5.1. Definimos uma função $u \in C^2(M)$ como superharmônica se $\Delta u \leq 0$. A variedade M é dita *parabólica* se toda função positiva e superharmônica em M for constante. Caso contrário, M é dita *não-parabólica*.

O trabalho pioneiro de S. Cheng e S. Yau em [CY75] apresenta um resultado que estabelece uma conexão entre o conceito de parabolicidade e a ordem de crescimento de área. Mais precisamente, nosso interesse está voltado para o seguinte resultado.

Proposição 2.5.1 (S. Cheng e S. Yau, [CY75])**.** *Se Σ é uma variedade completa com crescimento quadrático de área, então Σ é parabólica.*

Demonstração. Suponha que $u \in C^\infty(\Sigma)$ é tal que $u > 0$ e $\Delta u \leq 0$. Vamos considerar a função $v = \ln u$, assim, $\nabla v = \dfrac{\nabla u}{u}$ e disso segue

$$\begin{aligned}\Delta v = \operatorname{div}(\nabla v) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{u}\right) &= \frac{1}{u}\operatorname{div}(\nabla u) + \left\langle \nabla\left(\frac{1}{u}\right), \nabla u\right\rangle \\ &= \frac{\Delta u}{u} + \left\langle -\frac{\nabla u}{u^2}, \nabla u\right\rangle = \frac{\Delta u}{u} - |\nabla v|^2 \leq -|\nabla v|^2 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Considere $f \in C_0^\infty(\Sigma)$. De (2.26) e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz junto com a desigualdade média aritmética-geométrica, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Sigma f^2|\nabla v|^2 \leq -\int_\Sigma f^2\Delta v &= \int_\Sigma 2\left\langle \nabla v, f\nabla f\right\rangle \\ &\leq \int_\Sigma 2|\nabla v||f||\nabla f| \leq \frac{1}{2}\int_\Sigma f^2|\nabla v|^2 + 2\int_\Sigma |\nabla f|^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Sigma f^2|\nabla v| \leq 4\int_\Sigma |\nabla f|^2. \tag{2.27}$$

Fixe $p \in \Sigma$. Denote por $r = \operatorname{dist}_\Sigma(\cdot, p)$ a distância intrínseca a partir de p e faça

$$f = \begin{cases} 1 & \text{se } r^2 \leq R, \\ 2 - \dfrac{\ln r^2}{\ln R} & \text{se } R < r^2 \leq R^2, \\ 0 & \text{se } r^2 > R^2. \end{cases}$$

Observe que, quando $R < r^2 < R^2$, temos $\nabla f = -2(r\ln R)^{-1}\nabla r$ e $\nabla f \equiv 0$ nos demais casos. Além disso, dado que $|\nabla r| \equiv 1$, concluímos $|\nabla f|^2 = 4(r\ln R)^{-2}$. Ao substituirmos a definição da função f em (2.27), obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{B_p(\sqrt{R})} |\nabla v|^2 \leq 4\int_\Sigma |\nabla f|^2 &= \frac{16}{(\ln R)^2}\int_{B_p(R^2)\setminus B_p(R)} r^{-2} \\ &\leq \frac{16}{(\ln R)^2}\sum_{k=\frac{1}{2}\ln R}^{\ln R}\int_{B_p(e^k)\setminus B_p(e^{k-1})} r^{-2} \\ &\leq \frac{16}{(\ln R)^2}\sum_{k=\frac{1}{2}\ln R}^{\ln R}\frac{1}{e^{2(k-1)}}\text{Área}(B_p(e^k)\setminus B_p(e^{k-1})) \\ &\leq \frac{16}{(\ln R)^2}\sum_{k=\frac{1}{2}\ln R}^{\ln R}\frac{1}{e^{2(k-1)}}\cdot Ce^{2k} \leq \frac{8Ce^2}{\ln R}.\end{aligned}$$

Fazendo $R \to \infty$, chegamos à conclusão de que v é constante, assim como u. Portanto, podemos afirmar que Σ é parabólica. $\square$

A proposição que acabamos de demonstrar nos fornece uma compreensão para o fato curioso de que, para espaços Euclidianos, apenas a dimensão 2 não possui funções superharmônicas positivas e não constantes.

3 Variações de área e estabilidade

Neste capítulo, derivaremos a primeira e segunda variações do funcional área associado a uma subvariedade. Isso será fundamental em nossa discussão posterior e também será utilizado em nossos estudos das questões de estabilidade de subvariedades mínimas. Tomamos [Li12] como a referência principal para todo o estudo desse capítulo.

3.1 Primeira variação de área

Sejam Σ^n uma subvariedade de M^m com $n < m$. Consideremos a família a $1-$parâmetro de deformações de Σ dada por $\Sigma_t = \varphi(N, t)$ para $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ com $\Sigma_0 = \Sigma$. Denotando $\{x_1, \ldots, x_n, t\}$ um sistema coordenado de $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ definido numa vizinhança do ponto $(p, 0)$. Ponha $e_i = d\varphi(\partial/\partial x_i)$ para $i = 1, \ldots, n$ e $T = d\varphi(\partial/\partial t)$. A métrica induzida de M em Σ_t é dado por $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Nós iremos assumir que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ forma um sistema coordenado normal em $p \in \Sigma$. Desse modo, temos que $g_{ij}(p, 0) = \delta_{ij}$ e $\nabla_{e_i} e_j(p, 0) = 0$.

Podemos ainda associar a métrica induzida ao elemento de área dA_t de N_t. Daí para t suficientemente pequeno podemos escrever $dA_t = J(x, y) dA_0$. Veja que com respeito ao sistema de coordenadas normal considerado a função $J(x, t)$ é dada por

$$J(x, t) = \frac{\sqrt{g(x, t)}}{\sqrt{g(x, 0)}},$$

onde $g(x, t) = \det(g_{ij}(x, t))$.

Para derivarmos a fórmula da primeira variação de área para Σ, nosso foco está em calcular a primeira derivada de $J(x, t)$ com relação a t. Como estamos assumindo que $g_{ij}(p, 0) = \delta_{ij}$ então segue

$$J'(p, 0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J(p, t) = \frac{1}{2} g'(p, 0).$$

Levando em consideração um pequeno resultado sobre determinantes que pode ser visto em [Lim81]:

Lema 3.1.1. *Seja $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^{n^2}$ um caminho diferenciável com $f(0) = I$. Definindo a função $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ por $g(t) = \det f(t)$ temos que g é diferenciável e $g'(0) = \operatorname{tr}(f'(0))$.*

Usando o Lema 3.1.1 junto com o fato de $\{x_1, \ldots, x_n, t\}$ ser um sistema de coordenadas para $\Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ imediatamente obtemos

$$g'(p, 0) = \sum_{i=1}^{n} g'_{ii} = \sum_{i=1}^{n} T \langle e_i, e_i \rangle = 2 \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_T e_i, e_i \rangle = 2 \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} T, e_i \rangle .$$

Escrevendo $T = T^t + T^n$, onde T^t e T^n são, respectivamente, as componentes tangenciais e normais de T, nos vem que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} T, e_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} T^t, e_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} T^n, e_i \rangle \\ &= \operatorname{div}(T^t) + \sum_{i=1}^{n} e_i \langle T^n, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle T^n, \nabla_{e_i} e_i \rangle \\ &= \operatorname{div}(T^t) + \left\langle T^n, \vec{H} \right\rangle,\end{aligned}$$

onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média de Σ. Então acabamos de estabelecer a seguinte igualdade

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{(p,0)} dA_t = \left(\operatorname{div}(T^t) + \left\langle T^n, \vec{H} \right\rangle\right) dA_0\Big|_{(p,0)}. \tag{3.1}$$

Se T é um campo com suporte compacto, então segue do Teorema da Divergência que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \text{Área}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma} \left\langle T^n, \vec{H} \right\rangle. \tag{3.2}$$

A equação (3.2) é conhecida como *fórmula da primeira variação de área* e dela decorre facilmente que a curvatura média de Σ é identicamente nula se, e somente se, Σ é um ponto crítico para o funcional área. Dito isto, definiremos o nosso principal objeto de estudo neste trabalho.

A fórmula da primeira variação nos dá uma interessante curiosidade quando o ambiente se torna o espaço Euclideano $\mathbb{R}^n$. Mostraremos dois desses fatos, outros podem ser consultados em [CM11]. Primeiramente vejamos o seguinte lema.

Lema 3.1.2. *Considere $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ como uma hipersuperfície e $\overline{f} : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se restringirmos $\overline{f}$ a Σ, denotando essa restrição como $f := \overline{f}\big|_{\Sigma}$, então a seguinte relação é válida:*

$$\Delta_M \overline{f} = \Delta_\Sigma f - \left\langle \overline{\nabla} f, \vec{H} \right\rangle + (\operatorname{Hess}_M f)(\nu, \nu), \tag{3.3}$$

onde $\vec{H}$ é o vetor curvatura média, e Δ_M e Δ_Σ representam respectivamente os operadores Laplacianos de M e Σ.

Demonstração. Nesta demonstração denotaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão de M enquanto que ∇ representa a conexão de Σ. Considere um referencial ortonormal adaptado $\{e_1, \ldots, e_n, \nu\}$ de M. Uma vez que $\overline{\nabla} \bar{f} = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla} f, e_i \right\rangle e_i + \left\langle \overline{\nabla} f, \nu \right\rangle \nu$, então segue

$$\Delta_M \bar{f} = \operatorname{div}_M(\overline{\nabla} f) = \sum_{i=1}^{n} \left(e_i(e_i(f)) - \left\langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle\right) + \left(\nu(\nu(f)) - \left\langle \overline{\nabla} \bar{f}, \overline{\nabla}_\nu \nu \right\rangle\right). \tag{3.4}$$

Observe ainda que para i fixado temos

$$\begin{aligned} e_i(e_i(f)) - \left\langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle &= e_i(e_i(f)) - \left\langle \nabla_{e_i} e_i + \mathrm{II}(e_i, e_i)\nu, \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j + \nu(f)\nu \right\rangle \\ &= e_i(e_i(f)) - \left\langle \nabla_{e_i} e_i, \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j \right\rangle - \mathrm{II}(e_i, e_i)\nu(f) \\ &= e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle - \left\langle \overline{\nabla} f, \mathrm{II}(e_i, e_i)\nu \right\rangle. \end{aligned}$$

Decorre da definição do hessiano de uma função as seguintes igualdades

$$(\mathrm{Hess}_M\, f)(\nu, \nu) = \left\langle \overline{\nabla}_\nu \overline{\nabla} \bar{f}, \nu \right\rangle = \nu \left\langle \overline{\nabla} \bar{f}, \nu \right\rangle - \left\langle \overline{\nabla} \bar{f}, \overline{\nabla}_\nu \nu \right\rangle = \nu(\nu(f)) - \left\langle \overline{\nabla}_\nu \nu, \overline{\nabla} \bar{f} \right\rangle.$$

Aplicando as duas expressões acima em (3.4) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_M \bar{f} &= \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle) - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla} \bar{f}, \mathrm{II}(e_i, e_i)\nu \right\rangle + (\mathrm{Hess}_M\, f)(\nu, \nu) \\ &= \Delta_\Sigma f - \left\langle \overline{\nabla} \bar{f}, \vec{H} \right\rangle + (\mathrm{Hess}_M\, f)(\nu, \nu). \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração. □

Proposição 3.1.1. *$\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é mínima se, e somente se, as funções coordenadas de $\mathbb{R}^n$ são funções harmônicas em Σ.*

Demonstração. De fato, para ver isto vamos denotar por $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ as funções coordenadas do $M = \mathbb{R}^{n+1}$. Além disso denotaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão de M enquanto que ∇ representa a conexão de Σ. Assim $\overline{\nabla} x_i = e_i$ é o $i-$ésimo campo coordenado de M, em particular $\nabla x_i \neq 0$. Temos ainda que $\Delta_M x_i = 0$ e para quaisquer campos X e Y vale

$$(\mathrm{Hess}_M\, x_i)(X, Y) = \left\langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} x_i, Y \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X e_i, Y \right\rangle = 0.$$

Relembrando (3.3), a saber,

$$\Delta_M x_i = \Delta_\Sigma x_i - \left\langle \nabla x_i, \vec{H} \right\rangle + (\mathrm{Hess}_M\, x_i)(\nu, \nu)$$

a afirmação segue imediatamente. □

Proposição 3.1.2. *Seja Σ uma hipersuperfície mínima 2-lados de $\mathbb{R}^{n+1}$, onde ν denota o campo normal unitário. Fixado um vetor $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, vale*

$$\Delta \langle a, \nu \rangle + |\mathrm{II}|^2 \langle a, \nu \rangle = 0. \tag{3.5}$$

Demonstração. Pela Proposição 2.1.5 ao tomarmos um referencial geodésico $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em torno de $p \in M$ podemos calcular o Laplaciano da função $\langle a, \nu \rangle$ do seguinte modo

$$\Delta \langle a, \nu \rangle = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i \langle a, \nu \rangle) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle a, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} \nu \right\rangle, \tag{3.6}$$

onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então nos resta mostrar que $\sum_{i=1}^{n}\left\langle a, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\nu\right\rangle = -|\mathrm{II}|^2\left\langle a,\nu\right\rangle$. Para tal, note primeiramente que ao derivarmos $|\nu|^2 = 1$ encontramos $\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nu, \nu\right\rangle = 0$ e $\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\nu, \nu\right\rangle = -\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nu, \overline{\nabla}_{e_i}\nu\right\rangle$, assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\nu, \nu\right\rangle &= -\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nu, \overline{\nabla}_{e_i}\nu\right\rangle = -\sum_{i,j,k=1}^{n}\left\langle \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nu, e_j\right\rangle e_j, \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nu, e_k\right\rangle e_k\right\rangle \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nu, e_j\right\rangle^2 = -|\mathrm{II}|^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Além disso, ao derivarmos duas vezes a expressão $\langle \nu, e_k\rangle = 0$ temos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\nu, e_k\right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nu, \overline{\nabla}_{e_i}e_k\right\rangle = -\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nu, \overline{\nabla}_{e_i}e_k\right\rangle - \left\langle \nu, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}e_k\right\rangle. \tag{3.8}$$

De $\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\nu, \nu\right\rangle = 0$ podemos afirmar que $\overline{\nabla}_{e_i}\nu$ não possui componente normal e de $(\overline{\nabla}_{e_i}e_j(p))^{\top} = \nabla_{e_i}e_j(p) = 0$ vemos que $\overline{\nabla}_{e_i}e_j$ não possui componente tangencial, logo, segue de (3.8)

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\nu, e_k\right\rangle(p) &= -\left\langle \nu, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}e_k\right\rangle(p) \\ &= -\left\langle \nu, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_k}e_i\right\rangle = \left\langle \nu, \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_i}e_i\right\rangle(p), \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde foi usado na última igualdade que $\mathbb{R}^{n+1}$ é flat. Relembre que Σ sendo mínima temos $\sum\left\langle \nu, \overline{\nabla}_{e_i}e_i\right\rangle = H = 0$ e ao derivarmos segue

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle \nu, \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_i}e_i\right\rangle = -\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_k}\nu, \overline{\nabla}_{e_i}e_i\right\rangle \tag{3.10}$$

Decorre de (3.9) e (3.10)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\nu, e_k\right\rangle(p) &= -\sum_{i=1}^{n}\left\langle \nu, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_k}e_i\right\rangle(p) = -\sum_{i=1}^{n}\left\langle \nu, \overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_i}e_i\right\rangle(p) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{e_k}\nu, \overline{\nabla}_{e_i}e_i\right\rangle(p) = 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

para todo $k = 1, \ldots, n$. Por fim, retornaremos à equação (3.6) para concluir que

$$\begin{aligned}\Delta\left\langle a,\nu\right\rangle(p) &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle a, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\nu\right\rangle(p) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \left\langle a,\nu\right\rangle\nu + \sum_{k=1}^{n}\left\langle a, e_k\right\rangle e_k, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\nu\right\rangle(p) \\ &= \left\langle a,\nu\right\rangle\sum_{i=1}^{n}\left\langle \nu, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\nu\right\rangle(p) = -|\mathrm{II}|^2\left\langle a,\nu\right\rangle(p). \end{aligned}$$

Como p é arbitrário, a equação (3.5) segue. □

3.2 Segunda variação de área

Observamos que uma subvariedade Σ de uma variedade Riemanniana M é mínima quando é um ponto crítico do funcional área. Contudo, ser ponto crítico desse funcional não implica que Σ minimize o volume em M. Uma maneira de atacar este problema é investigando o comportamento da segunda derivada do funcional volume, como faremos a seguir.

Iremos agora voltar nossa atenção para a segunda variação de área. Seja $\varphi : \Sigma \times (-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ uma família a $2-$parâmetros de variações de Σ. Continuaremos escrevendo $d\varphi(\partial/\partial x_i) = e_i$ para $i = 1,\dots,n$, e denotaremos os campos variacionais por $d\varphi(\partial/\partial t) = T$ e $d\varphi(\partial/\partial s) = S$.

