Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Decaimento de Correlações para o Mapa de Manneville-Pomeau

Jandir Gomes de Souza Tavares

Maceió - AL
Novembro de 2022

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Decamento de Correlações para o Mapa de Manneville-Pomeau

por

Jandir Gomes de Souza Tavares

sob a orientação do

Prof. Dr. Rafael Nobrega de Oliveira Lucena

Maceió - AL
Novembro de 2022

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

T231d Tavares, Jandir Gomes de Souza.
Decaimento de correlações para o mapa de Manneville-Pomeau / Jandir Gomes de Souza Tavares. - 2022.
70 f. : il.

Orientador: Rafael Nobrega de Oliveira Lucena.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 70.

1. Manneville-Pomeau, Mapa de. 2. Cones invariantes. 3. Perron-Frobenius, Teorema de. I. Título.

CDU: 519.218.84

Decaimento de Correlações para o Mapa de Manneville-Pomeau

por

Jandir Gomes de Souza Tavares

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos

Aprovada em 20 de Dezembro de 2022.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena (UFAL)
(Orientador)

Prof. Dra. Maria José Pacífico (IM - UFRJ)
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Rafael Alvarez Bilbao (UPCT)
(Examinador Externo)

A minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que sempre me deu saúde, força e coragem a cada dia para seguir em frente.

À minha família, em especial aos meus pais pela boa educação e incentivos durante toda essa trajetória.

Ao meu orientador Prof. Rafael Lucena pelo apoio e dedicação durante toda essa trajetória, pelas conversas, incentivos e motivações durante os encontros que tornaram possível toda a elaboração deste trabalho.

Aos professores Wagner Ranter, Davi Lima e Krerley Oliveira pelas contribuições fundamentais durante a apresentação de alguns resultados presentes neste trabalho nos seminários de Sistemas Dinâmicos.

Aos meus amigos da pós-graduação, em especial a primeira turma durante o período da pandemia, Sandra Marinho, Rodrigo Costa, Eduardo Soares e Marta de Fátima onde passamos momentos difíceis durante a adaptação ao ensino remoto, mas que as reuniões de estudos foram essenciais para o avanço nas disciplinas durantes esses três anos de estudo, em especial aos meus amigos de outras turmas da pós-graduação Talita Araújo, Cicero Calheiros, Matheus Martins, Wagner Xavier, Pedro Carvalho e Gustavo Kayk pelos momentos de conversas e descontração.

Aos meus amigos da turma dos "Renegados", Lucas Menezes, Janeíne Valido, Ricardo Max e Miguel Antônio que compartilham comigo diariamente os desafios de trazer uma educação de qualidade para o nosso ambiente de trabalho.

Aos meus amigos da turma dos "Lisos", Alan César, Camila Lima, Dayane Soares, Matheus Hadrien e Fernando Alves, por todos os momentos de lazer durante esse três anos de estudos.

Ao melhor grupo de estudos da pós-graduação que já existiu, formado por Rodrigo Costa, Deígerson Lopes e Eduardo Soares, pelas dicas nas questões, discussões de resultados, teoremas e estratégias de estudo durante esses três anos de estudo.

A professora Maria Andrade que foi a primeira incentivadora para o ingresso na pós-

graduação e uma inspiradora para desenvolvendo do estudo acadêmico.

A turma do "Tibia", em especial Alan César, Alyson Lucas e João Matheus que foram fundamentais no período da pandemia com as conversas e horários de descontração.

Aos meus amigos Davis Magalhães e Raphael Omena que estão distantes com suas atividades acadêmicas, mas ainda mandam aquele incentivo e motivação quando necessário.

Aos Professores e colegas que conheci durante esse período de graduação e pós-graduação pelas contribuições e experiências adquiridas.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos propriedades ergódicas do Mapa de Manneville-Poumeau. Mais precisamente, provaremos que tal dinâmica possui uma probabilidade invariante, equivalente a medida de Lebesgue, cuja densidade é localmente Lipschitz. Provaremos também que tal transformação possui decaimento polinomial de correlações sobre o espaço L^{∞} e C_1. Para obter o primeiro resultado, construiremos cones, com propriedades de compacidade, invariantes pela ação do operador de Transferência. Para o segundo, utilizaremos técnicas de perturbação de operadores. Os resultados obtidos neste trabalho foram desenvolvidos por C. Liverani, B. Saussol e S. Vaienti em [5].