Veja que nossa abordagem prévia nos mostra que num sistema de coordenadas podemos escrever

$$\frac{\partial J}{\partial t}(x,t,s) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left\langle \nabla_{e_i} T, e_j \right\rangle J(x,t,s), \tag{3.12}$$

onde (g^{ij}) denota a matriz inversa de (g_{ij}). Derivando a equação (3.12) com respeito a s e aplicando no ponto (p,0,0) nos vem que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 J}{\partial s \partial t} &= \sum_{i,j=1}^{n} \Big[(Sg^{ij}) \left\langle \nabla_{e_i} T, e_j \right\rangle J + g^{ij} \left(S \left\langle \nabla_{e_i} T, e_j \right\rangle \right) J + g^{ij} \left\langle \nabla_{e_i} T, e_j \right\rangle S(J) \Big] \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (Sg^{ij}) \left\langle \nabla_{e_i} T, e_j \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} S \left\langle \nabla_{e_i} T, e_j \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} T, e_j \right\rangle \sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} S, e_j \right\rangle . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ao derivar a identidade $\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij}$ encontramos $\sum_{k=1}^{n} (Sg^{ik}) g_{kj} = -\sum_{k=1}^{n} (Sg_{kj})$ e assim encontramos

$$\begin{aligned} Sg^{ij} &= \sum_{k,l=1}^{n} (Sg^{ik}) g_{kl} g^{lj} = -\sum_{k,l=1}^{n} g^{ik} (Sg_{kl}) g^{lj} = -Sg_{ij} = -S \left\langle e_i, e_j \right\rangle \\ &= -\left\langle \nabla_S e_i, e_j \right\rangle - \left\langle e_i, \nabla_S e_j \right\rangle = -\left\langle \nabla_{e_i} S, e_j \right\rangle - \left\langle \nabla_{e_j} S, e_i \right\rangle . \end{aligned} \tag{3.14}$$

e ainda temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} S \left\langle \nabla_{e_i} T, e_i \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left\langle \nabla_S \nabla_{e_i} T, e_i \right\rangle + \left\langle \nabla_{e_i} T, \nabla_S e_i \right\rangle \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left\langle R(S,e_i)T, e_i \right\rangle + \left\langle \nabla_{e_i} \nabla_S T, e_i \right\rangle + \left\langle \nabla_{e_i} T, \nabla_{e_i} S \right\rangle \right] . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Aplicando as equações (3.14) e (3.15) em (3.13) nós concluímos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial s \partial t} =& -\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} S, e_j \right\rangle \left\langle \nabla_{e_i} T, e_j \right\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_j} S, e_i \right\rangle \left\langle \nabla_{e_i} T, e_j \right\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \left\langle R(S,e_i)T, e_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} \nabla_S T, e_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} T, \nabla_{e_i} S \right\rangle \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} T, e_j \right\rangle \sum_{j=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i} S, e_j \right\rangle . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Para simplificar a equação (3.16), consideraremos agora que ambos os campos variacionais são idênticos e ortogonais a Σ, resultando no seguinte:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 J}{\partial t^2}\right|_{t=0} &= -\sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} T, e_j\rangle^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_j} T, e_i\right\rangle \langle \nabla_{e_i} T, e_j\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle R(T,e_i)T, e_i\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}\nabla_T T, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} |\nabla_{e_i} T|^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} T, e_j\rangle\right)^2 \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} T, e_j\rangle^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_j} T, e_i\right\rangle \langle \nabla_{e_i} T, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,T)T, e_i\rangle \\
&\quad + \operatorname{div}(\nabla_T T)^t + \left\langle (\nabla_T T)^n, \vec{H}\right\rangle + \sum_{i=1}^{n} |\nabla_{e_i} T|^2 + \left\langle T, \vec{H}\right\rangle^2. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Em contrapartida, ao contemplarmos o conjunto de vetores ortogonais $\{e_{n+1}, \dots, e_m\}$ que são perpendiculares a Σ em M obtemos, em virtude disso,

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 J}{\partial t^2}\right|_{t=0} &= -\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle T, \vec{\mathrm{II}}_{ij}\right\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,T)T, e_i\rangle + \operatorname{div}(\nabla_T T)^t \\
&\qquad + \left\langle (\nabla_T T)^n, \vec{H}\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{m} \langle \nabla_{e_i} T, e_k\rangle^2 + \left\langle T, \vec{H}\right\rangle^2.
\end{aligned} \qquad (3.18)$$

Assim, a *fórmula segunda variação de área*, relacionada a variações normais com suporte compacto, é expressa por

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \text{Área}(\Sigma_t) &= \int_\Sigma \left\{ -\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle T, \vec{\mathrm{II}}_{ij}\right\rangle^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,T)T, e_i\rangle + \left\langle (\nabla_T T)^n, \vec{H}\right\rangle \right\} \\
&\quad + \int_\Sigma \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{m} \langle \nabla_{e_i} T, e_k\rangle^2 + \left\langle T, \vec{H}\right\rangle^2 \right),
\end{aligned} \qquad (3.19)$$

onde $\vec{II}_{ij}$ denota a segunda forma fundamental com valores no fibrado normal de Σ.

Podemos simplificar ainda mais a fórmula (3.19) ao considerar que Σ é uma subvariedade mínima orientada de codimensão 1 e que M é orientada, pois qualquer variação normal é da forma $T = \psi\nu$, onde ψ é uma função suave de suporte compacto em Σ e ν é o campo unitário normal definido sobre Σ. Então a *segunda variação de área* pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \text{Área}(\Sigma_t) &= \int_\Sigma \left\{ -\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle T, \vec{\mathrm{II}}_{ij}\right\rangle - \operatorname{Ric}_M(T,T) + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} T, \nu\rangle^2 \right\} \\
&= \int_\Sigma \left\{ -\psi^2 |\mathrm{II}|^2 - \psi^2 \operatorname{Ric}_M(\nu,\nu) + |\nabla\psi|^2 \right\}, \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

onde II é a segunda forma fundamental de Σ e $\operatorname{Ric}_M(\nu,\nu)$ é a curvatura de Ricci de M avaliada sobre o vetor ν que é normal a Σ.

3.3 Estabilidade de hipersuperfícies mínimas

Definição 3.3.1. Uma subvariedade mínima é considerada *estável* se, para variações com suporte compacto, a seguinte condição é satisfeita:

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \text{Área}(\Sigma_t) \geq 0.$$

Por esse motivo, no contexto de hipersuperfícies orientáveis, a estabilidade é equivalente à validação da seguinte desigualdade:

$$\int_\Sigma \left(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{I\!I}|^2\right) f^2 \leq \int_\Sigma |\nabla f|^2, \tag{3.21}$$

para qualquer $f \in C_0^\infty(\Sigma)$. A desigualdade (3.21) é conhecida por *desigualdade de estabilidade*.

Observamos ainda que o conceito de estabilidade está intimamente relacionado ao *operador de estabilidade* (também conhecido como *operador de Jacobi*), expresso como

$$L = \Delta + \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{I\!I}|^2. \tag{3.22}$$

A justificativa para essa conexão reside na seguinte observação

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \text{Área}(\Sigma_t) &= \int_\Sigma |\nabla\psi|^2 - \left(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{I\!I}|^2\right)\\ &= -\int_\Sigma \psi\left(\Delta\psi + \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)\psi + |\mathrm{I\!I}|^2\psi\right) = -\int_\Sigma \psi L\psi.\end{aligned}$$

Há um critério interessante para estabilidade que relaciona este conceito com a existência de uma função positiva que anule o operador estabilidade. De forma mais precisa, o seguinte resultado é válido.

Proposição 3.3.1. *Considere Σ uma hipersuperfície mínima 2-lados, L seu operador de estabilidade e um conjunto $\Omega \subset \Sigma$ aberto. Se existir uma função $u > 0$ sobre Ω de modo que $Lu = 0$, então Ω é estável.*

Demonstração. Considere $u > 0$ tal que $Lu = 0$. Assim, $\Delta u = -\Big(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{I\!I}|^2\Big)u$ e fica bem definida a função $w = \ln u$. Desse modo, $\nabla w = \dfrac{\nabla u}{u}$ e usando Proposição 2.1.4 segue

$$\begin{aligned}\Delta w = \mathrm{div}(\nabla w) = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{u}\right) &= \frac{1}{u}\mathrm{div}(\nabla u) + \left\langle \nabla\left(\frac{1}{u}\right), \nabla u\right\rangle\\ &= \frac{\Delta u}{u} - |\nabla w|^2 = -\left(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{I\!I}|^2\right) - |\nabla w|^2.\end{aligned}$$

Seja f uma função de suporte compacto sobre Ω. Usando a identidade acima, temos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f^2\left(|\mathrm{I\!I}|^2 + \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)\right) + \int_\Omega f^2|\nabla w|^2 &= -\int_\Omega f^2\Delta w = \int_\Omega 2f\langle\nabla f, \nabla w\rangle\\ &\leq \int_\Omega 2|f||\nabla f||\nabla w| \leq \int_\Omega f^2|\nabla w|^2 + \int_\Omega |\nabla f|^2,\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde nos dois últimos passos utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade das médias aritmética-geométrica. Finalmente, observe que (3.23) é equivalente à desigualdade de estabilidade e, dado que essa condição é válida para qualquer função f, conclui-se que Ω é estável. $\square$

Corolário 3.3.1. *Gráficos mínimos de $\mathbb{R}^{n+1}$ são estáveis.*

Demonstração. Basta considerar o caso em que $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$. Desse modo temos que um vetor normal e unitário ao gráfico de f é dado por

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1 \right).$$

Escolhendo o vetor $v = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, segue que

$$\langle N, v \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} > 0.$$

Desse modo, função $u = \langle N, v \rangle$ é estritamente positiva e além disso pela Proposição 3.1.2 temos que $\Delta u + |\mathrm{I\!I}|^2 u = 0$, assim o resultado segue da Proposição 3.3.1. $\square$

Teorema 3.1 (Teorema de Bernstein)**.** *Gráficos mínimos inteiros em $\mathbb{R}^3$ são planares.*

É bem sabido que o Teorema de Bernstein ainda é válido em $\mathbb{R}^{n+1}$ se, e somente se, $2 \leq n \leq 7$. Dessa forma, o Corolário 3.3.1 serve como estímulo para investigar se o Teorema de Bernstein pode ser generalizado de modo a incluir superfícies estáveis. Em outras palavras, isso equivale a buscar uma caracterização das superfícies mínimas completas e estáveis em $\mathbb{R}^3$, ou até mesmo em $\mathbb{R}^{n+1}$.

O resultado afirmativo para esta questão foi obtida em 1979 por M. do Carmo e C. Peng através da publicação do artigo [dCP79]. No ano seguinte, D. Fischer-Colbrie e R. Schoen apresentaram uma nova demonstração do mesmo resultado em [FCS80]. Em 1981, A. Pogorelov repetiu esse feito no artigo [Pog81]. Nas discussões a seguir, apresentaremos uma prova para este teorema.

Teorema 3.2 (M. do Carmo e C. Peng, [dCP79])**.** *A única superfície mínima orientada, completa e estável em $\mathbb{R}^3$ é o plano.*

Ao assumirmos que alguma curvatura do ambiente é limitada inferiormente, podemos empregar a desigualdade de estabilidade para obter informações geométricas relevantes sobre a variedade em análise. Exemplos simples de resultados que surgem dessa perspectiva são os seguintes:

Teorema 3.3 (J. Simons, [Sim68])**.** *Se M^{n+1} possui $\mathrm{Ric}_M > 0$, então não existem hipersuperfícies mínimas estáveis fechadas de 2-lados. Se $\mathrm{Ric}_M \geq 0$, então qualquer hipersuperfície mínima estável e 2-lados é totalmente geodésica e satisfaz $\mathrm{Ric}_M(\nu, \nu) \equiv 0$.*

Demonstração. Tomando $f = 1$ da desigualdade de estabilidade encontraremos

$$\int_\Sigma \left(|\mathrm{II}|^2 + \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)\right) \leq \int_\Sigma |\nabla f|^2 = 0.$$

No caso em que temos $\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) \geq 0$ o integrando do lado esquerdo é não-negativo, então este deve ser nulo. Portanto, podemos concluir que Σ é totalmente geodésica e $\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) \equiv 0$. Entretanto, surge uma situação impossível ao considerarmos $\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) > 0$. □

Teorema 3.4 (Schoen–Yau, [SY79])**.** *Seja Σ uma superfície mínima estável fechada e 2-lados imersa numa 3-variedade que possui curvatura escalar positiva. Então, Σ é homeomorfo a uma esfera.*

Demonstração. Após uma manipulação da expressão encontrada no Corolário 2.3.2

$$K_\Sigma = \frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}_M - \left(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + \frac{1}{2}|\mathrm{II}|^2\right),$$

e aplicar $f = 1$ na desigualdade de estabilidade nós obtemos

$$0 \geq \int_\Sigma \left(|\mathrm{II}|^2 + \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)\right) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \left(\mathrm{Scal}_M + |\mathrm{II}|^2 - 2K_\Sigma\right)$$

Daí, segue do Teorema de Gauss-Bonnet que

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma (\mathrm{Scal}_M + |\mathrm{II}|^2) \leq \int_\Sigma K_\Sigma = 2\pi\chi(\Sigma). \tag{3.24}$$

Como estamos assumindo que $\mathrm{Scal}_M > 0$ isto implica que $\chi(\Sigma) > 0$. Nesse caso, temos que Σ é homeomorfa a uma esfera $\mathbb{S}^2$. □

Corolário 3.3.2. *Seja $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície mínima estável fechada, 2-lados e de gênero $g \neq 0$ em uma 3-variedade com curvatura escalar não-negativa. Então Σ é totalmente geodésica em M, possui gênero $g = 1$ e Scal_M se anula em Σ.*

Demonstração. Ao utilizar a condição $\mathrm{Scal}_M \geq 0$ na equação (3.24), podemos inferir que $\chi(\Sigma) \geq 0$. Dessa forma, como $\chi(\Sigma) = 2(1-g)$ e sabemos que $g \neq 0$, concluímos que $g = 1$. Isso implica que $\chi(\Sigma) = 0$, e ao empregar novamente a equação (3.24), deduzimos que tanto a curvatura escalar Scal_M quanto a norma da segunda forma fundamental $|\mathrm{II}|$ se anulam em Σ. Em particular, concluímos que Σ é totalmente geodésica. □

A seguir, investigaremos como a estabilidade de superfícies mínimas pode ser um recurso valioso na obtenção de estimativas para a área de bolas geodésicas. Apresentaremos a seguir uma adaptação de um resultado original de T. Colding e W. Minicozzi, este pode ser consultado em [CMI02, Theorem 2.1].

Teorema 3.5 (Colding–Minicozzi, [CMI02])**.** *Fixe $s > 0$ e considere uma variedade Σ e uma bola geodésica $B_p(s)$, centrada em p e de raio s, que não intersecta o bordo de Σ. Suponha que o operador $J = \Delta + V - cK_\Sigma$, onde $c > 1/2$, é tal que $-J$ é não-negativo. Então,*

$$\frac{1}{s^2}A(s) + \frac{1}{2c-1}\int_{B_p(s)} \left(1 - \frac{r}{s}\right)^2 V \leq \frac{2\pi c}{2c-1}, \tag{3.25}$$

onde $A(s)$ denota a área da bola geodésica $B_p(s)$ e $r = dist_\Sigma(\cdot, p)$ é a distância intrínseca a partir de p.

Demonstração. Denote $K(r) = \int_{B_p(r)} K_\Sigma$ e $L(r) = \int_{\partial B_p(r)} ds$. Relembre a desigualdade de Shiohama-Tanaka

$$L'(r) \leq 2\pi\chi(B_p(r)) - K(r) \leq 2\pi - K(r). \tag{3.26}$$

Considere f uma função suave com suporte compacto, onde $f(s) = 0$ para o mesmo $s > 0$ do enunciado. Integrando por partes nos vem que

$$0 \leq -\int_{B_p(s)} fJ(f) = \int_{B_p(s)} \left(|\nabla f|^2 - Vf^2 + cf^2K\right)$$

e daí

$$\int_{B_p(s)} Vf^2 \leq \int_{B_p(s)} \left(|\nabla f|^2 + cf^2K\right). \tag{3.27}$$

Note que pela fórmula da co-área temos

$$\int_{B_p(s)} |\nabla f|^2 = \int_0^s (f'(r))^2 L(r)dr \tag{3.28}$$

$$\int_{B_p(s)} f^2K = \int_0^s f^2(r)K'(r)dr = -\int_0^s (f^2(r))'K(r)dr. \tag{3.29}$$

Vale ressaltar que integração por partes foi aplicada na última integral acima, levando em consideração o fato de que a função f se anula em s. Aplicando (3.26), (3.28) e (3.29) em (3.27) segue

$$\begin{aligned}
\int_{B_p(s)} f^2V &= \int_0^s (f'(r))^2L(r)dr + c\int_0^s (f^2(r))'K(r)dt \\
&\leq \int_0^s (f'(r))^2L(r)dr - c\int_0^s (f^2(r))'(2\pi - L'(r))dr \\
&= \int_0^s (f'(r))^2L(r)dr + 2\pi cf^2(0) + c\int_0^s (f^2(r))'L'(r)dr. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Escolha a função $f(r) = 1 - \frac{t}{r}$, donde temos $f(0) = 1$, $(f'(r))^2 = 1/s^2$ e $(f^2(r))' = \frac{2}{s}\left(\frac{r}{s} - 1\right)$. Donde (3.30) resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{B_p(s)} f^2V &\leq \int_0^s (f'(r))^2L(r)dr + 2\pi cf^2(0) + c\int_0^s (f^2(r))'L'(r)dr \\
&= \frac{1}{s^2}\int_0^s L(r)dr + 2\pi c + \frac{2c}{s}\int_0^s \left(\frac{r}{s} - 1\right)L'(r)dr \\
&= \frac{1}{s^2}A(s) + 2\pi c + \frac{2c}{s}\int_0^s \left(\frac{r}{s} - 1\right)L'(r)dr. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Ora, a última integral da expressão acima por ser calculada como se segue

$$\frac{2c}{s}\int_0^s \left(\frac{r}{s} - 1\right)L'(r)dr = \frac{2c}{s}\left[\left(\frac{r}{s} - 1\right)L(r)\right]_0^s - \frac{2c}{s}\int_0^s \frac{L(r)}{s}dr = -\frac{2c}{s^2}A(s).$$

Disso concluímos que (3.31) é equivalente a seguinte desigualdade

$$\int_{B_p(s)} \left(1 - \frac{r}{s}\right)^2 V \leq \frac{1 - 2c}{s^2}A(s) + 2\pi c.$$

Manipulando a expressão acima obtemos a equação desejada. $\square$

Observe que no resultado anterior, não impusemos nenhuma condição sobre as curvaturas da variedade ambiente. Ao introduzirmos essa restrição, passamos a obter implicações notáveis para nossos estudos.