Palavras-chave: Mapa de Manneville-Pomeau, Cones Invariantes, Operador de Perron-Frobenius, Decaimento polinomial de correlações.

Abstract

In this work, we will study ergodic properties of the Manneville-Poumeau Map. More precisely, we will prove that such dynamics has an invariant probability, equivalent to the Lebesgue measure, whose density is locally Lipschitz. We will also prove that such a transformation has polynomial decay of correlations over the space L^{∞} and C_1. To obtain the first result, we will build cones, with compactness properties, invariant by the action of the Transfer operator. For the second, we will use operator perturbation techniques. The results obtained in this work were developed by C. Liverani, B. Saussol and S. Vaienti in [5].

Keywords: Manneville-Pomeau map, Invariant Cones, Perron-Frobenius Operator, Polynomial decay of correlations.

Sumário

Introdução

Por sistema dinâmico, entendemos uma função mensurável $T : M \longrightarrow M$ definida num espaço de medida M. A área da Matemática conhecida como Sistemas Dinâmicos se concentra em estudar o que ocorre com os iterados da dinâmica estudada. Ou seja, com a função mensurável $T^n : M \longrightarrow M$. Do ponto de vista lúdico, poderíamos dizer que Sistemas Dinâmicos é a área da Matemática que se dedica a estudar os diversos aspectos apresentados por sistemas que evoluem com o tempo, sejam eles assimtóticos (quanto n tende ao infinito) ou características apresentadas em tempo finito.

Dentre estas características de interesse de uma dinâmica T está a propriedade chamada de Decaimento de Correlacões associada a uma medida. Definindo mais precisamente, considere duas funções $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que pertencem a dois espaços de funções B_1 e B_2, respectivamente. Suponha que μ é uma medida definida em M. Defina

$$C_n(f,g) := \int (f \circ T^n) g d\mu - \int f d\mu \int g d\mu, \ n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que o sistema (f, μ) tem *decaimento de correlações* sobre os espaços B_1 e B_2 se

$$\lim_{n \to \infty} C_n(f,g) = 0 \tag{1}$$

para todas as funções $f \in B_1$ e $g \in B_2$. O número $C_n(f,g)$ é chamado de *n-ésimo coeficiente de correlação das funções f e g.*

A importância da propriedade acima pode ser interpretada de diversas maneiras. Suponha que T^n modele matematicamente o movimento de partículas de gás dentro de um compartimento isolado que denotaremos por M. Poderíamos estar interessados em realizar medições neste sistema dinâmico. Por exemplo, calcular a temperatura, pressão ou densidade nos diversos pontos do compartimento M. Essas medições serão representadas por uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ que chamaremos de *observável f*. Estamos interessados em saber como o movimento das partículas de gás influenciam na observável f no ponto x do compartimento M. Matematicamente, queremos saber o que ocorre com $f \circ T^n(x)$ para os diversos valores de n. Em particular, isto se resume a analisar o comportamento da sequência $(f \circ T^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. Em geral, isto não é uma tarefa simples. No entanto, quando a medida μ em questão é invariante, sabemos que, em termos médios, ou seja considerando a sequência de médias $(\int f \circ T^n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ a resposta é dada pela igualdade $\int f \circ T^n d\mu = \int f \circ T d\mu$. Em outras palavras, a médias das observáveis com relação a medida invariante μ não altera com o passar do tempo. Assim, temos que $\lim \int f \circ T^n d\mu = \int f \circ T d\mu$.

Sendo μ uma medida T-invariante, poderíamos perguntar: poderíamos estudar o comportamento das médias para outros tipos de medidas? Por exemplo, aquelas que são absolutamente contínuas com relação a μ? Isto é equivalente a estudar o comportamento da sequência $(\int f \circ T^n dg\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ e investigar a existência do limite

$$\lim \int (f \circ T^n) dg\mu = \lim \int f \circ T^n g d\mu.$$

Daí naturalmente surge o conceito de decaimento de correlações. Quando o sistema em questão tem esta propriedade sobre os espaços B_1 e B_2 então concluímos que tal limite existe e vale $\lim \int (f \circ T^n) g d\mu = \int f d\mu \int g d\mu$, $n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, quando há decaimento de correlações, as médias de todas as observáveis f de B_1 realizadas com relação a todas as medidas absolutamente contínuas cujas densidades são elementos g de B_2 convergem para o produto das médias de f e g.