Mais precisamente, estamos interessados na ordem de uma variedade Σ. Esta quantidade é definida como o menor número $\Theta = \Theta(\Sigma)$ tal que o limite $\liminf_{r\to\infty} \frac{A(r)}{r^\Theta}$ é finito. Em particular, quando $\Theta = 2$ dizemos que Σ possui crescimento de área quadrático.

Corolário 3.3.3. *Seja Σ uma superfície mínima estável orientada em uma 3-variedade M com curvatura escalar não negativa, então Σ possui crescimento de área quadrático.*

Demonstração. Suponha que $\operatorname{Scal}_M \geq 0$ e tome $c = 1$ e $V = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Scal}_M + |\mathrm{I\!I}|^2\right) \geq 0$, assim, consideremos o operador

$$J = \Delta + V - cK_\Sigma = \Delta + \frac{1}{2}\left(\operatorname{Scal}_M + |\mathrm{I\!I}|^2\right) - K_\Sigma. \tag{3.32}$$

Por outro lado, a equação de Gauss em (2.23) nos mostra que

$$K_\Sigma + \frac{1}{2}|\mathrm{I\!I}|^2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Scal}_M + |\mathrm{I\!I}|^2\right) - \left(\operatorname{Ric}(\nu,\nu) + \frac{1}{2}|\mathrm{I\!I}|^2\right).$$

Após uma manipulação algébrica simples, vemos que

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{Scal}_M + |\mathrm{I\!I}|^2\right) - K_\Sigma = \operatorname{Ric}(\nu,\nu) + |\mathrm{I\!I}|^2$$

Portanto, deduzimos a partir de (3.32) que o operador J coincide com o operador de estabilidade de Σ, o qual, como já sabemos, é não-negativo. Conforme estabelecido pelo Teorema 3.5, para $s > 0$ e $c > 1/2$, temos que

$$\frac{A(s)}{s^2} \leq \frac{A(s)}{s^2} + \frac{1}{2c-1}\int_{B_p(s)} \left(1 - \frac{r}{s}\right)^2 V \leq \frac{2\pi c}{2c-1}.$$

Donde concluímos que

$$A(s) \leq Cs^2,$$

onde $C = \frac{2\pi c}{2c-1}$. Portanto, Σ possui crescimento de área quadrático. $\square$

Conforme mencionado no início desta seção, apresentaremos agora uma prova do célebre Teorema Do Carmo-Peng, Teorema 3.2, expressando-o no seguinte resultado.

Corolário 3.3.4. *Seja Σ uma superfície mínima estável, 2-lados e completa em uma 3-variedade M com curvatura escalar nula. Então Σ possui crescimento quadrático de área e $\int_\Sigma |\mathrm{I\!I}|^2 < \infty$. Caso $M = \mathbb{R}^3$, concluímos que Σ é um plano.*

Demonstração. A primeira afirmação segue do Corolário 3.3.3. Fixe $s > 0$ e escolha r de modo que $0 < r < s$. Nesse caso, temos a seguinte relação: $1 - \frac{r}{2s} > \frac{1}{2}$. Observe agora que

$$\frac{1}{4}\int_{B_p(s)} |\mathrm{I\!I}|^2 \leq \int_{B_p(s)} \left(1 - \frac{r}{2s}\right)^2 |\mathrm{I\!I}|^2 \leq \int_{B_p(2s)} \left(1 - \frac{r}{2s}\right)^2 |\mathrm{I\!I}|^2.$$

De acordo com o Teorema 3.5, concluímos que a última integral é finita para todo $s > 0$. Portanto, utilizando que Σ é completa, podemos afirmar que $\int_\Sigma |\mathrm{II}|^2 < \infty$. Já para o que resta, consideremos M como o espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$. Usando a minimalidade de Σ obtemos que $K_\Sigma = -\dfrac{1}{2}|\mathrm{II}|^2$ e disso segue que a superfície possui curvatura total finita, isto é, $-\int_\Sigma K_\Sigma < \infty$. Ao integrarmos $L'(r) \leq 2\pi - \int_{B_p(r)} K_\Sigma$ seguimos com

$$L(s) \leq \int_0^s L'(r)\,dr = \int_0^s (2\pi - K(r))\,dr \leq Cr,$$

onde $K(r) = \int_{B_p(r)} K_\Sigma$. Defina a função teste

$$f(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } r \leq 1, \\ 1 - \dfrac{\ln r}{\ln s} & \text{se } 1 \leq r \leq s, \\ 0 & \text{se } r \geq s. \end{cases}.$$

Desse modo,

$$\int_{B_p(s)} |\nabla f|^2 \leq \frac{1}{(\ln s)^2}\int_1^s \frac{L(r)}{r^2}dr \leq \frac{1}{(\ln s)^2}\int_1^s \frac{Cr}{r^2}dr = \frac{C}{\ln s}$$

Pela desigualdade de estabilidade em $\mathbb{R}^3$ obtemos

$$\int_{B_p(1)} |\mathrm{II}|^2 = \int_{B_p(1)} |\mathrm{II}|^2 f^2 \leq \int_{B_p(s)} |\mathrm{II}|^2 f^2 \leq \int_{B_p(s)} |\nabla f|^2 \leq \frac{C}{\ln s}$$

Fazendo $s \to \infty$ concluímos que $|\mathrm{II}| = 0$ em $B_p(1)$. Portanto, como p é arbitrário segue que Σ é um plano. $\square$

4 Estimativas de área

Neste capítulo, buscamos extrair informações geométricas de uma hipersuperfície a partir de restrições sobre as curvaturas da variedade ambiente. Essa é a motivação que conduz a primeira parte do artigo [MSW23], cujos autores são Ovidiu Munteanu, Chiung-Jue Anna Sung e Jiaping Wang. Este artigo serviu como a principal referência para o desenvolvimento do presente trabalho.

Seguindo as mesmas linhas do artigo citado, iniciaremos com as estimativas de área para uma bola geodésica sobre uma hipersuperfície mínima estável. Naturalmente, para estabelecer nosso método, iniciaremos com o ambiente Euclidiano e pretendemos usar argumentos análogos para estender a técnica apresentada para o caso de uma 3-variedade.

4.1 Fórmulas integrais

Durante este capítulo assumiremos que Σ é uma superfície mínima estável de uma $3-$variedade M. Fixe $p \in M$. Denote por $r(x) = \mathrm{dist}_\Sigma(x,p)$ a distância intrínseca em Σ e $B_p(R) = \{x \in \Sigma; r(x) < R\}$ a bola geodésica de centro em p e raio R em Σ. Além disso, iremos denotar por $L(r) = \int_{\partial B_p(r)} ds$ e $A(r) = \int_{B_p(r)} dA$ o comprimento do círculo geodésico $\partial B_p(r)$ e a área de $B_p(r)$, respectivamente.

Lema 4.1.1. *Seja Σ uma superfície mínima estável em uma $3-$variedade M. Suponha que $B_p(R)$ não intersecte o cut locus de p em Σ ou o bordo de Σ. Assuma ainda que $\varphi = \varphi(r)$ é uma função Lipschitz, não-crescente em $[0,R]$ com $\varphi(R) = 0$.*

(a) Se a curvatura escalar de M satisfaz $\mathrm{Scal}_M \geq -6\alpha$ para algum $\alpha \geq 0$, então

$$-2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)L'(r)dr \leq 2\pi\varphi^2(0) + \int_{B_p(R)} (\varphi')^2 + 3\alpha \int_{B_p(R)} \varphi^2. \tag{4.1}$$

(b) Se a curvatura seccional de M satisfaz $Sec_M \geq -\alpha$ para algum $\alpha \geq 0$, então

$$-4\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)L'(r)dr \leq 4\pi\varphi^2(0) + \int_{B_p(R)} (\varphi')^2 + 4\alpha \int_{B_p(R)} \varphi^2. \tag{4.2}$$

Demonstração. Considere $0 < r < R$. Relembre a desigualdade de Shiohama-Tanaka:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}L(r) &= \frac{d}{dr}\left(\int_{\partial B_p(r)} ds\right) = \int_{\partial B_p(r)} \kappa_g \\ &= 2\pi\chi(B_p(r)) - \int_{B_p(r)} K_\Sigma dA \leq 2\pi - \int_{B_p(r)} K_\Sigma dA, \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde K_Σ denota a curvatura Gaussiana de Σ.

(a) Assuma que $\mathrm{Scal}_M \geq -6\alpha$, para algum $\alpha \geq 0$. Segue de (2.23) que a curvatura gaussiana de Σ satisfaz

$$K_\Sigma = \frac{1}{2}\mathrm{Scal}_M - \left(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + \frac{1}{2}|\mathrm{II}|^2\right) \geq -3\alpha - \left(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{II}|^2\right).$$

Daí, por (4.3) obtemos

$$\begin{aligned} L'(r) &\leq 2\pi + \int_{B_p(r)} \left(3\alpha + \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{II}|^2\right) \\ &= 2\pi + 3\alpha A(r) + \int_{B_p(r)} \left(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{II}|^2\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Multiplicando (4.4) por $-2\varphi(r)\varphi'(r) \geq 0$ e integrando sobre o intervalo $[0,R]$ segue

$$\begin{aligned} -2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)L'(r)dr \leq 2\pi\varphi^2(0) &- 6\alpha \int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)A(r)dr \\ &- 2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)\left(\int_{B_p(r)} \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{II}|^2\right) dr \end{aligned} \tag{4.5}$$

Perceba que ao aplicarmos integração por partes a qualquer função $f(r)$ com a condição $f(0) = 0$, obtemos a seguinte igualdade

$$-2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)f(r)dr = -\left[\varphi^2(r)f(r)\right]_0^R + \int_0^R \varphi^2(r)f'(r)dr = \int_0^R \varphi^2(r)f'(r)dr \tag{4.6}$$

Multiplique (4.6) por 3α e considere $f(r) = A(r)$, assim, pela fórmula da co-área obtemos

$$\begin{aligned} -6\alpha \int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)A(r)dr &= 3\alpha \int_0^R \varphi^2(r)A'(r)dr \\ &= 3\alpha \int_0^R \varphi^2(r)L(r)dr = 3\alpha \int_{B_p(R)} \varphi^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

De modo similar, podemos aplicar (4.6) para a função $f(r) = \int_{B_p(r)} \left(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{II}|^2\right)$ e novamente pelo uso da fórmula da co-área seguimos com

$$\begin{aligned} -2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)\left(\int_{B_p(r)} \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{II}|^2\right) dr &= \int_0^R \varphi^2(r)\left(\int_{\partial B_p(r)} \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{II}|^2\right) dr \\ &= \int_{B_p(R)} \left(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) + |\mathrm{II}|^2\right)\varphi^2 \\ &\leq \int_{B_p(R)} (\varphi')^2, \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde no último passo de (4.8) foi utilizada a desigualdade de estabilidade. Concluímos de (4.5), (4.7) e (4.8) que

$$-2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)L'(r)dr \leq 2\pi\varphi^2(0) + 3\alpha \int_{B_p(R)} \varphi^2 + \int_{B_p(R)} (\varphi')^2.$$

E assim fica demonstrado o primeiro item.

(b) Assuma que $\mathrm{Sec}_M \geq -\alpha$. Tome um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \nu\}$, assim a curvatura escalar é dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{Scal}_M &= \mathrm{Ric}_M(e_1, e_1) + \mathrm{Ric}_M(e_2, e_2) + \mathrm{Ric}_M(\nu, \nu)\\ &= 2(R^M_{1221} + R^M_{2332} + R^M_{1331}) = 2R^M_{1221} + 2\,\mathrm{Ric}_M(\nu, \nu)\end{aligned}$$

e substituindo em (2.23) obtemos

$$K_\Sigma = \frac{1}{2}\mathrm{Scal}_M - \left(\mathrm{Ric}_M(\nu, \nu) + \frac{1}{2}|\mathrm{I\!I}|^2\right) = R^M_{1221} - \frac{1}{2}|\mathrm{I\!I}|^2,$$

logo,

$$-2K_\Sigma \leq 2\alpha + |\mathrm{I\!I}|^2. \tag{4.9}$$

Usando a desigualdade de Shiohama-Tanaka em (4.3) nós encontramos

$$2L'(r) \leq 4\pi - 2\int_{B_p(r)} K_\Sigma \leq 4\pi + 2\alpha A(r) + \int_{B_p(r)} |\mathrm{I\!I}|^2.$$

Multiplicando por $-2\varphi(r)\varphi'(r) \geq 0$ e integrando sobre $[0, R]$ obtemos

$$\begin{aligned}-4\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)L'(r)dr \leq 4\pi\varphi^2(0) &- 4\alpha\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)A(r)dr\\ &- 2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)\left(\int_{B_p(r)} |\mathrm{I\!I}|^2\right)dr.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ora, de $\mathrm{Sec}_M \geq -\alpha$ segue $\mathrm{Ric}_M(\nu, \nu) = \mathrm{Sec}_M(\nu, e_1) + \mathrm{Sec}_M(\nu, e_2) \geq -2\alpha$ e ainda a igualdade em (4.7) nos mostra que

$$-2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)\left(\int_{B_p(r)} \mathrm{Ric}_M(\nu, \nu)\right)dr \geq 4\alpha\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)A(r)dr = -2\alpha\int_{B_p(R)} \varphi^2.$$

Note ainda que $\mathrm{Ric}_M(\nu, \nu) \geq -2\alpha$ implica $\mathrm{Scal}_M \geq -6\alpha$, então vale a expressão (4.8), donde podemos concluir a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}-2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)\left(\int_{B_p(r)} |\mathrm{I\!I}|^2\right)dr &= 2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)\left(\int_{B_p(r)} \mathrm{Ric}_M(\nu, \nu)\right)dr\\ &\quad - 2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)\left(\int_{B_p(r)} \mathrm{Ric}_M(\nu, \nu) + |\mathrm{I\!I}|^2\right)dr\\ &\leq 2\alpha\int_{B_p(R)} \varphi^2 + \int_{B_p(R)} (\varphi')^2.\end{aligned}$$

Combinando a expressão acima com (4.10) decorre

$$\begin{aligned}-4\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)L'(r)dr &\leq 4\pi\varphi^2(0) - 4\alpha\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)A(r)dr - 2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)\left(\int_{B_p(r)} |\mathrm{I\!I}|^2\right)dr\\ &= 4\pi\varphi^2(0) + 2\alpha\int_{B_p(R)} \varphi^2 - 2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)\left(\int_{B_p(r)} |\mathrm{I\!I}|^2\right)dr\\ &\leq 4\pi\varphi^2(0) + 4\alpha\int_{B_p(R)} \varphi^2 + \int_{B_p(R)} (\varphi')^2,\end{aligned}$$

isto completa a demonstração deste lema. $\square$

Corolário 4.1.1. *Seja Σ uma superfície mínima estável em uma $3-$variedade M. Suponha que $B_p(R)$ não intersecte o cut locus de p em Σ ou o bordo de Σ. Assuma ainda que $\varphi = \varphi(r)$ é uma função Lipschitz, não-crescente em $[0, R]$ com $\varphi(R) = 0$.*

(a) Se a curvatura escalar de M satisfaz $\mathrm{Scal}_M \geq -6\alpha$ para algum $\alpha \geq 0$, então

$$\int_{B_p(R)} (\varphi')^2 + 2\int_{B_p(R)} \varphi\varphi'' \leq 2\pi\varphi^2(0) + 3\alpha \int_{B_p(R)} \varphi^2. \tag{4.11}$$

(b) Se a curvatura seccional de M satisfaz $Sec_M \geq -\alpha$ para algum $\alpha \geq 0$, então

$$3\int_{B_p(R)} (\varphi')^2 + 4\int_{B_p(R)} \varphi\varphi'' \leq 4\pi\varphi^2(0) + 4\alpha \int_{B_p(R)} \varphi^2. \tag{4.12}$$

Demonstração. Por simplicidade manteremos as mesmas notações do Lema 4.1.1. Veja que utilizando integração por partes nós obtemos

$$\begin{aligned}
-2\int_0^R \varphi(r)\varphi'(r)L'(r)dr &= -2\Big[\varphi(r)\varphi'(r)L(r)\Big]_0^R + 2\int_0^R \Big(\varphi(r)\varphi''(r) + (\varphi')^2(r)\Big) L(r)dr \\
&= 2\int_{B_p(R)} \Big(\varphi\varphi'' + (\varphi')^2\Big).
\end{aligned}$$

Então no caso em que $\mathrm{Scal}_M \geq -6\alpha$, onde $\alpha \geq 0$, a desigualdade (4.1) implica que

$$2\int_{B_p(R)} \Big(\varphi\varphi'' + (\varphi')^2\Big) \leq 2\pi\varphi^2(0) + \int_{B_p(R)} (\varphi')^2 + 3\alpha\int_{B_p(R)} \varphi^2,$$

ou ainda,

$$\int_{B_p(R)} (\varphi')^2 + 2\int_{B_p(R)} \varphi\varphi'' \leq 2\pi\varphi^2(0) + 3\alpha \int_{B_p(R)} \varphi^2.$$

Por razões análogas, quando $\mathrm{Sec}_M \geq -\alpha$, onde $\alpha \geq 0$, a desigualdade (4.2) nos conduz a

$$4\int_{B_p(R)} \Big(\varphi\varphi'' + (\varphi')^2\Big) \leq 4\pi\varphi^2(0) + \int_{B_p(R)} (\varphi')^2 + 4\alpha\int_{B_p(R)} \varphi^2,$$

o que é equivalente à seguinte desigualdade:

$$3\int_{B_p(R)} (\varphi')^2 + 4\int_{B_p(R)} \varphi\varphi'' \leq 4\pi\varphi^2(0) + 4\alpha \int_{B_p(R)} \varphi^2.$$

Assim, a demonstração do corolário está concluída. □

4.2 Estimativa de área em $\mathbb{R}^3$

Ao considerarmos o cenário em que o ambiente M é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, podemos empregar o Lema 4.1.1 e o Corolário 4.1.1 para derivar a primeira estimativa de área para superfícies mínimas estáveis.

Teorema 4.1. *Seja Σ uma superfície mínima estável em $\mathbb{R}^3$. Então existe uma constante universal $R_0 > 0$ tal que para uma bola geodésica $B_p(R)$ que não se intersecta com o bordo de Σ ou o cut locus de p, valem*

$$L(r) \leq 2\pi r \left(1 + \frac{10}{\ln R}\right)$$

e

$$A(r) \leq \pi r^2 \left(1 + \frac{10}{\ln R}\right)$$

para todo $r \leq \sqrt{R}$ e $R \geq R_0$. Em particular, se Σ é completa, então $A(r) \leq \pi r^2$ para todo $r > 0$.

Demonstração. Como $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima e as curvaturas de $\mathbb{R}^3$ são nulas, então podemos tomar $\alpha = 0$ em (4.12), isto é, vale

$$3\int_{B_p(R)} (\varphi')^2 + 4\int_{B_p(R)} \varphi\varphi'' \leq 4\pi\varphi^2(0) \tag{4.13}$$

para toda função de classe C^2 não-crescente em $[0, R]$ com $\varphi(R) = 0$. Daí, para a função

$$\varphi(r) = \ln(R+1) - \ln(r+1),$$

nos vem que a desigualdade em (4.13) se torna

$$3\int_{B_p(R)} \frac{1}{(r+1)^2} + 4\int_{B_p(R)} \frac{\ln(R+1) - \ln(r+1)}{(r+1)^2} \leq 4\pi \ln^2(R+1).$$

Donde decorre

$$\int_{B_p(R)} \frac{\ln(R+1) - \ln(r+1)}{(r+1)^2} \leq \pi \ln^2(R+1). \tag{4.14}$$

Relembre que a Proposição 2.4.1 nos mostra que

$$2\pi \leq \frac{L(r)}{r} \leq \frac{L(R)}{R} \tag{4.15}$$

para todo $0 < r < R$. Vamos assumir por contradição que vale

$$\frac{L(r)}{r} > 2\pi\left(1 + \frac{10}{\ln(R+1)}\right) \tag{4.16}$$

para todo $r \in [\sqrt{R}, R]$. De (4.14) nós obtemos

$$\begin{aligned}\pi \ln^2(R+1) &\geq \int_0^R \frac{\ln(R+1) - \ln(r+1)}{(r+1)^2} L(r)dr \\ &= 2\pi\int_0^R \frac{\ln(R+1) - \ln(r+1)}{(r+1)^2} rdr + \int_0^R \frac{\ln(R+1) - \ln(r+1)}{(r+1)^2}(L(r) - 2\pi r)dr\end{aligned} \tag{4.17}$$

Veja que (4.16) é equivalente a $L(r) - 2\pi r > \dfrac{20\pi r}{\ln(R+1)}$. Substituindo em (4.17) temos como consequência

$$\pi \ln^2(R+1) \geq 2\pi\int_0^R \frac{\ln(R+1) - \ln(r+1)}{(r+1)^2} rdr + \frac{20\pi}{\ln(R+1)}\int_{\sqrt{R}}^R \frac{\ln(R+1) - \ln(r+1)}{(r+1)^2} rdr. \tag{4.18}$$

No entanto, integrando a primeira integral do lado direito de (4.18)

$$\begin{aligned}
2\pi\int_0^R \frac{\ln(R+1)-\ln(r+1)}{(r+1)^2}rdr &= 2\pi\ln(R+1)\int_0^R \frac{r}{(r+1)^2}dr - 2\pi\int_0^R\frac{\ln(r+1)}{(r+1)^2}rdr\\
&= 2\pi\ln(R+1)\int_0^R \frac{r}{(r+1)^2}dr\\
&\quad + 2\pi\int_0^R \frac{1}{r+1}\left(\ln(r+1)+\frac{r}{r+1}\right)dr\\
&= -2\pi\ln(R+1)+\pi\ln^2(R+1)+2\pi-\frac{2\pi}{R+1}\\
&\geq -2\pi\ln(R+1)+\pi\ln^2(R+1)
\end{aligned}$$

e substituindo em (4.18) segue

$$2\pi\ln(R+1) \geq \frac{20\pi}{\ln(R+1)}\int_{\sqrt{R}}^R \frac{\ln(R+1)-\ln(r+1)}{(r+1)^2}rdr. \tag{4.19}$$

Usando novamente integração por parte computamos

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{R}}^R \frac{\ln(R+1)-\ln(r+1)}{(r+1)^2}rdr &= \ln\left(\frac{\sqrt{R}+1}{R+1}\right)\left[\ln(\sqrt{R}+1)\frac{1}{1+\sqrt{R}}\right]\\
&\quad + \frac{1}{2}\ln^2(R+1) - \frac{1}{2}\ln^2(\sqrt{R}+1) + \frac{1}{\sqrt{R}+1} - \frac{1}{R+1}\\
&\geq \frac{1}{9}\ln^2(R+1),
\end{aligned}$$

para todo $R > R_0 \approx 116,824$. Ressalta-se que a desigualdade acima foi verificada por meio de métodos computacionais. Voltando em (4.19) encontramos

$$2\pi\ln(R+1) > \frac{20\pi}{\ln(R+1)}\cdot\frac{1}{9}\ln^2(R+1) = \frac{10}{9}\cdot 2\pi\ln(R+1)$$

o que é uma contradição. Portanto deve existir $r_0 \in [\sqrt{R}, R]$ tal que

$$\frac{L(r_0)}{r_0} \leq 2\pi\left(1+\frac{10}{\ln(R+1)}\right).$$

Daí para $r < \sqrt{R}$ segue de (4.15)

$$\frac{L(r)}{r} \leq \frac{L(r_0)}{r_0} \leq 2\pi\left(1+\frac{10}{\ln(R+1)}\right).$$

Portanto fica demonstrado a estimativa de comprimento e após integração segue prontamente a estimativa de área.

No caso em que Σ é completo, as estimativas obtidas são verdadeiras para todos os valores de R no recobrimento universal de Σ. Dito isto, seguem $L(r) \leq 2\pi r$ e $A(r) \leq \pi r^2$ para todo $r > 0$. $\square$

É importante salientar que ao selecionarmos a função linear $\varphi(r) = R - r$ na equação (4.13), obtemos imediatamente a seguinte estimativa, também encontrada por A. Pogorelov em [Pog81]:

$$A(r) \leq \frac{4\pi}{3}r^2.$$

Esta era a melhor estimativa conhecida até a publicação do artigo [MSW23]. Alternativamente, é possível derivar essa mesma estimativa utilizando o método apresentado em [CM04, Corollary 1.7]. Veja que se $B_p(r)$ é disjunta do cut locus de p, então integrando duas vezes a expressão $L'(t) - 2\pi \leq -\int_{B_p(t)} K_\Sigma$ obtemos

$$A(R) - \pi R^2 = -\int_0^R \int_0^t \left(\int_{B_p(s)} K_\Sigma \right) ds dt. \tag{4.20}$$

Definindo as funções $f(t) = \int_0^t \left(\int_{B_p(s)} |\mathrm{II}|^2 \right) ds$ e $g(t) = (R-t)^2$, é imediato verificar que $f(0) = f'(0) = 0$ e que $g(R) = g'(R) = 0$. Assim, após utilizarmos integração por partes, segue

$$\begin{aligned} \int_0^R f(t)g''(t)dt &= [f'(t)g(t)]_0^R - \int_0^R f'(t)g'(t)dt = -\int_0^R f'(t)g'(t)dt \\ &= -[f(t)g'(t)]_0^R + \int_0^R f(t)g''(t)dt = \int_0^R f(t)g''(t)dt. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Então, (4.21) e a fórmula da co-área implicam em

$$\begin{aligned} \int_{B_p(r)} (R-r)^2 |\mathrm{II}|^2 &= \int_0^R (R-t)^2 \left(\int_{\partial B_p(t)} |\mathrm{II}|^2 \right) dt \\ &= \int_0^R f''(t)g(t)dt = \int_0^R f(t)g''(t)dt \\ &= 2\int_0^R \int_0^t \left(\int_{B_p(s)} |\mathrm{II}|^2 \right) dsdt. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Como Σ é uma superfície mínima vale $K_\Sigma = -\frac{1}{2}|\mathrm{II}|^2$, então de (4.20) e (4.22) obtemos

$$\begin{aligned} 4\left(A(R) - \pi R^2\right) &= 2\int_0^R \int_0^t \left(\int_{B_p(s)} |\mathrm{II}|^2 \right) dsdt = \int_{B_p(r)} (R-r)^2 |\mathrm{II}|^2 \\ &\leq \int_{B_p(R)} |\nabla (R-r)|^2 = A(R), \end{aligned}$$

onde a desigualdade de estabilidade foi utilizada no último passo. Reorganizando os termos, obtemos a desigualdade desejada.

4.3 Estimativa de área em 3-variedades

Agora vamos considerar um ambiente um pouco mais geral. Neste caso obtemos o seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Seja $B_p(R)$ uma bola geodésica numa superfície mínima estável Σ em uma 3-variedade M. Assuma que $B_p(R)$ não intersecta o bordo de Σ ou o cut locus de p em Σ.*

(a) Se a curvatura escalar M satisfaz $\mathrm{Scal}_M \geq -6$, então

$$A(R) \leq C_1 e^{2R}$$

para alguma constante absoluta $C_1 > 0$.

(b) Se a curvatura sectional de M satisfaz $Sec_M \geq -1$, então

$$A(R) \leq C_1 e^{\frac{4}{\sqrt{7}}R}$$

para alguma constante absoluta $C_1 > 0$.

Demonstração. O primeiro caso a ser considerado será $\mathrm{Sec}_M \geq -1$. Assim, pelo Lema 4.1.1 temos para qualquer função não-crescente, Lipschitz $\varphi = \varphi(r)$ sobre $[0,t]$ com $\varphi(t) = 0$,

$$-4\int_0^t \varphi(r)\varphi'(r)L'(r)dr \leq 4\pi\varphi^2(0) + \int_{B_p(t)} (\varphi')^2 + 4\int_{B_p(t)} \varphi^2, \tag{4.23}$$

para algum $R > t > 0$. Por simplicidade, denotaremos $a = \frac{4}{\sqrt{7}}$. Considere $\varphi(r) = e^{-(a/2)r}\psi(r)$, onde $\psi = \psi(r)$ é uma função não-crescente, Lipschitz tal que $\psi(t) = 0$, para algum $t > 0$. Desse modo, imediatamente obtemos

$$\begin{aligned}(\varphi')^2 &= \frac{a^2}{4}e^{-ar}\psi^2 - ae^{-ar}\psi\psi' + e^{-ar}(\psi')^2 = \left(\frac{a^2}{4}\psi^2 - a\psi\psi' + (\psi')^2\right)e^{-ar}\\ -4\varphi\varphi' &= 2ae^{-ar}\psi^2 - 4e^{-ar}\psi\psi' = \left(2a\psi^2 - 4\psi\psi'\right)e^{-ar}.\end{aligned}$$

Portanto, o lado esquerdo de (4.23) pode ser expresso do seguinte modo

$$-4\int_0^t \varphi(r)\varphi'(r)L'(r)dr = 2a\int_0^t e^{-ar}\psi^2(r)L'(r)dr - 4\int_0^t e^{-ar}\psi(r)\psi'(r)L'(r)dr.$$

Mas como,

$$\begin{aligned}2a\int_0^t e^{-ar}\psi^2(r)L'(r)dr &= \left[2ae^{-ar}\psi^2(r)L(r)\right]_0^t + \int_0^t \left(2a^2\psi^2(r) - 4a\psi(r)\psi'(r)\right)e^{-ar}L(r)dr\\ &= \int_{B_p(t)} \left(2a^2\psi^2 - 4a\psi\psi'\right)e^{-ar}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Aplicando (4.23) nos vem que

$$\begin{aligned}\int_{B_p(t)} \left(2a^2\psi^2 - 4\psi\psi'\right)e^{-ar} - 4\int_0^t e^{-ar}\psi(r)\psi'(r)L'(r)dr &= -4\int_{B_p(t)} \varphi(r)\varphi'(r)L'(r)dr\\ &\leq 4\pi\varphi^2(0) + \int_{B_p(t)} (\varphi')^2 + 4\int_{B_p(t)} \varphi^2\\ &= 4\pi\psi^2(0) + \int_{B_p(t)} \left(\frac{a^2}{4}\psi^2 - a\psi\psi' + (\psi')^2\right)e^{-ar} + 4\int_{B_p(t)} e^{-ar}\psi^2.\end{aligned}$$

Reordenando os termos acima obtemos

$$\begin{aligned}-4\int_{B_p(t)} e^{-ar}\psi(r)\psi'(r)L'(r)dr &\leq 4\pi\psi^2(0) + \frac{16-7a^2}{4}\int_{B_p(t)} e^{-ar}\psi^2 + \int_{B_p(t)} e^{-ar}(\psi')^2\\ &\quad + (4-a)\int_{B_p(t)} e^{-ar}\psi\psi'.\\ &= 4\pi\psi^2(0) + \int_{B_p(t)} e^{-ar}(\psi')^2 + (4-a)\int_{B_p(t)} e^{-ar}\psi\psi'.\end{aligned}$$

Por fim, usando que $a = \frac{4}{\sqrt{7}} \geq 1$, segue $4 - a \leq 3a$, concluindo assim que

$$-4\int_0^t e^{-ar}\psi(r)\psi'(r)L'(r)dr \leq 4\pi\psi^2(0) + \int_{B_p(t)} e^{-ar}(\psi')^2 + 3a\int_{B_p(t)} e^{-ar}\psi\psi'. \tag{4.25}$$

Para $\eta \in \mathbb{R}$ com $0 < \eta < R$ e $\eta \leq t$, defina

$$\psi(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } r \leq t - \eta, \\ \dfrac{t-r}{\eta} & \text{se } r \in (t-\eta, t), \\ 0 & \text{se } r \geq t. \end{cases} \tag{4.26}$$

Então de (4.25) obtemos

$$\frac{4}{\eta}\int_{t-\eta}^{t} e^{-ar}\psi(r)L'(r)dr \leq 4\pi + \frac{1}{\eta^2}\int_{B_p(t)\setminus B_p(t-\eta)} e^{-ar} - \frac{3a}{\eta}\int_{B_p(t)\setminus B_p(t-\eta)} \psi e^{-ar}. \tag{4.27}$$

Veja que integrando por partes a primeira integral na desigualdade (4.27) nos vem

$$\begin{aligned} \frac{4}{\eta}\int_{t-\eta}^{t} e^{-ar}\psi(r)L'(r)dr &= \left[e^{-ar}\psi(r)L(r)\right]_{t-\eta}^{t} - \frac{4}{\eta}\int_{t-\eta}^{t}(-ae^{-ar}\psi(r) + e^{-ar}\psi'(r))L(r)dr \\ &= -\frac{4}{\eta}e^{-a(t-\eta)}L(t-\eta) + \frac{4a}{\eta}\int_{t-\eta}^{t} e^{-ar}\psi(r)L(r)dr + \frac{4}{\eta}\int_{t-\eta}^{t} e^{-ar}L(r)dr \\ &= -\frac{4}{\eta}e^{-a(t-\eta)}L(t-\eta) + \frac{4a}{\eta}\int_{B_p(t)\setminus B_p(t-\eta)} e^{-ar}\psi + \frac{4}{\eta^2}\int_{B_p(t)\setminus B_p(t-\eta)} e^{-ar}. \end{aligned}$$

Acompanhando a desigualdade em (4.27), concluímos que

$$\frac{3}{\eta^2}\int_{B_p(t)\setminus B_p(t-\eta)} e^{-ar} + \frac{7a}{\eta}\int_{B_p(t)\setminus B_p(t-\eta)} \psi e^{-ar} \leq 4\pi + \frac{4}{\eta}e^{-a(t-\eta)}L(t-\eta) \tag{4.28}$$

para todo $0 < \eta \leq t < R$. Pondo $t = \eta$, obtemos

$$\frac{3}{t^2}\int_{B_p(t)} e^{-ar} \leq 4\pi$$

e isto implica em

$$e^{-at}A(t) = \int_{B_p(t)} e^{-at} \leq \int_{B_p(t)} e^{-ar} \leq \frac{4\pi}{3}t^2,$$

ou ainda,

$$A(t) \leq \frac{4\pi}{3}t^2 e^{at} \tag{4.29}$$

para todo $t \leq R$. A conclusão de nossa argumentação baseia-se no uso da seguinte afirmação:

Afirmação 4.3.1. *Existe uma constante* $\Lambda > 0$ *tal que para todo* τ *e* s *satisfazendo* $0 < 2\tau \leq s < R - 3\tau$,

$$\int_{B_p(s)\setminus B_p(s-\tau)} e^{-ar} \leq \Lambda\tau + \frac{\Lambda}{\tau}\int_{B_p(s-\tau)\setminus B_p(s-2\tau)} e^{-ar}. \tag{4.30}$$