Neste texto nós provaremos que o mapa de Manneville-Pomeau, definido por $T : [0,1] \to [0,1]$ e

$$T(x) = \begin{cases} x(1 + 2^\alpha x^\alpha), & \forall\ x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1, & \forall\ x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

com $0 < \alpha < 1$, possui decaimento de correlações sobre os espaços $C^1([0,1])$ e L^∞_m. Além disso, provaremos que a velocidade de convergência do limite dado pela equação (1) é polinomial (ver Teorema 4.2.3). Ou seja, estudaremos o artigo *A Probabilistic Approach to Intermittency* ao qual foi escrito por Carlangelo Liverani, Benoît Saussol e Sandro Vaienti, publicado em 1997.

O sistema de Maneville-Pomeau é um exemplo de dinâmica não-uniformemente expansora que provaremos admite uma probabilidade invariante μ, absolutamente contínua com relação a Lebesgue, cuja densidade h é localmente Lipschitz (ver Teorema 2.2.5). Conectando com uma pesquisa mais recente, no artigo [2], foi mostrado que sistemas do tipo $F(x,y) = (T(x), G(x,y))$ onde T é não-uniformemente expansora e $G(x,y)$ é uma contração nas fibras (ver [2], capítulo 2) possuem decaimento exponencial de correlações sobre o espaço das funções Holders e com relação a medidas F-invariantes, ν, que se projetam em certas medidas T-invariantes, λ, com relação as quais T a velocidade de decaimento de correlações é exponencial. Nenhuma dessas medidas λ pode ser μ, já que para este sistema foi provado que a velocidade polinomial é optimal.

Então poderíamos formular a seguinte questão: seja ν uma medida F-invariante que se projeta[1] na medida μ, T-invariante, cuja existência foi provada no Teorema 2.2.5. A

[1]Projetar-se na medida μ, significa que $\mu = \pi_{1*}\nu$ onde $\pi_1(x,y) = x$ (ver [2], Lema 5.3, página 6806).

dinâmica F possui decaimento de correlações com relação a μ? Sobre quais espaços de funções? A velocidade é polinomial, assim como (T, μ)? Este é um tema de interesse.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No capítulo 1 introduzimos alguns temas que serão necessários para um bom entendimento dos capítulos posteriores. Nele apresentamos algumas definições e resultados úteis sobre teoria da medida e teoria ergódica e um breve estudo sobre o Operador de Perron-Frobenius.

No capítulo 2, vamos conhecer o nosso mapa de Manneville-Pomeau, definir alguns cones que possuem a propriedade de serem invariantes em relação ao Operador de Perron-Frobenius e obter um ponto fixo h para esse operador que é uma função localmente Lipschitz.

No capítulo 3, iremos realizar uma pertubação no mapa e obter alguns lemas e proposições que irão nos auxilar na demonstração do nosso resultado principal.

Finalmente, no capítulo 4, apresentaremos a demonstração do resultado principal, onde iremos provar que o Mapa de Manneville-Pomeau possui decaimento polinomial das funções correlações.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo iremos revisar alguns conceitos básicos e resultados de Teoria da Medida e Teoria Ergódica necessários para uma boa leitura e compreensão do presente trabalho.

1.1 Resultados e Conceitos Básicos

Dado um subconjunto $A \subset X$ denotaremos por A^c o *complementar* $X \backslash A$ do conjunto A em relação a X

Definição 1.1.1. Uma *álgebra* de X é uma família $\mathcal{X}$ de subconjuntos de X que é fechada para as operações elementares de conjuntos e contém o conjunto vazio, isto é, tal que

1) $\emptyset \in \mathcal{X}$

2) $A \in \mathcal{X}$ implica $A^c \in \mathcal{X}$

3) $A \in \mathcal{X}$ e $B \in \mathcal{X}$ implica $A \cup B \in \mathcal{X}$.

Definição 1.1.2. Uma álgebra diz-se uma *σ-álgebra* de subconjuntos de X se também for fechada para as uniões enumeráveis.

- $A_j \in \mathcal{X}$, para $j = 1, 2, ..., n, ...$ implica $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{X}$.