Prova da Afirmação. Veja que subtraindo $\frac{3\tau}{2}$ na desigualdade $0 < 2\tau \leq s < R - 3\tau$ obtemos $\frac{\tau}{2} \leq s - \frac{3\tau}{2} < R - \frac{9\tau}{2}$ e ao definir $\eta = 4\tau$ e $T = s - \frac{3\tau}{2}$ nos vem que $\frac{\eta}{8} \leq T < R - \frac{9\eta}{8}$. Utilizando o Teorema do Valor Médio para a função $f(t) = \int_{B_p(t)} e^{-ar} = \int_0^t e^{-ar}L(r)dr$ existe $\xi \in (T - \frac{\eta}{8}, T + \frac{\eta}{8})$ satisfazendo

$$\int_{B_p(T+\frac{\eta}{8})\setminus B_p(T-\frac{\eta}{8})} e^{-ar} = f'(\xi)\left[\left(T + \frac{\eta}{8}\right) - \left(T - \frac{\eta}{8}\right)\right] = \frac{\eta}{4}e^{-a\xi}L(\xi). \tag{4.31}$$

Denote por $t = \xi + \eta \in \left(T + \frac{7\eta}{8}, T + \frac{9\eta}{8}\right)$. Partindo da definição da função ψ em (4.26) segue

$$\int_{B_p(t)\setminus B_p(t-\eta)} \psi e^{-ar} \geq \frac{1}{2}\int_{B_p(t-\frac{\eta}{2})\setminus B_p(t-\eta)} e^{-ar} \geq \frac{1}{2}\int_{B_p(T+\frac{3\eta}{8})\setminus B_p(T+\frac{\eta}{8})} e^{-ar}. \tag{4.32}$$

Multiplicando a desigualdade acima por $\frac{7a}{\eta}$ e usando (4.28) junto com (4.31) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{7a}{\eta}\int_{B_p(T+\frac{3\eta}{8})\setminus B_p(T+\frac{\eta}{8})} e^{-ar} &\leq \frac{7a}{\eta}\int_{B_p(t)\setminus B_p(t-\eta)} \psi e^{-ar}\\ &\leq 4\pi + \frac{4}{\eta}L(t-\eta)e^{-a(t-\eta)}\\ &= 4\pi + \frac{16}{\eta^2}\int_{B_p(T+\frac{\eta}{8})\setminus B_p(T-\frac{\eta}{8})} e^{-ar}.\end{aligned}$$

E assim existe $\Lambda > 0$ tal que

$$\int_{B_p(T+\frac{3\eta}{8})\setminus B_p(T+\frac{\eta}{8})} e^{-ar} \leq \Lambda\eta + \frac{\Lambda}{\eta}\int_{B_p(T+\frac{\eta}{8})\setminus B_p(T-\frac{\eta}{8})} e^{-ar} \tag{4.33}$$

Por fim, substituindo $\eta = 4\tau$ e $s = T + \frac{3\tau}{2}$ em (4.33) verificamos a afirmação feita. □

Para $s \geq 6\Lambda$, pondo $\tau = 2\Lambda$ e interando (4.30) $m = \left\lfloor \frac{s}{2\Lambda}\right\rfloor - 2$ vezes

$$\int_{B_p(s)\setminus B_p(s-2\Lambda)} e^{-ar} \leq 2\Lambda^2\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^m}\int_{B_p(6\Lambda)} e^{-ar},$$

como a série acima é convergente quando $m \to \infty$, segue de (4.29) para $s \in (6\Lambda, R-6\Lambda)$ e alguma constante C_2 tal que

$$\int_{B_p(s)\setminus B_p(s-2\Lambda)} e^{-ar} \leq C_2. \tag{4.34}$$

Fazendo uso do Teorema do Valor Médio concluímos que existe $\xi \in (R-14\Lambda, R-16\Lambda)$

$$\int_{B_p(R-14\Lambda)\setminus B_p(R-16\Lambda)} e^{-ar} = 2\Lambda e^{-a\xi}L(\xi). \tag{4.35}$$

Aplicando (4.34) com $s = R - 14\Lambda$ segue de (4.35)

$$L(R-\eta)e^{-a(R-\eta)} \leq C_3$$

para alguma constante C_3, onde $\eta = R - \xi \in (14\Lambda, 16\Lambda)$. Agora, repetindo o argumento, de (4.28) segue

$$\frac{3}{\eta^2}\int_{B_p(R)\setminus B_p(R-\eta)} e^{-ar} \leq 4\pi + \frac{4}{\eta}L(R-\eta)e^{-a(R-\eta)} \leq C_4.$$

Já que estamos considerando $r \leq R$, segue

$$\frac{3}{\eta^2}e^{-aR}\int_{B_p(R)\setminus B_p(R-\eta)} dA = \frac{3}{\eta^2}\int_{B_p(R)\setminus B_p(R-\eta)} e^{-aR} \leq \frac{3}{\eta^2}\int_{B_p(R)\setminus B_p(R-\eta)} e^{-ar} \leq C_4,$$

e desse modo obtemos

$$\int_{B_p(R)\setminus B_p(R-\eta)} dA \leq Ce^{aR},$$

para algum $\eta \in (14\Lambda, 16\Lambda)$. Em particular,

$$\int_{B_p(R)\setminus B_p(R-14\Lambda)} dA \leq Ce^{aR}.$$

Substituindo R por $R - 14k\Lambda$ para $k = 1, 2, \ldots, n = \left\lfloor \frac{R}{14\Lambda} \right\rfloor - 1$, encontramos

$$\begin{aligned} A(R) &\leq A(14\Lambda) + \sum_{k=0}^{n} \int_{B_p(R-14k\Lambda)\setminus B_p(R-14(k+1)\Lambda)} dA \\ &\leq C + C\sum_{k=0}^{n} e^{a(R-14k\Lambda)} \leq C + Ce^{aR}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-14k\Lambda} \leq Ce^{aR}. \end{aligned}$$

Isto finaliza a demonstração do caso considerado.

Para o segundo caso, o argumento é similar e portanto mostraremos os primeiros passos. Considere que $\mathrm{Scal}_M \geq -6$. Então pelo Lema 4.1.1 temos

$$-2\int_0^t \varphi(r)\varphi'(r)L'(r)dr \leq 2\pi\varphi^2(0) + \int_{B_p(t)} (\varphi')^2 + 3\int_{B_p(t)} \varphi^2.$$

Pondo

$$\varphi(r) = e^{-r}\psi(r),$$

onde ψ é uma função não-crescente, Lipschitz em $[0, t]$ tal que $\psi(t) = 0$, segue da desigualdade acima que

$$-2\int_0^t \psi(r)\psi'(r)L'(r)e^{-2r}dr \leq 2\pi + 2\int_{B_p(t)} \psi\psi' e^{-2r} + \int_{B_p(t)} (\psi')^2 e^{-2r}.$$

Considerando ψ conforme definido na equação (4.26) e integrando por partes implica em

$$\frac{1}{\eta^2}\int_{B_p(t)\setminus B_p(t-\eta)} e^{-2r} + \frac{6}{\eta}\int_{B_p(t)\setminus B_p(t-\eta)} \psi e^{-2r} \leq 2\pi + \frac{2}{\eta}L(t-\eta)e^{-2(t-\eta)}$$

O restante do raciocínio prossegue pelo método anterior. □

Corolário 4.3.1. *Considere Σ como uma superfície mínima completa e estável em uma variedade tridimensional M. Nesse caso, existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que, para todo $R > 0$,*

$$A(R) \leq Ce^{\beta R},$$

onde $\beta = 2$ se a curvatura escalar de M for tal que $\mathrm{Scal}_M \geq -6$, e $\beta = \frac{4}{\sqrt{7}}$ se a curvatura seccional de M atender a $Sec_M \geq -1$.

5 Estimativas de espectro

5.1 O problema de Dirichlet

Nesta seção, visamos estudar os autovalores do operador Laplaciano em variedades. Seja Ω um domínio limitado com bordo suave em uma variedade Riemanniana M. Vamos considerar o seguinte *Problema de Dirichlet*:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{no } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se existe uma solução não identicamente nula para este problema, o número λ é chamado de *autovalor do Laplaciano* de Ω e u é uma *autofunção* associada ao auto-valor λ.

Usando as fórmulas de Green, vemos que para quaisquer $u, v \in C_0^\infty(M)$, funções suaves com suporte compacto em M, vale

$$\int_M u\Delta v = \int_M v\Delta u,$$

e isto implica que o operador $-\Delta$ é simétrico. Além disso, ao aplicarmos novamente as fórmulas de Green, obtemos

$$-\int_M u\Delta u = \int_M |\nabla u|^2 \geq 0.$$

Desse modo, o operador $-\Delta$ é positivo. Consequentemente para dois autovalores distintos λ e μ, com as suas respectivas autofunções u e v, obtemos a partir da simetria do operador considerado

$$0 = \int_M (u\Delta v - v\Delta u) = (\mu - \lambda)\int_M uv.$$

Dessa forma, se denotarmos por $E(\lambda)$ o espaço próprio correspondente ao autovalor λ, os espaços $E(\lambda)$ e $E(\mu)$ são ortogonais sobre o espaço das funções que possuem quadrado integrável, ou seja, os autoespaços são L^2-ortogonais se, e somente se, $\lambda \neq \mu$.

Teorema 5.1 ([Lab15, Theorem 4.3.1])**.** *Sobre os autovalores do Laplaciano em Ω, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) O espectro de $-\Delta$ é discreto e consiste de uma sequência de números reais tais que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \uparrow +\infty.$$

(b) Cada autovalor possui multiplicidade finita, e os subespaços próprios correspondentes a autovalores distintos são ortogonais em L^2, e

$$\overline{\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} E(\lambda_k)} = L^2(\Omega),$$

onde o fecho é tomado sobre a norma $\|u\|_{1,2}^2 := \int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2$. *Ademais, no problema de Dirichlet, cada autofunção pertence ao espaço de Sobolev* $L_{0,1}^2(\Omega)$.

Em geral, se M é uma variedade com bordo, o completamento de $C^\infty(M)$ com respeito a norma definida no teorema anterior é conhecido como espaço de Sobolev e este é denotado por $L_1^2(M)$. Já o completamento de $C_0^\infty(M)$ é denotado por $L_{0,1}^2(M)$. Além disso, é possível demonstrar que a completude da variedade M implica que os espaços $L_1^2(M)$ e $L_{0,1}^2(M)$ coincidem.

É importante destacar que, no problema de Dirichlet, todos os autovalores são positivos. De fato, pelo Teorema 5.1 basta considerarmos o primeiro autovalor. Suponha, por absurdo, que $\lambda = 0$ é autovalor. Então, existe uma solução u não trivial para o problema de Dirichlet. Para essa função, devemos ter $-\Delta u = 0$, e u deve se anular em $\partial\Omega$. Ao integrarmos por partes, obtemos

$$0 = -\int_M u\Delta u = \int_M |\nabla u|^2.$$

Portanto, segue que $\nabla u = 0$, ou seja, u é constante em M. Usando a condição de contorno, concluímos que $u = 0$ em M, o que é uma contradição.

Há outras propriedades sobre o primeiro autovalor. Resumimos duas delas na seguinte proposição.

Proposição 5.1.1 ([Lab15, Proposition 4.5.8])**.** *Considere uma variedade compacta* M*. Sobre o problema de Dirichlet valem as seguintes afirmações:*

(a) A primeira autofunção não se anula e nem muda de sinal no interior de M*.*

(b) O primeiro autovalor é simples, isto é, sua multiplicidade algébrica é igual a 1*.*

5.2 Estimativas ínfimo do espectro

Continuaremos a abordagem da seção anterior, no entanto, agora assumimos que M é uma variedade completa. Neste caso, podemos considerar uma exaustão por compactos $\{\Omega_i\} \subset M$ com bordo suave para definir o *ínfimo do espectro de* M, ou *tom fundamental de* M, pelo limite

$$\lambda_0(M) = \lim_{k\to\infty} \lambda_1(\Omega_k). \tag{5.1}$$

Afirmamos que para qualquer que seja a exaustão por compactos de M considerada este limite sempre existe. Com efeito, considere uma exaustão por compactos $\{\Omega_i\} \subset M$ e fixe $k \in \mathbb{N}$. Defina o conjunto $\mathcal{D}(\Omega_k) = \{u \in L_{0,1}^2(M) \mid u|_{\partial\Omega_k} = 0, u \neq 0\}$. Veja que toda função em $\in \mathcal{D}(\Omega_k)$ pode ser estendida de modo Lipschitz como zero em $\Omega_{k+1} \setminus \Omega_k$ e isso é o suficiente para concluirmos que $\mathcal{D}(\Omega_k) \subset \mathcal{D}(\Omega_{k+1})$. Donde segue da propriedade do ínfimo que

$$\lambda_1(\Omega_k) \geq \lambda_1(\Omega_{k+1}). \tag{5.2}$$

Daí, $\{\lambda_1(\Omega_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente e positiva, logo esta é uma sequência convergente.

Como é de se esperar, o limite em (5.1) não depende da exaustão considerada. De fato, considere duas exaustões por compactos $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{\Omega_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$. Como a reunião dos Ω_i é M, segue que para todo $i \in \mathbb{N}$ deve existir $i_k \in \mathbb{N}$ de modo que tenhamos $\Omega_i' \subset \Omega_{i_k}$. Pelo mesmo argumento usado para mostrar (5.2) segue que

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_1(\Omega_i) \geq \lim_{i_k\to\infty} \lambda_1(\Omega_{i_k}') = \lim_{i\to\infty} \lambda_1(\Omega_i').$$

Invertendo os papeis das exaustões e repetindo o argumento concluímos que ambos os limites existem e coincidem.

Em particular, vemos que $\lambda_0(M)$ é a constante ótima que satisfaz a *Desigualdade de Poincaré*

$$\lambda_0(M)\int_M u^2 \leq \int_M |\nabla u|^2, \tag{5.3}$$

onde $u \in C_0^\infty(M)$.

Segue do seguinte teorema que o ínfimo do espectro está relacionado com o crescimento de área.

Teorema 5.2 (S. Cheng, S. Yau [CY75]; M. Batista, M. Cavalcante, N. Santos [BCS14])**.** *Se M é uma variedade Riemanniana completa com crescimento de área polinomial, então* $\lambda_0(M) = 0$.

Demonstração. Por hipótese existe $C > 0$ e k inteiro positivo tal que

$$A(r) \leq Cr^k,$$

para todo $r > 0$. Fixe $p \in M$. Dado $x \in M$, denotemos $r(x)$ a função distância em M partindo de p. Dado $r > 0$ definimos a função

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{em } B_p(r) \\ \dfrac{2r - r(x)}{r}, & \text{em } B_p(2r) \setminus B_p(r) \\ 0, & \text{em } M \setminus B_p(r). \end{cases}$$

Pela desigualdade de Poincaré,

$$\lambda_0(M)A(r) \leq \lambda_0(M)\int_{B_p(2r)} \varphi^2(x) \leq \int_{B_{2r}} |\nabla\varphi(x)|^2 = \int_{B_p(2r)\setminus B_p(r)} \frac{1}{r^2} \leq \frac{1}{r^2}A(2r). \tag{5.4}$$

Suponha, por absurdo, que $\lambda_0(M) > 0$. Por (5.4) temos que $A(r) \leq Cr^{k-2}$. Iterando o argumento $\lfloor k/2 \rfloor$ vezes obtemos $A(r) \leq Cr^a$, com $a < 2$. Usando novamente a desigualdade em (5.4) nos vem

$$\lambda_0(M)A(r) \leq r^{a-2}.$$

Fazendo $r \to \infty$ concluímos que M possui área igual a zero, um absurdo. $\square$

O seguinte lema, que pode ser encontrado em [Li12, Lemma 24.3], nos permite estimar o valor de $\lambda_0(B_p(R))$, onde $B_p(R)$ é a bola geodésica centrada em p com raio R, em função da área dessa bola, denotaremos essa quantia por $A(R)$.

Lema 5.2.1 ([Li12, Lemma 24.3]). *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Então para qualquer $0 < \delta < 1, R > 2$ e $p \in M$ vale*

$$\lambda_1(B_p(R)) \leq \frac{1}{4\delta^2(R-1)^2}\left[\ln\left(\frac{A(R)}{A(1)}\right) + \ln\left(\frac{12}{1-\delta}\right)\right]^2. \tag{5.5}$$

Observe que não é necessário impor quaisquer hipóteses sobre a curvatura de M no lema anterior. Ao deixar $R \to \infty$ e, em seguida, $\delta \to 1$, decorre como corolário da expressão (5.5) a seguinte estimativa, conforme descrito em [LW01].

Corolário 5.2.1 (P. Li e J. Wang, [LW01]). *Seja M uma variedade Riemanniana completa, então para qualquer $p \in M$ vale*

$$\lambda_0(M) \leq \frac{1}{4}\left(\liminf_{R\to\infty} \frac{\ln A(R)}{R}\right)^2. \tag{5.6}$$

Desse modo, podemos utilizar a estimativa de área obtida no Corolário 4.3.1 para obtemos um resultado devido a P. Bérard, P. Castillon e M. Cavalcante em [BCC11].

Teorema 5.3 (P. Bérard, P. Castillon e M. Cavalcante). *Seja Σ uma superfície a mínima e completa em uma variedade M tridimensional.*

(a) Se a curvatura escalar de M satisfaz $\mathrm{Scal}_M \geq -6$, então

$$\lambda_0(\Sigma) \leq 1.$$

(b) Se a curvatura seccional de M satisfaz $Sec_M \geq -1$, então

$$\lambda_0(\Sigma) \leq \frac{4}{7}.$$

Demonstração. Pelo Corolário 4.3.1 segue que existe uma constante absoluta $C > 0$ tal que, para todo $R > 0$,

$$A(R) \leq Ce^{\beta R},$$

onde $\beta = 2$ se a curvatura escalar de M for tal que $\mathrm{Scal}_M \geq -6$, e $\beta = \frac{4}{\sqrt{7}}$ se a curvatura seccional de M atender a $\mathrm{Sec}_M \geq -1$. Então por (5.6) nós temos

$$\lambda_0(M) \leq \frac{1}{4}\left(\liminf_{R\to\infty} \frac{\ln A(R)}{R}\right)^2 \leq \frac{1}{4}\left(\liminf_{R\to\infty} \frac{\ln(Ce^{\beta R})}{R}\right)^2 \leq \frac{1}{4}\left(\liminf_{R\to\infty} \frac{\ln C}{R} + \beta\right)^2 = \frac{\beta^2}{4}.$$

Substituindo agora os valores de β nos casos em que $\mathrm{Scal}_M \geq -6$ e $\mathrm{Sec}_M \geq -1$ conclui a demonstração desse teorema. $\square$

Vale a pena mencionar que tanto a prova original em [BCC11] quanto a demonstração fornecida, por meio de estimativas de área, para o Teorema 5.3 baseiam-se em argumentos fortemente dependentes das dimensões consideradas, uma vez que ambas utilizam versões da desigualdade de Shiohama-Tanaka.

Para superar essa dificuldade, na próxima seção, adotaremos uma abordagem alternativa para demonstrar um teorema que estende a estimativa do ínfimo do espectro quando Σ é uma hipersuperfíce mínima completa e estável em uma variedade ambiente com dimensão mais alta.

5.3 Funções de Green

Seja M uma variedade compacta com bordo e vamos considerar o operador Laplaciano Δ definido sobre funções com a condição de Dirichlet sobre o bordo de M. Definimos uma função de Green como uma função $G(x,y)$ defina sobre $M \times M \setminus \{(x,x) \mid x \in M\}$ satisfazendo

$$\int_M G(x,y)\Delta f(y)dy = -f(x), \tag{5.7}$$

para todas as funções f definidas em M tais que $f|_{\partial M} = 0$. Além disso, $\Delta_x G(x,y) = \Delta_y G(x,y) = 0$, se $x \neq y$ e $G(x,y) = 0$ para todo par $(x,y) \in (M \setminus \partial M) \times \partial M$ (veja [Li12]).

Como tanto G quanto f satisfazem a condição de Dirichlet, podemos integrar por partes de modo a obter

$$\int_M \Delta_y G(x,y) f(y)dy = -f(x). \tag{5.8}$$

Isto é equivalente a dizer que

$$\Delta_y G(x,y) = -\delta_x(y),$$

onde $\delta_x(y)$ é a conhecida função delta em x. Escolhendo $f(x) = G(z,x)$ em (5.8), pela definição em (5.7), temos

$$G(z,x) = -\int_M \Delta_y G(x,y) G(z,y)dy = G(x,z).$$

Portanto, $G(x,y)$ é uma função simétrica. Quando fixamos $y = y_0$ e consideramos a função $G(x) = G(x,y_0)$, então temos que $G(x) \to \infty$ quando $x \to y_0$. Neste caso, dizemos que y_0 é o *polo* da função de Green G.

No cenário em que M é uma variedade completa, procuramos ainda uma função de Green que mantenha as propriedades mencionadas anteriormente. A existência de tal função foi demonstrada por Malgrange em [Mal56], embora seu trabalho não tenha apresentado uma construção explícita para tal fato. Em 1987, Peter Li e Luen-Fai Tam publicaram um artigo fornecendo, pela primeira vez, uma abordagem construtiva para a existência de funções de Green em variedades completas. Apresentaremos um esboço das ideias fundamentais encontradas no artigo [LT87].

Fixe $p \in M$ e considere uma exaustão por compactos de M satisfazendo

$$\{p\} \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_i \subset \cdots \subset M$$

e $\bigcup_i \Omega_i = M$. Sobre cada compacto Ω_i consideremos a função positiva de Green com polo em p, a qual denotaremos por $G_i(p,\cdot\,)$. Aplicando o princípio do máximo aplicado sobre o domínio $\Omega_i \setminus B_p(r)$ segue que $S_i(r) = \sup\limits_{\partial B_p(r)} G_i(p,\cdot\,)$ é uma função monótona decrescente em r, uma vez que $G_i(p,\cdot\,) = 0$ em $\partial\Omega_i$. Em particular, se $G_i(p,\cdot\,)$ converge monotonamente para alguma função $G(p,\cdot\,)$, então G é uma função de Green positiva monótona decrescente em r. Nesse caso, observe que se $\widetilde{G}(p,\cdot\,)$ é outra função de Green positiva, então o princípio do máximo nos indica que sobre Ω_i deve ocorrer $\widetilde{G}(x,y) \geq G_i(x,y)$. Ao tomar $i \to \infty$, concluímos que $\widetilde{G}(x,y) \geq G(x,y)$. Em outras palavras, a função G possui, de certo modo, uma propriedade minimizante.

No mesmo artigo mencionado, também foi demonstrado que quando a convergência monótona de $G_i(p,\cdot\,)$ não ocorre, podemos encontrar constantes a_i de modo que $G_i(p,\cdot\,)-a_i$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de M e esse limite é uma função de Green. No entanto, essa construção depende da exaustão escolhida, e, portanto, a função obtida pode não ser única.

Existe uma estreita relação entre o conceito de parabolicidade e funções de Green. De fato, é possível mostrar que uma variedade completa é não-parabólica se, e somente se, existe uma função de Green positiva, ver [Gri99, Theorem 5.1]. Por outro lado, temos o seguinte resultado devido a Schoen e Yau.

Teorema 5.4 (R. Schoen, S. T. Yau, [SY79, Chapter II, Theorem A.3])**.** *Seja M uma variedade completa e não-compacta. Se $\lambda_0(M) > 0$, então existe uma função positiva de Green, e portanto, M é não-parabólica.*

Em particular, afim de obter estimativas superiores para o ínfimo do espectro, podemos supor que $\lambda_0(M) > 0$ e assim usar a função de Green positiva de M.

Para encerrar esta seção, veremos mais algumas propriedades das funções de Green. Visto que G é harmônica em $M \setminus \{p\}$, decorre da desigualdade de Kato (2.8) que

$$|\operatorname{Hess} G\,|^2 \geq \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla G||^2.$$

Além disso, usando a Proposição 2.2.3 segue

$$\Delta|\nabla G| \geq \operatorname{Ric}(\nabla G,\nabla G)|\nabla G|^{-1} + \frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla G||^2|\nabla G|^{-1}, \tag{5.9}$$

sobre $M \setminus \{p\}$ sempre que $|\nabla G| \neq 0$.

Ao considerarmos o caso em que G é positiva, a função $v = \ln G$ fica bem definida e esta será de grande importância para nossos estudos futuros. Agora, vamos destacar algumas propriedades que essa função satisfaz.

Ao utilizar a harmonicidade de G em $M \setminus \{p\}$, obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned}\Delta v = \mathrm{div}(\nabla v) = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla G}{G}\right) &= \frac{1}{G}\mathrm{div}(\nabla G) + \left\langle \nabla\left(\frac{1}{G}\right), \nabla G\right\rangle \\ = \frac{1}{G}\Delta G + \left\langle -\frac{\nabla G}{G^2}, \nabla G\right\rangle &= -\left\langle \frac{\nabla G}{G}, \frac{\nabla G}{G}\right\rangle = -|\nabla v|^2. \qquad (5.10)\end{aligned}$$

Considerando um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ com $|\nabla v| e_1 = \nabla v$, obtemos

$$|\nabla v| v_{11} = |\nabla v| e_1(e_1(v)) = |\nabla v| e_1(|\nabla v|) = \langle \nabla |\nabla v|, |\nabla v| e_1\rangle = \langle \nabla |\nabla v|, \nabla v\rangle. \qquad (5.11)$$

Proposição 5.3.1. *Com a mesma notação da discussão acima, defina $v = \ln G$. Vale*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla v|^2 \geq \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla v||^2 + \frac{1}{n-1}|\nabla v|^4 - \frac{n-2}{n-1}\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\right\rangle + \mathrm{Ric}_\Sigma(\nabla v, \nabla v)$$

sobre $M \setminus \{p\}$.

Demonstração. Vejamos primeiramente que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz segue

$$\begin{aligned}|\,\mathrm{Hess}\, v\,|^2 = \sum_{i,j=1}^n v_{ij}^2 &\geq v_{11}^2 + 2\sum_{i=1}^n v_{1i}^2 + \sum_{i=2}^n v_{ii}^2 \\ &\geq v_{11}^2 + 2\sum_{i=1}^n v_{1i}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=2}^n v_{1i}\right)^2 \\ &= v_{11}^2 + 2\sum_{i=1}^n v_{1i}^2 + \frac{1}{n-1}(\Delta v - v_{11})^2 \\ &= \frac{n}{n-1}v_{11}^2 + 2\sum_{i=1}^n v_{1i}^2 + \frac{1}{n-1}(\Delta v)^2 - \frac{2}{n-1}v_{11}\Delta v. \qquad (5.12)\end{aligned}$$

Como $2 \geq \dfrac{n}{n-1}$, ao seguir os mesmos passos de (2.7), deduzimos de (5.12)

$$\begin{aligned}|\,\mathrm{Hess}\, v\,|^2 &\geq \frac{n}{n-1}v_{11}^2 + 2\sum_{i=2}^n v_{1i}^2 + \frac{1}{n-1}(\Delta v)^2 - \frac{2}{n-1}v_{11}\Delta v \\ &\geq \frac{n}{n-1}\left(v_{11}^2 + \sum_{i=2}^n v_{1i}^2\right) + \frac{1}{n-1}(\Delta v)^2 - \frac{2}{n-1}v_{11}\Delta v \\ &= \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla v||^2 + \frac{1}{n-1}(\Delta v)^2 - \frac{2}{n-1}v_{11}\Delta v. \qquad (5.13)\end{aligned}$$

Utilizando a fórmula de Bochner em (2.1) junto com (5.10) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\nabla v|^2 &= \mathrm{Ric}_\Sigma(\nabla v, \nabla v) + \langle \nabla(\Delta v), \nabla v\rangle + |\,\mathrm{Hess}\, v\,|^2 \\ &= \mathrm{Ric}_\Sigma(\nabla v, \nabla v) - \left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\right\rangle + |\,\mathrm{Hess}\, v\,|^2\end{aligned}$$

Somando e subtraindo o termo $\dfrac{1}{n-1}\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\rangle$ no lado direito da desigualdade acima nos vem que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\nabla v|^2 &\geq \mathrm{Ric}_\Sigma(\nabla v, \nabla v) - \frac{n-2}{n-1}\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\right\rangle + |\,\mathrm{Hess}\, v\,|^2 - \frac{1}{n-1}\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\right\rangle \\ &\geq \mathrm{Ric}_\Sigma(\nabla v, \nabla v) - \frac{n-2}{n-1}\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\right\rangle + \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla v||^2 \\ &\quad + \frac{1}{n-1}|\nabla v|^4 + \frac{1}{n-1}2v_{11}|\nabla v|^2 - \frac{1}{n-1}\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\right\rangle \\ &\geq \mathrm{Ric}_\Sigma(\nabla v, \nabla v) - \frac{n-2}{n-1}\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\right\rangle + \frac{1}{n-1}|\nabla v|^4 + \frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla v||^2,\end{aligned}$$

na última linha utilizamos que (5.11) implica em $2|\nabla v|^2 v_{11} = \langle \nabla |\nabla v|^2, \nabla v\rangle$. □

Defina os conjuntos

$$L(a,b) = \{x \in \Sigma \mid a < G(x) < b\},$$
$$\ell(t) = \{x \in \Sigma \mid G(x) = t\}.$$

Assim, $L(\alpha,\infty) \subset B_p(1)$, onde $\alpha = \max\limits_{\partial B_p(1)} G$. Uma propriedade das funções harmônicas, que é válida em um contexto mais geral do que o considerado neste trabalho, pode ser encontrada em [LW06, Lemma 5.1]. Em particular, pode-se mostrar que

$$\int_{\ell(t)} |\nabla G| = 1$$

e assim, pela fórmula da có-área obtemos a seguinte igualdade:

$$\int_{L(a,b)} |\nabla G|^2 f(G) = \int_a^b f(t)dt, \tag{5.14}$$

para toda função integrável f, desde que tenhamos $\lambda_0(M) > 0$.

Lema 5.3.1. *Seja M uma $(n+1)$-variedade completa com curvatura seccional limitada inferiormente e $n \leq 5$. Para uma hipersuperfície completa mínima estável Σ em M com $\lambda_0(\Sigma) > 0$, então sua função mínima positiva de Green $G(x) := G(p,x)$ satisfaz*

$$\int_{\Sigma\setminus B_p(1)} \frac{|\nabla G|^4}{G^3 \ln^{2q}(1+G^{-1})} < \infty,$$

onde $q > 1/2$.

Demonstração. Ponha $v = \ln G$ e escolha um referencial ortonormal $\{e_1,\ldots,e_n\}$ em Σ satisfazendo $|\nabla v|e_1 = \nabla v$. Denote a segunda forma fundamental por (h_{ij}). Fixe um inteiro $1 \leq j \leq n$, junto da minimalidade de Σ temos

$$\begin{aligned}
|\mathrm{II}|^2 &\geq h_{jj}^2 + \sum_{i\neq j} h_{ii}^2 + 2\sum_{i\neq j} h_{ij}^2 \\
&\geq h_{jj}^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i\neq j} h_{ii}\right)^2 + 2\sum_{i\neq j} h_{ij}^2 \\
&= h_{jj}^2 + \frac{1}{n-1}(H - h_{jj})^2 + 2\sum_{i\neq j} h_{ij}^2 \\
&= \frac{n}{n-1} h_{jj}^2 + 2\sum_{i\neq j} h_{ij}^2 \geq \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^n h_{ij}^2.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Usando a equação de Gauss e utilizando a desigualdade acima

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_\Sigma(e_j,e_j) &= \sum_{i\neq j}\mathrm{Sec}_M(e_i,e_j) + \sum_{i\neq j} h_{ii}h_{jj} - \sum_{i\neq j} h_{ij}^2\\
&= \sum_{i\neq j}\mathrm{Sec}_M(e_i,e_j) + (H-h_{jj})h_{jj} - \sum_{i\neq j} h_{ij}^2\\
&= \sum_{i\neq j}\mathrm{Sec}_M(e_i,e_j) - \sum_{i=1}^{n} h_{ij}^2\\
&\geq \sum_{i\neq j}\mathrm{Sec}_M(e_i,e_i) - \frac{n-1}{n}|\mathrm{II}|^2. \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

Como M possui uma curvatura seccional limitada inferiormente, como estamos supondo que a curvatura seccional é limitada inferiormente existe uma constante $\tilde{C}\in\mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i\neq j}\mathrm{Sec}_M(e_i,e_i)\geq -\tilde{C}(n-1).$$

Desse modo, por (5.16) concluímos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_\Sigma(\nabla v,\nabla v) &\geq -\tilde{C}(n-1)|\nabla v|^2 - \frac{n-1}{n}|\mathrm{II}|^2|\nabla v|^2\\
&= -\tilde{C}(n-1)|\nabla v|^2 - \frac{n-1}{n}\Big(|\mathrm{II}|^2+\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)-\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)\Big)|\nabla v|^2\\
&= \frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)-n\tilde{C}\Big)|\nabla v|^2 - \frac{n-1}{n}\Big(|\mathrm{II}|^2+\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)\Big)|\nabla v|^2. \qquad (5.17)
\end{aligned}$$

Usando novamente que a curvatura seccional de M é limitada inferiormente, então existe uma constante C tal que

$$\frac{n-1}{n}\Big(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)-n\tilde{C}\Big)\geq -C.$$

Então de (5.17) segue

$$\mathrm{Ric}_M(\nabla v,\nabla v)\geq -C|\nabla v|^2 - \frac{n-1}{n}\Big(|\mathrm{II}|^2+\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)\Big)|\nabla v|^2. \qquad (5.18)$$

Relembre que a Proposição 5.3.1 nos mostra que sobre $M\setminus\{p\}$ vale

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla v|^2\geq\frac{n}{n-1}|\nabla|\nabla v||^2+\frac{1}{n-1}|\nabla v|^4-\frac{n-2}{n-1}\Big\langle\nabla|\nabla v|^2,\nabla v\Big\rangle+\mathrm{Ric}_\Sigma(\nabla v,\nabla v).$$

Multiplicando a expressão acima pela função de corte φ^2 e integrando, mantendo em mente a expressão (5.18), continuamos com

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1}\int_\Sigma|\nabla v|^4\varphi^2 &\leq \frac{1}{2}\int_\Sigma\varphi^2\Delta|\nabla v|^2+\frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma\varphi^2\Big\langle\nabla|\nabla v|^2,\nabla v\Big\rangle\\
&\quad -\frac{n}{n-1}\int_\Sigma|\nabla|\nabla v||^2\varphi^2-\int_\Sigma\mathrm{Ric}_\Sigma(\nabla v,\nabla v)\varphi^2\\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Sigma\varphi^2\Delta|\nabla v|^2+\frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma\varphi^2\Big\langle\nabla|\nabla v|^2,\nabla v\Big\rangle-\frac{n}{n-1}\int_\Sigma|\nabla|\nabla v||^2\varphi^2\\
&\quad +C\int_\Sigma|\nabla v|^2\varphi^2+\frac{n-1}{n}\int_\Sigma\Big(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)+|\mathrm{II}|^2\Big)|\nabla v|^2\varphi^2. \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