Definição 1.1.3. Um *espaço mensurável* é uma dupla $(X, \mathcal{X})$ onde X é um conjunto e $\mathcal{X}$ é uma álgebra de subconjuntos de X. Os elementos de $\mathcal{X}$ são chamados *conjuntos mensuráveis do espaço.*

Definição 1.1.4. Uma *medida* em $(X, \mathcal{X})$ é uma função $m : \mathcal{X} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j)$$

para qualquer família enumerável de conjuntos $A_j \in \mathcal{X}$ disjuntos dois a dois. Esta última propriedade é chamada *σ-aditividade*. A tripla $(X, \mathcal{X}, m)$ é chamada *espaço de medida*. Quando vale $m(X) < +\infty$ dizemos que m é *uma medida finita* e se $m(X) = 1$ dizemos que m é uma *probabilidade*. Neste último caso, $(X, \mathcal{X}, m)$ é um *espaço de probabilidade*.

Definição 1.1.5. A *σ-álgebra gerada* por uma família $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X é a menor σ-álgebra $\sigma(\mathcal{E})$ que contém a família $\mathcal{E}$, ou seja, é a intersecção de todas as σ-álgebra que contêm $\mathcal{E}$.

Definição 1.1.6. A *σ-álgebra de Borel* (ou σ-álgebra boreliana) de um espaço topológico é a σ-álgebra $\sigma(\tau)$ gerada pela topologia τ, isto é, a menor σ-álgebra que contém todos os subconjuntos abertos. Neste caso, os conjuntos mensuráveis recebem o nome de borelianos.

A medida de Lebesgue formaliza a noção de volume de subconjunto do espaço euclideano $\mathbb{R}^d$.

Definição 1.1.7. Consideremos $X = [0, 1]$ e seja $\mathcal{A}$ a família de todos os subconjuntos da forma $A = I_1 \cup \ldots \cup I_N$ onde $I_1, I_2, ..., I_N$ são intervalos disjuntos dois-a-dois. É fácil ver que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de X. Além dsso, temos uma função $m_0 : \mathcal{A} \to [0, 1]$ definida nesta álgebra por

$$m_0(I_1 \cup \ldots \cup I_N) = |I_1| + \cdots + |I_N| \tag{1.1}$$

onde $|I_j|$ representa o comprimento de cada intervalo I_j. Note que $m_0(X) = 1$. Observe que a σ-álgebra $\mathcal{B}$ gerada por $\mathcal{A}$ coincide com a σ-álgebra de Borel de X, já que todo conjunto aberto pode ser escrito como união enumerável de intervalos abertos disjuntos dois-a-dois. Podemos mostrar que existe uma única probabilidade m definida em $\mathcal{B}$ que é uma extensão de m_0. Chamamos m de medida de Lebesgue em $[0, 1]$.

Exemplo 1.1.8. Dado um conjunto $A \subset X$ definimos a *função característica* $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ de A por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in A \\ 0, & se\ x \notin A \end{cases}$$

Definição 1.1.9. Seja $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}$ uma função simples. Então a integral de s em relação à medida m é dada por:

$$\int s\ dm = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j m(A_j).$$

Proposição 1.1.10. *Seja $f : X \to [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável. Então existe uma sequência $(s_n)_n$ de funções simples tal que $|s_n(x)| \leq |f(x)|$ para todo n e*

$$\lim_n s_n(x) = f(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Se f é limitada, a sequência pode ser escolhida tal que a convergência seja uniforme. Se f é não negativa, podemos tomar $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$.

Demonstração. Ver [1], Página 13. □

Definição 1.1.11. Seja $f : X \to [0, +\infty]$ uma função mensurável não negativa. Então

$$\int f \, dm = \lim_n \int s_n \, dm$$

onde $s_1 \leq s_2 \leq \cdots$ é uma sequência não decrescente de funções simples tal que $\lim_n s_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Agora, para estender a definição de integral a qualquer função mensurável observamos que dada uma função $f : X \to [-\infty, +\infty]$ sempre podemos escrever $f = f^+ - f^-$ com

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

É claro que as funções f^+ e f^- são não negativas.

Definição 1.1.12. Seja $f : X \to [-\infty, +\infty]$ uma função mensurável. Então

$$\int f dm = \int f^+ dm + \int f^- dm.$$

Desde que pelo menos uma das integrais do lado direito seja finita (valem as convenções usuais $(+\infty) - a = +\infty$ e $a - (+\infty) = -\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Definição 1.1.13. Dizemos que uma função $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é integrável se for mensurável e a sua integral for um número real. Denotamos o conjunto das funções integráveis por $L^1(X, \mathbf{X}, m)$ ou simplesmente por $L^1_{(m)}$.