Revisitando a desigualdade de estabilidade, podemos estimar a última integral do lado direito da expressão acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \left(\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)+|\mathrm{I\!I}|^2\right)|\nabla v|^2\varphi^2 &\leq \int_\Sigma |\nabla(|\nabla v|\varphi)|^2 = \int_\Sigma |\varphi\nabla|\nabla v| + |\nabla v|\nabla\varphi|^2\\ &= \int_\Sigma \varphi^2|\nabla|\nabla v||^2 + 2\int_\Sigma \varphi|\nabla v|\left\langle \nabla|\nabla v|, \nabla\varphi\right\rangle + \int_\Sigma |\nabla v|^2|\nabla\varphi|^2\\ &= \int_\Sigma \varphi^2|\nabla|\nabla v||^2 + \int_\Sigma \varphi\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla\varphi\right\rangle + \int_\Sigma |\nabla v|^2|\nabla\varphi|^2.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade acima em (5.19) nos vem que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n-1}\int_\Sigma |\nabla v|^4\varphi^2\\ &\quad= \frac{1}{2}\int_\Sigma \varphi^2\Delta|\nabla v|^2 + \frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma \varphi^2\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\right\rangle - \frac{n}{n-1}\int_\Sigma |\nabla|\nabla v||^2\varphi^2\\ &\qquad+ C\int_\Sigma |\nabla v|^2\varphi^2 + \frac{n-1}{n}\left[\int_\Sigma \varphi^2|\nabla|\nabla v||^2 + \int_\Sigma \varphi\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla\varphi\right\rangle + \int_\Sigma |\nabla v|^2|\nabla\varphi|^2\right]\\ &\quad\leq \frac{1}{2}\int_\Sigma \varphi^2\Delta|\nabla v|^2 + \frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma \varphi^2\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\right\rangle + \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n-1}\right)\int_\Sigma |\nabla|\nabla v||^2\varphi^2\\ &\qquad+ C\int_\Sigma |\nabla v|^2\varphi^2 + \frac{n-1}{n}\int_\Sigma \varphi\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla\varphi\right\rangle + \frac{n-1}{n}\int_\Sigma |\nabla v|^2|\nabla\varphi|^2. \qquad (5.20)\end{aligned}$$

Aplicando a seguinte manipulação em dois termos da desigualdade acima, conforme apresentado a seguir:

$$\begin{aligned}\frac{n-1}{n}\int_\Sigma \varphi\left\langle \nabla\varphi, \nabla|\nabla v|^2\right\rangle + \frac{1}{2}\int_\Sigma \varphi^2\Delta|\nabla v|^2\\ &= \frac{n-1}{n}\int_\Sigma \varphi\left\langle \nabla\varphi, \nabla|\nabla v|^2\right\rangle - \frac{1}{2}\int_\Sigma \left\langle \nabla\varphi^2, \nabla|\nabla v|^2\right\rangle\\ &= \left(\frac{n-1}{n} - 1\right)\int_\Sigma \varphi\left\langle \nabla\varphi, \nabla|\nabla v|^2\right\rangle\\ &= -\frac{1}{n}\int_\Sigma \varphi\left\langle \nabla\varphi, \nabla|\nabla v|^2\right\rangle.\end{aligned}$$

Logo, (5.20) é o mesmo que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\int_\Sigma |\nabla v|^4\varphi^2 \leq -\frac{1}{n}\int_\Sigma \varphi\left\langle \nabla\varphi, \nabla|\nabla v|^2\right\rangle + \frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma \varphi^2\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla v\right\rangle + C\int_\Sigma |\nabla v|^2\varphi^2\\ - \frac{2n-1}{n(n-1)}\int_\Sigma |\nabla|\nabla v||^2\varphi^2 + \frac{n-1}{n}\int_\Sigma |\nabla v|^2|\nabla\varphi|^2. \qquad (5.21)\end{aligned}$$

Defina $\varphi = G^{1/2}\eta$, onde η é uma função cut-off sobre Σ que se anula em $B_p(1)$. Observa-se que, para qualquer $\delta > 0$, a desigualdade entre as médias aritmética-geométrica nos mostra que $ab \leq \frac{1}{\delta}a^2 + \frac{\delta}{4}b^2$ é válida para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$. Utilizando esse fato, prosseguimos com:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |\nabla v|^2\eta\left\langle \nabla G, \nabla\eta\right\rangle &\leq \int_\Sigma |\nabla v|^2|\eta||\nabla\eta||\nabla G| = \int_\Sigma |\nabla v||\eta||\nabla G|G^{-1/2}\cdot|\nabla v||\nabla\eta|G^{1/2}\\ &\leq \frac{\delta}{4}\int_\Sigma |\nabla v|^2\eta^2|\nabla G|^2G^{-1} + C(\delta)\int_\Sigma |\nabla v|^2|\nabla\eta|^2G.\end{aligned}$$

A desigualdade acima é útil para estimarmos um dos termos de (5.21), pois veja que

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |\nabla v|^2|\nabla\varphi|^2 &= \int_\Sigma |\nabla v|^2\left|G^{1/2}\nabla\eta + \frac{1}{2}\eta G^{-1/2}\nabla G\right|^2\\ &= \int_\Sigma |\nabla v|^2|\nabla\eta|^2 G + \int_\Sigma |\nabla v|^2\eta\left\langle\nabla\eta,\nabla G\right\rangle + \frac{1}{4}\int_\Sigma |\nabla v|^2\eta^2|\nabla G|^2G^{-1} \qquad (5.22)\\ &\leq C(\delta)\int_\Sigma |\nabla v|^2|\nabla\eta|^2G + \frac{1+\delta}{4}\int_\Sigma |\nabla v|^4\varphi^2, \qquad (5.23)\end{aligned}$$

na última linha utilizamos a identidade $\varphi^2|\nabla v|^2 = \eta^2|\nabla G|^2G^{-1}$. Dessa forma, como consequência das expressões (5.21) e (5.22), obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n-1}\int_\Sigma |\nabla v|^4|\nabla\varphi|^2\\ &\leq -\frac{1}{n}\int_\Sigma \varphi\left\langle\nabla\varphi,\nabla|\nabla v|^2\right\rangle + \frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma \varphi^2\left\langle\nabla|\nabla v|^2,\nabla v\right\rangle\\ &\quad + \frac{2n-1}{n(n-1)}\int_\Sigma |\nabla|\nabla v||^2\varphi^2 + C\int_\Sigma |\nabla v|^2\varphi^2 + \frac{n-1}{n}\int_\Sigma |\nabla v|^2|\nabla\varphi|^2\\ &\leq -\frac{1}{2n}\int_\Sigma \left\langle\nabla\varphi^2,\nabla|\nabla v|^2\right\rangle + \frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma \varphi^2\left\langle\nabla|\nabla v|^2,\nabla v\right\rangle + C\int_\Sigma |\nabla v|^2\varphi^2\\ &\quad - \frac{2n-1}{n(n-1)}\int_\Sigma |\nabla|\nabla v||^2\varphi^2 + C(\delta)\int_\Sigma |\nabla v|^2\varphi^2 + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1+\delta}{4}\int_\Sigma |\nabla v|^4|\nabla\varphi|^2. \qquad (5.24)\end{aligned}$$

Usando agora que $\varphi = G^{1/2}\eta$ e $v = \ln G$ segue que

$$\varphi^2\left\langle\nabla|\nabla v|^2,\nabla v\right\rangle = \eta^2G\left\langle\nabla|\nabla v|^2,G^{-1}\nabla G\right\rangle = \eta^2\left\langle\nabla|\nabla v|^2,\nabla G\right\rangle,$$

logo aplicando essas igualdades em (5.24).

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1+\delta}{4}\cdot\frac{n-1}{n}\right)\int_\Sigma |\nabla v|^4\varphi^2\\ &\leq -\frac{1}{2n}\int_\Sigma \left\langle\nabla(G\eta^2),\nabla|\nabla v|^2\right\rangle + \frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma \eta^2\left\langle\nabla|\nabla v|^2,\nabla G\right\rangle\\ &\quad + C(\delta)\int_\Sigma \left(\eta^2 + |\nabla\eta|^2\right)|\nabla v|^2G - \frac{2n-1}{n(n-1)}\int_\Sigma \varphi^2|\nabla|\nabla v||^2\\ &\leq -\frac{1}{2n}\int_\Sigma G\left\langle\nabla\eta^2,\nabla|\nabla v|^2\right\rangle + \left(\frac{n-2}{n-1} - \frac{1}{2n}\right)\int_\Sigma \eta^2\left\langle\nabla|\nabla v|^2,\nabla G\right\rangle\\ &\quad + C(\delta)\int_\Sigma (\eta^2 + |\nabla\eta|^2)|\nabla v|^2G - \frac{2n-1}{n(n-1)}\int_\Sigma \varphi^2|\nabla|\nabla v||^2. \qquad (5.25)\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz junto com a desigualdade média aritmética-geométrica segue que para todo $\delta > 0$ vale

$$\begin{aligned}-\frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma \left\langle\nabla\eta^2,\nabla G\right\rangle|\nabla v|^2 &\leq \frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma 2|\eta||\nabla\eta||\nabla G||\nabla v|^2\\ &\leq \frac{n-2}{n-1}\int_\Sigma 2|\eta||\nabla v|^2G^{1/2}\cdot|\nabla\eta||\nabla G|G^{-1/2}\\ &\leq \delta\int_\Sigma |\nabla v|^4\eta^2G + C(\delta)\int_\Sigma |\nabla\eta|^2|\nabla G|^2G^{-1}\\ &= \delta\int_\Sigma |\nabla v|^4\varphi^2 + C(\delta)\int_\Sigma |\nabla\eta|^2|\nabla v|^2G. \qquad (5.26)\end{aligned}$$

Utilizando a harmonicidade de G em $\Sigma \setminus \{p\}$ segue

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\eta^2\nabla G\right) &= \eta^2\operatorname{div}(\nabla G) + \left\langle \nabla\eta^2, \nabla G\right\rangle \\ &= \eta^2\Delta G + \left\langle \nabla\eta^2, \nabla G\right\rangle \\ &= \left\langle \nabla\eta^2, \nabla G\right\rangle. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Pelo Teorema da Divergência segue que

$$0 = \int_\Sigma \operatorname{div}\left(|\nabla v|^2\eta^2\nabla G\right) = \int_\Sigma |\nabla v|^2\operatorname{div}\left(\eta^2\nabla G\right) + \int_\Sigma \left\langle \nabla|\nabla v|^2, \eta^2\nabla G\right\rangle.$$

Usando (5.27) verificamos a seguinte igualdade

$$\int_\Sigma \eta^2\left\langle \nabla|\nabla v|^2, \nabla G\right\rangle = -\int_\Sigma \left\langle \nabla\eta^2, \nabla G\right\rangle |\nabla v|^2.$$

Combinando o fato mencionado acima com (5.26) e aplicando isso em (5.25), obtemos

$$\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1+\delta}{4}\cdot\frac{n-1}{n} - \delta\right)\int_\Sigma |\nabla v|^4\varphi \le C(\delta)\int_\Sigma \left(\eta^2 + |\nabla\eta|^2\right)|\nabla v|^2 G. \tag{5.28}$$

Dado que estamos considerando $n \le 5$, podemos escolher $\delta = \delta(n)$ suficientemente grande para que o termo $\frac{1}{n-1} - \frac{1+\delta}{4}\cdot\frac{n-1}{n} - \delta$ seja estritamente positivo. Assim, asseguramos a existência de uma constante absoluta $\Gamma > 0$ tal que

$$\int_\Sigma |\nabla v|^4\varphi^2 \le \Gamma\int_\Sigma \left(\eta^2 + |\nabla\eta|^2\right)|\nabla v|^2 G, \tag{5.29}$$

para qualquer que seja a função de corte η que se anule em $B_p(1)$.

Para $1/2 < q < 1$ fixado, defina $\eta = \psi w(G)$, onde ψ é uma função cut-off satisfazendo $\psi = 0$ em $B_p(1) \cup (M \setminus B_p(2R))$, $\psi = 1$ em $B_p(R) \setminus B_p(2)$ e

$$w(G) = \frac{1}{\ln^q(AG^{-1})},$$

com $A = e^{2\sqrt{\Gamma}}\alpha$ e $\alpha = \max\limits_{\partial B_p(1)} G$. Assim, temos a seguinte cadeia de implicações:

$$A \ge e^{2\sqrt{\Gamma}}G \implies AG^{-1} \ge e^{2\sqrt{\Gamma}} \implies \ln(AG^{-1}) \ge 2\sqrt{\Gamma} \implies \frac{1}{\ln^2(AG^{-1})} \le \frac{1}{4\Gamma}. \tag{5.30}$$

Veja que podemos estimar um dos termos do lado direito de (5.29) do seguinte modo.

$$\int_\Sigma \eta^2|\nabla v|^2 G = \int_\Sigma \psi^2 w^2|\nabla G|^2 G^{-1} \le \int_{L(0,\alpha)} \frac{|\nabla G|^2}{G\ln^{2q}(AG^{-1})}.$$

Observe ainda que (5.14) implica em

$$\begin{aligned}\int_{L(0,\alpha)} \frac{|\nabla G|^2}{G\ln^{2q}(AG^{-1})} &= \int_0^\alpha \frac{dt}{t\ln^{2q}(A/t)} = \left[\frac{1}{(2q-1)\ln^{2q-1}(A/t)}\right]_0^\alpha \\ &= \frac{1}{(2q-1)\ln^{2q-1}(A/\alpha)} = \frac{\left(2\sqrt{\Gamma}\right)^{1-2q}}{2q-1}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Inspirado na desigualdade $|a+b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são quaisquer, chegamos em

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |\nabla\eta|^2|\nabla v|^2 G &= \int_\Sigma |w\nabla\psi + \psi\nabla w|^2|\nabla v|^2 G \\ &\leq 2\int_\Sigma |\nabla\psi|^2 \frac{|\nabla G|^2}{G\ln^{2q}(AG^{-1})} + 2\int_\Sigma \psi^2|\nabla w|^2|\nabla v|^2 G \qquad (5.32)\end{aligned}$$

Além disso, por (5.30) e como $\nabla w = \dfrac{q\nabla v}{\ln^{q+1}(AG^{-1})} = \dfrac{qw\nabla v}{\ln(AG^{-1})}, \psi = \dfrac{\varphi}{G^{1/2}w}$ e $|\nabla v|^2 = \dfrac{|\nabla G|^2}{G^2}$

$$\begin{aligned}2\int_\Sigma \psi^2|\nabla w|^2 G|\nabla v|^2 &= 2\int_\Sigma \frac{\varphi^2}{Gw^2}\cdot\frac{q^2w^2|\nabla v|^2}{\ln^2(AG^{-1})}\cdot G|\nabla v|^2 \\ &= 2\int_\Sigma \frac{q^2}{\ln^2(AG^{-1})}\varphi^2|\nabla v|^4 \leq \frac{1}{2\Gamma}\int_\Sigma \varphi^2|\nabla v|^4\end{aligned}$$

Voltando em (5.32) concluímos que

$$\int_\Sigma |\nabla\eta|^2|\nabla v|^2 G \leq C + \frac{1}{2\Gamma}\int_\Sigma \varphi^2|\nabla v|^4. \qquad (5.33)$$

Fazendo uso de (5.33) juntamente com (5.29), podemos obter de (5.29)

$$\int_\Sigma |\nabla v|^4\varphi^2 \leq C + \frac{1}{2}\int_\Sigma |\nabla v|^4\varphi^2.$$

Portanto, concluímos que

$$\int_\Sigma |\nabla v|^4\varphi^2 = \int_{B_p(R)\setminus B_p(2)} \frac{|\nabla G|^4}{G^3\ln^{2q}(AG^{-1})} \leq C.$$

Ao permitirmos $R \to \infty$, podemos inferir

$$\int_{\Sigma\setminus B_p(2)} \frac{|\nabla G|^4}{G^3\ln^{2q}(AG^{-1})} < \infty.$$

Isto conclui a prova do lema. □

Veja que usando o Lema 5.3.1 e a desigualdade de Cauchy-Schwarz segue

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Sigma\setminus B_p(2)} \frac{|\nabla G|^3}{G^2\ln^{2q}(AG^{-1})}\right)^2 &\leq \left(\int_{\Sigma\setminus B_p(2)} \frac{|\nabla G|^4}{G^3\ln^{2q}(AG^{-1})}\right)\left(\int_{\Sigma\setminus B_p(2)} \frac{|\nabla G|^2}{G\ln^{2q}(AG^{-1})}\right) \\ &\leq C\left(\int_{\Sigma\setminus B_p(2)} \frac{|\nabla G|^2}{G\ln^{2q}(AG^{-1})}\right).\end{aligned}$$

Utilizando (5.31) podemos garantir que a integral acima é finita para $q > 1/2$. Portanto,

$$\int_{\Sigma\setminus B_p(2)} \frac{|\nabla G|^3}{G^2\ln^{2q}(AG^{-1})} < \infty. \qquad (5.34)$$

Necessitamos agora de um resultado técnico. Para o que segue vamos continuar denotando por $G(x) = G(p, x)$ a função positiva de Green com polo em $p \in \Sigma$. Tendo em mente o conjunto

$$L(a, b) = \{x \in \Sigma \mid a < G(x) < b\},$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, vamos considerar a função

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{em } L(\varepsilon, +\infty), \\ \dfrac{\ln(G(x)) - \ln(\varepsilon^2)}{-\ln\varepsilon} & \text{em } L(\varepsilon^2, \varepsilon), \\ 0 & \text{em } L(0, \varepsilon^2). \end{cases} \quad . \tag{5.35}$$

Veja que χ talvez não possua suporte compacto, uma vez que G possa não convergir para zero quando $x \to \infty$. Portanto, consideraremos uma função cut-off

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{em } B_p(1), \\ r(x) - 1, & \text{em } B_p(2) \setminus B_p(1), \\ 1, & \text{em } B_p(R) \setminus B_p(2), \\ R + 1 - r(x), & \text{em } B_p(R+1) \setminus B_p(R), \\ 0, & \text{em } \Sigma \setminus B_p(R+1). \end{cases} \tag{5.36}$$