Proposição 1.1.14. *O conjunto $L^1_{(m)}$ das funções reais integráveis é um espaço vetorial real. Além disso, a aplicação $I : L^1_{(m)} \to \mathbb{R}$ dada por $I(f) = \int f dm$ é um funcional linear positivo, ou seja,*

1) $\int (af + bg) dm = a \int f dm + b \int g dm,$

2) $\int f dm \geq \int g dm$ *se* $f(x) \geq g(x)$ *para todo* x.

Em particular, $\left| \int f dm \right| \leq \int |f| dm$ *se* $|f| \in L^1_{(m)}$. *Além disso,* $|f| \in L^1_{(m)}$ *se, e somente se,* $f \in L^1_{(m)}$.

Demonstração. Ver [1], Página 43. □

Definição 1.1.15. Dizemos que uma propriedade é válida em m-quase todo ponto(ou m-qtp) se é válida em todo o X exceto , possivelmente, num conjunto de medida nula.

Por exemplo, dizemos que uma sequência de funções $(f_n)_n$ converge para uma função em m-quase todo ponto se existe um conjunto mensurável N com $m(N) = 0$ tal que $f(x) = \lim f_n(x)$ para todo $x \in X \backslash N$. Neste caso, supondo que as funções sejam integráveis, as suas integrais coincidem

$$\int f dm = \int g dm \quad se \qquad f = g \; em \; m - quase \; todo \; ponto.$$

Está observação permite definir integral para qualquer função f, possivelmente não mensurável, que é igual em m-quase todo ponto a uma função mensurável g: basta tomar $\int f dm = \int g dm.$

Definição 1.1.16. Dada uma função mensurável $f : X \to [-\infty, \infty]$ e um conjunto mensurável E definimos a integral de f sobre E por

$$\int_E f dm = \int f \chi_E dm$$

onde χ_E é a função característica do conjunto E.

Teorema 1.1.17. ***(Convergência Monótona)*** *Seja $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ uma sequência não-decrescente de funções mensuráveis não negativas e seja $f : X \to [-\infty, +\infty]$ a função definida por $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Então*

$$\lim_n \int f_n(x) dm = \int f(x) dm.$$

Demonstração. Ver [1], página 31. □

Teorema 1.1.18. ***(Lema de Fatou)*** *Seja $f_n : X \to [0, +\infty]$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas. Então, a função $f : X \to [-\infty, +\infty]$ definida por $f(x) = \liminf_n f_n(x)$ é integrável e vale*

$$\liminf_n f_n(x) dm \leq \liminf_n \int f_n dm.$$

Demonstração. Ver [1], página 33. □

Teorema 1.1.19. ***(Convergência Dominada)*** *Seja $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis e suponha que existe uma função integrável g tal que $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ para m-quase todo ponto x em X. Suponha também que a sequência $(f_n)_n$ converge em m-quase todo ponto para uma função $f : X \to \mathbb{R}$. Então f é integrável e vale:*

$$\lim_n \int f_n dm = \int f dm.$$

Demonstração. Ver [1], página 44. □

Definição 1.1.20. Sejam m e μ duas medidas num mesmo espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$. Dizemos que μ é *absolutamente contínua em relação a m se todo conjunto mensurável E que satisfaz $m(E) = 0$ também satisfaz $\mu(E) = 0$. Nesse caso, escrevemos $\mu \ll m$.*

Dizemos que m e μ são *equivalentes*, e escrevemos, $m \sim \mu$, se cada uma delas for absolutamente contínua em relação à outra. Em outras palavras duas medidas são equivalentes se elas têm os mesmo conjuntos com medida nula.

Teorema 1.1.21. ***(Radon-Nikodýn)*** *Se m e μ são medidas finitas tais que $\mu \ll m$, então existe uma função mensurável $\rho : X \to [0, +\infty]$ tal que $\mu = \rho m$, ou seja, tal que*

$$\int \phi \, d\mu = \int \phi\rho \, dm$$

para toda função mensurável limitada $\phi : X \to \mathbb{R}$.
Em particular, $\mu(E) = \int_E \rho dm$ para todo conjunto mensurável $E \subset X$. Além disso, ρ é essencialmente única: duas quaisquer funções que satisfazem o Teorema 1.1.17 são iguais em m-quase todo ponto. Chamamos ρ de densidades, ou derivada de Radon-Nikodýn, de μ relativamente a m e escrevemos

$$\rho = \frac{d\mu}{dm}.$$

Demonstração. Ver [1], página 85. □

Teorema 1.1.22. ***(Teorema de Tonelli)*** *Sejam $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ espaços de medidas σ-finitos e seja F uma função mensurável não negativa em $Z = X \times Y$. Então as funções definidas em X e Y por*

$$f(x) = \int_Y F_x d\nu \qquad , \quad g(y) = \int_X F_y d\mu$$

são mensuráveis e

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\nu.$$

Em outras palavras,

$$\int_X \left(\int_Y F d\nu \right) d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y \left(\int_X F d\mu \right) d\nu.$$