Lema 5.3.2. *Seja Σ uma hipersuperfície mínima completa e estável em uma variedade M. Suponha que para algum $A \geq 0$ e $C > 0$ valha*

$$(\lambda_0(\Sigma) - A) \int_\Sigma |\nabla G| \varphi^2 \leq C \int_\Sigma |\nabla G||\nabla\varphi|^2, \tag{5.37}$$

para $\varphi = \chi\psi$, onde φ e ψ são as funções definidas em (5.35) *e* (5.36)*, então temos*

$$\lambda_0(\Sigma) \leq A.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\lambda_0(\Sigma) > 0$ e assim Σ é não-parabolica. Inspirado na desigualdade $|a+b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são quaisquer, chegamos em

$$\begin{aligned} \int_\Sigma |\nabla G||\nabla\varphi|^2 &= \int_\Sigma |\nabla G||\chi\nabla\psi + \psi\nabla\chi|^2 \\ &\leq 2\int_\Sigma |\nabla G||\nabla\psi|^2\chi^2 + 2\int_\Sigma |\nabla G||\nabla\chi|^2\psi^2. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Note que para o primeiro termo da direita de (5.38) podemos utilizar (5.34) de modo a obter

$$\int_\Sigma |\nabla G||\nabla\chi|^2\psi^2 \leq \frac{1}{\ln^2\varepsilon} \int_{L(\varepsilon^2,\varepsilon)} \frac{|\nabla G|^3}{G^2} \leq \frac{C}{\ln^2\varepsilon} \ln^{2q}(1 + \varepsilon^{-2}),$$

Já para estimar o outro termo do lado direito de (5.38) veja que

$$\int_\Sigma |\nabla G||\nabla\varphi|^2\chi^2 \leq \left(\int_{B_p(R+1)\setminus B_p(R)} |\nabla G|^2\right)^{1/2} \left(\int_{(B_p(R+1)\setminus B_p(R))\cap L(\varepsilon^2,\varepsilon)} \chi^2\right)^{1/2} + C.$$

Iremos agora exibir duas estimativas de integral encontradas em [LW06]:

$$\int_{\Sigma\setminus B_p(R)} G^2 \leq C\exp\left(-2\sqrt{\lambda_0(\Sigma)}R\right),$$

$$\int_{\Sigma\setminus B_p(R)} |\nabla G|^2 \leq C\exp\left(-2\sqrt{\lambda_0(\Sigma)}R\right).$$

Em particular,

$$\int_{(B_p(R+1)\backslash B_p(R))\cap L(\varepsilon^2,\infty)} \chi^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^4}\int_{\Sigma\backslash B_p(R)} G^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^4}\exp\left(-2\sqrt{\lambda_0(\Sigma)}R\right)$$

disto segue,

$$\int_\Sigma |\nabla G||\nabla\psi|^2\chi^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^2}\exp\left(-2\sqrt{\lambda_0(\Sigma)}R\right) + C.$$

E assim, a desigualdade (5.38) se transforma em

$$\int_\Sigma |\nabla G||\nabla\varphi|^2 \leq \frac{C}{\ln^2\varepsilon}\ln^{2q}(1+\varepsilon^{-2}) + \frac{C}{\varepsilon^2}\exp\left(-2\sqrt{\lambda_0(\Sigma)}R\right) + C.$$

Retornando à desigualdade (5.37), nos vem que

$$(\lambda_0(\Sigma) - A)\int_\Sigma |\nabla G|\varphi^2 \leq C(\delta)\left[\frac{\ln^{2q}(1+\varepsilon^{-2})}{\ln^2\varepsilon} + \varepsilon^{-2}\exp\left(-2\sqrt{\lambda_0(\Sigma)}R\right) + C\right] \tag{5.39}$$

Vamos dar atenção ao primeiro termo do lado direito da expressão acima. Utilizando a regra de L'Hospital duas vezes nos vem que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln^{2q}(1+\varepsilon^{-2})}{\ln^2\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-2q\ln^{2q-1}(1+\varepsilon^{-2})(1+\varepsilon^{-2})^{-1}(-2\varepsilon^{-3})}{2\varepsilon^{-1}\ln\varepsilon}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{-2q\ln^{2q-1}(1+\varepsilon^{-2})}{(\varepsilon^2+1)\ln\varepsilon}\\
&= -2q(2q-1)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln^{2(q-1)}(1+\varepsilon^{-2})(1+\varepsilon^{-2})^{-1}(-2\varepsilon^{-3})}{2\varepsilon\ln\varepsilon + (\varepsilon^2+1)\varepsilon^{-1}}\\
&= 4q(2q-1)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln^{2(q-1)}(1+\varepsilon^{-2})}{(\varepsilon^2+1)(2\varepsilon^2\ln\varepsilon + \varepsilon^2+1)} = 0.
\end{aligned}$$

Utilizamos a regra de L'Hospital na primeira e na terceira igualdades expostas acima. No primeiro uso utilizamos que $1/2 < q$ e na última igualdade utilizamos $q < 1$.

Tendo em mente (5.39), ao tomar $R \to \infty$ e, em seguida, $\varepsilon \to 0$, concluímos

$$(\lambda_0(\Sigma) - A)\int_{\Sigma\backslash B_p(2)} |\nabla G| \leq C(\delta). \tag{5.40}$$

Contudo, como $|\nabla r| = 1$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz segue

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \langle \nabla G, \nabla r\rangle \leq |\nabla G||\nabla r| = |\nabla G|$$

e usando que G é uma função de Green, então $\Delta G(x,p) = -\delta_x(p)$ logo temos

$$\int_{\partial B_p(r)}\frac{\partial G}{\partial r} = \int_{B_p(r)}\Delta G = -1,$$

decorre da fórmula da co-área que

$$\int_{\Sigma\backslash B_p(2)}|\nabla G| = \int_2^\infty\left(\int_{\partial B_p(t)}|\nabla G|\right)dt \geq -\int_2^\infty\left(\int_{\partial B_p(r)}\frac{\partial G}{\partial r}\right)dt = \infty.$$

Portanto concluímos de (5.40) que vale $\lambda_0(\Sigma) \leq A$. □

Teorema 5.5. *Seja Σ uma hipersuperfície mínima completa e estável em uma variedade $(n+1)$-dimensional M, onde $2 \leq n \leq 5$. Se a curvatura seccional de M satisfaz $Sec_M \geq -\kappa$ para alguma constante não negativa κ, então*

$$\lambda_0(\Sigma) \leq \frac{2n(n-1)^2}{6n-n^2-1}\kappa.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade iremos supor que $\kappa = 1$ e $\lambda_0(\Sigma) > 0$. Como já sabemos, estas condições implicam que Σ é não-parabólica. Fixado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, definamos as funções χ e ψ como em (5.35) e (5.36). Além disso, considere a função $\varphi = \chi\psi$. Utilizando a desigualdade $2ab \leq \delta a^2 + b^2/\delta$, nós obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \varphi \langle \nabla\varphi, \nabla|\nabla G|\rangle &\leq \int_\Sigma |\varphi||\nabla\varphi||\nabla|\nabla G|| = \int_\Sigma |\varphi||\nabla|\nabla G|||\nabla G|^{-1/2} \cdot |\nabla G|^{1/2}|\nabla\varphi| \\ &\leq \delta \int_\Sigma \varphi^2|\nabla|\nabla G||^2|\nabla G|^{-1} + C(\delta)\int_\Sigma |\nabla G||\nabla\varphi|^2\end{aligned}$$

para todo $\delta > 0$. Já pela desigualdade de Poincaré (5.3) obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_0(\Sigma)\int_\Sigma |\nabla G|\varphi^2 &\leq \int_\Sigma |\nabla(|\nabla G|^{1/2}\varphi)|^2 \\ &= \frac{1}{4}\int_\Sigma |\nabla|\nabla G||^2|\nabla G|^{-1}\varphi^2 + \int_\Sigma \varphi\langle\nabla\varphi, \nabla|\nabla G|\rangle + \int_\Sigma |\nabla G||\nabla\varphi|^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{4}+\delta\right)\int_\Sigma |\nabla|\nabla G||^2|\nabla G|^{-1}\varphi^2 + C(\delta)\int_\Sigma |\nabla G||\nabla\varphi|^2, \qquad (5.41)\end{aligned}$$

Veja que de (5.9) e (5.16) chegamos em

$$\begin{aligned}\Delta|\nabla G| &\geq \frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla G||^2|\nabla G|^{-1} + \mathrm{Ric}_\Sigma(\nabla G, \nabla G)|\nabla G|^{-1} \\ &\geq \frac{1}{n-1}|\nabla|\nabla G||^2|\nabla G|^{-1} - \left((n-1) + \frac{n-1}{n}|\mathrm{II}|^2\right)|\nabla G|.\end{aligned}$$

Logo, multiplicando a desigualdade acima por φ^2 e integrando nos vem que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n-1}\int_\Sigma |\nabla|\nabla G||^2|\nabla G|^{-1}\varphi^2 \\ &\quad\leq \int_\Sigma \varphi^2\Delta|\nabla G| + (n-1)\int_\Sigma |\nabla G|\varphi^2 + \frac{n-1}{n}\int_\Sigma |\mathrm{II}|^2|\nabla G|\varphi^2 \\ &\quad= -\int_\Sigma \left\langle\nabla\varphi^2, \nabla|\nabla G|\right\rangle + (n-1)\int_\Sigma |\nabla G|\varphi^2 + \frac{n-1}{n}\int_\Sigma |\mathrm{II}|^2|\nabla G|\varphi^2. \qquad (5.42)\end{aligned}$$

Por outro lado, a desigualdade de estabilidade nos mostra que o último termo da desigualdade acima por ser majorado do seguinte modo

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |\mathrm{II}|^2|\nabla G|\varphi^2 &\leq \int_\Sigma |\nabla(|\nabla G|^{1/2}\varphi)|^2 + n\int_\Sigma |\nabla G|\varphi^2 \\ &\leq \frac{1}{4}\int_\Sigma |\nabla|\nabla G||^2|\nabla G|^{-1}\varphi^2 + \int_\Sigma |\nabla G||\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2}\int_\Sigma \left\langle\nabla\varphi^2, \nabla|\nabla G|\right\rangle + n\int_\Sigma |\nabla G|\varphi^2.\end{aligned}$$

Desse modo, segue de (5.42) que

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n-1} - \frac{n-1}{4n}\right)\int_\Sigma |\nabla|\nabla G||^2|\nabla G|^{-1}\varphi^2 \\ &\quad\leq 2(n-1)\int_\Sigma |\nabla G|\varphi^2 + C\int_\Sigma |\nabla G|\nabla\varphi|^2 + C\int_\Sigma \left|\left\langle\nabla\varphi^2, \nabla|\nabla G|\right\rangle\right| \\ &\quad\leq 2(n-1)\int_\Sigma |\nabla G|\varphi^2 + C(\delta)\int_\Sigma |\nabla G||\nabla\varphi|^2 + \delta\int_\Sigma |\nabla|\nabla G||^2|\nabla G|^{-1}\varphi^2. \qquad (5.43)\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{1}{n-1} - \frac{n-1}{4n} - \delta = \frac{6n - n^2 - 1 - 4n(n-1)\delta}{4n},$$

após uma manipulação simples dos termos de (5.43) obtemos

$$\int_\Sigma |\nabla|\nabla G||^2 |\nabla G|^{-1} \varphi^2 \leq \frac{8n(n-1)^2}{6n - n^2 - 1 - 4n(n-1)\delta} \int_\Sigma |\nabla G| \varphi^2 + C(\delta) \int_\Sigma |\nabla G||\nabla \varphi|^2.$$

Portanto, aplicando na expressão (5.41) decorre

$$\left(\lambda_0(\Sigma) - \left(\frac{1}{4} + \delta \right) \frac{8n(n-1)^2}{6n - n^2 - 1 - 4n(n-1)\delta} \right) \int_\Sigma |\nabla G| \varphi^2 \leq C(\delta) \int_\Sigma |\nabla G||\nabla \varphi|^2.$$

Com base no Lema 5.3.2, obtemos

$$\lambda_0(\Sigma) \leq \left(\frac{1}{4} + \delta \right) \frac{8n(n-1)^2}{6n - n^2 - 1 - 4n(n-1)\delta}.$$

Finalmente, ao fazer $\delta \to 0$, concluímos que

$$\lambda_0(\Sigma) \leq \frac{2n(n-1)^2}{6n - n^2 - 1} \kappa.$$

Isto completa a demonstração deste teorema. □

Referências

[Alm66] Frederick J. Almgren. Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of bernstein's theorem. *Annals of Mathematics*, 84:277, 1966. Citado na página 8.

[BCC11] Pierre Bérard, Philippe Castillon, and Marcos Cavalcante. Eigenvalue estimates for hypersurfaces in $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ and applications. *Pacific J. Math.*, 253(1):19–35, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 9, 52 e 53.

[BCS14] M. Batista, M. P. Cavalcante, and N. L. Santos. The p-hyperbolicity of infinity volume ends and applications. *Geom. Dedicata*, 171:397–406, 2014. Citado na página 51.

[BdGG69] Enrico Bombieri, Ennio de Giorgi, and Enrico Giusti. Minimal cones and the bernstein problem. *Inventiones mathematicae*, 7:243–268, 1969. Citado na página 8.

[CL21] Otis Chodosh and Chao Li. Stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$. *Aceito em Acta Math., arXiv e-prints*, page arXiv:2108.11462, 2021. Citado na página 9.

[CL23] Otis Chodosh and Chao Li. Stable anisotropic minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$. *Forum Math. Pi*, 11:Paper No. e3, 22, 2023. Citado na página 9.

[CLMS24] Otis Chodosh, Chao Li, Paul Minter, and Douglas Stryker. Stable minimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^5$. *arXiv e-prints*, page 2401.01492, 2024. Citado na página 9.

[CM04] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II. The space of embedded minimal surfaces of fixed genus in a 3-manifold. II. Multi-valued graphs in disks. *Ann. of Math. (2)*, 160(1):69–92, 2004. Citado na página 44.

[CM11] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi. *A course in minimal surfaces*, volume volume 121 of *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011. Citado na página 27.

[CMI02] Tobias Colding and William Minicozzi II. Estimates for parametric elliptic integrands. *International Mathematics Research Notices*, 2002(6):291, 2002. Citado na página 34.

[CMR22] Giovanni Catino, Paolo Mastrolia, and Alberto Roncoroni. Two rigidity results for stable minimal hypersurfaces. *to appear in Geom. Funct. Anal., arXiv e-prints*, page arXiv:2209.10500, 2022. Citado na página 9.

[CY75] S. Y. Cheng and S. T. Yau. Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 28(3):333–354, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 51.

[dC15] Manfredo Perdigão do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 5th edition, 2nd printing edition, 2015. Citado na página 11.

[dCP79] M. do Carmo and C. K. Peng. Stable complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ are planes. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1:903–906, 1979. Citado 4 vezes nas páginas 6, 7, 8 e 33.

[FCS80] D. Fischer-Colbrie and Richard M. Schoen. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33:199–211, 1980. Citado 4 vezes nas páginas 6, 7, 8 e 33.

[Fia41] F. Fiala. Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive. *Commentarii mathematici Helvetici*, 13:293–346, 1940/41. Citado na página 22.

[Fle62] Wendell H. Fleming. On the oriented plateau problem. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11:69–90, 1962. Citado na página 8.

[Gio65] Ennio De Giorgi. Una estensione del teorema di bernstein. *Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-classe Di Scienze*, 19:79–85, 1965. Citado na página 8.

[Gri99] Alexander Grigor'yan. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 36(2):135–249, 1999. Citado na página 54.

[Jos17] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer, Cham, seventh edition edition, 2017. Literaturverzeichnis: Seite 675-689. Citado na página 11.

[Lab15] Olivier Lablée. *Spectral theory in Riemannian geometry*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

[Lee18] John M. Lee. Introduction to riemannian manifolds, 2018. Citado na página 11.

[Li12] Peter Li. *Geometric analysis*, volume 134 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 26, 52 e 53.

[Lim81] Elon Lages Lima. *Curso de análise. Vol. 2*, volume 13 of *Projeto Euclides*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981. Citado na página 26.

[LT87] Peter Li and Luen-Fai Tam. Symmetric Green's functions on complete manifolds. *Amer. J. Math.*, 109(6):1129–1154, 1987. Citado na página 53.

[LW01] Peter Li and Jiaping Wang. Complete manifolds with positive spectrum. *J. Differential Geom.*, 58(3):501–534, 2001. Citado na página 52.

[LW06] Peter Li and Jiaping Wang. Weighted Poincaré inequality and rigidity of complete manifolds. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 39(6):921–982, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 9, 56 e 62.

[Mal56] Bernard Malgrange. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 6:271–355, 1955/56. Citado na página 53.

[MSW23] Ovidiu Munteanu, Chiung-Jue Anna Sung, and Jiaping Wang. Area and spectrum estimates for stable minimal surfaces. *J. Geom. Anal.*, 33(2):Paper No. 40, 34, 2023. Citado 7 vezes nas páginas 6, 7, 8, 9, 10, 38 e 44.

[Net14] Antonio Muniz Caminha Neto. *Tópicos de Geometria Diferencial*. Coleção Fronteiras da Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 1a edition, 2014. Citado na página 18.

[Pog81] A. V. Pogorelov. On the stability of minimal surfaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 260(2):293–295, 1981. Citado 6 vezes nas páginas 6, 7, 8, 22, 33 e 43.

[Sak96] Takashi Sakai. *Riemannian geometry*, volume 149 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Translated from the 1992 Japanese original by the author. Citado na página 21.

[Sim68] James Simons. Minimal varieties in riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 88:62–105, 1968. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 33.

[SS81] Richard Schoen and Leon Simon. Regularity of stable minimal hypersurfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 34(6):741–797, 1981. Citado na página 9.

[SSY75] R. Schoen, L. Simon, and S. T. Yau. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. *Acta Math.*, 134(3-4):275–288, 1975. Citado na página 9.

[SY79] R. Schoen and Shing-Tung Yau. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature. *Annals of Mathematics*, 110(1):127–142, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 54.