Demonstração. Ver [1], página 118. □

Teorema 1.1.23. ***(Teorema de Fubini)*** *Sejam $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ espaços σ-finitos e seja a medida π em $Z = X \times Y$ o produto de μ e ν. Se a função F em $Z = X \times Y$ em $[-\infty, +\infty]$ for integrável em relação a π, então as funções estendidas de valor real definidas em quase todos os lugares por*

$$f(x) = \int_Y F_x d\nu \qquad , \quad g(y) = \int_X F_y d\mu$$

tem integral finita e

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\nu.$$

Em outras palavras,

$$\int_X \left(\int_Y F d\nu \right) d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y \left(\int_X F d\mu \right) d\nu.$$

Demonstração. Ver [1], página 119. □

Dado qualquer $p \in [1, \infty)$, dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função *p-integrável* com relação a m se a função $|f|^P$ é integrável com relação a m. Se $p = 1$ isto é o mesmo que dizer que a função f é integrável.

Definição 1.1.24. Denotamos por $L^p_{(m)}$ o *conjunto das funções reais p-integráveis* com relação a m.

Definição 1.1.25. Para cada função $f \in L^p_m$, definimos a norma L^p de f:

$$||f||_p = \left(\int |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.1.26. Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *essencialmente limitada* com relação a m se existe uma constante $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$ em m-quase todo ponto. Nesse caso, chamaremos *supremo essencial* de f, e denotamos por $supress_m(f)$, o ínfimo dos valores de K satisfazendo essa condição.

Definição 1.1.27. Denotaremos por $L^\infty_{(m)}$ o conjunto das funções reais essencialmente limitadas com relação a m. Podemos definir uma norma em $L^\infty_{(m)}$ por

$$||f||_\infty = supress_m(f).$$

Definição 1.1.28. Um sistema dinâmico é um par (T, m) onde $T : I \to I$ é uma função mensurável e m é a medida.

Definição 1.1.29. (Mapa Intermitente) Seja $T : [0, 1] \to [0, 1]$ um mapa tal que:

1) Existem $P_1, P_2, \cdots, P_q$, tais que $P_i = (a_{i-1}, a_i)$, com $a_i < a_{i+1}$ e $0 \leq i \leq q - 1$ onde $a_0 = 0$ e $a_q = 1$.

2) $T_i = T_{|P_i} : P_i \to (0, 1)$ é uma bijeção e

3) T_i é de Classe C^1.

(4) $T'(x) > 1, \forall\, x \in (0,1]$, $T'(0) = 1$ e $T(0) = 0$.

Um mapa que satisfaz essas quatro condições será chamado de *mapa intermitente.*

Definição 1.1.30. Considere o espaço de medida $(X, \mathcal{X}, m)$ e $T : X \to X$ uma transformação mensurável, tal que $T^{-1}(A) \in \mathcal{X}$, $\forall\, A \in \mathcal{X}$. Dizemos que m é uma medida *T-invariante* se

$$m(T^{-1}(A)) = m(A),$$

$\forall\, A \in \mathcal{X}$.

Definição 1.1.31. Uma medida m em $\mathcal{X}$ é não singular em relação a T se

$$T^{*}m \ll m \tag{1.2}$$

ou seja, dado $A \in \mathcal{X}$ com $m(A) = 0$, temos $T * m(A) = 0$. Nesse caso, $T * m$ significa a medida em $\mathcal{X}$ definida por $T * m(A) = m(T^{-1}(A))$ para cada conjunto mensurável A em $\mathcal{X}$.

Proposição 1.1.32. *Se T é um mapa que satisfaz a Definição 1.1.29, então a medida de Lebesgue m é não-singular em relação a T.*

Demonstração. Primeiro observe que para todo subconjunto $A \subset X$ temos que

$$T^{-1}(A) = \bigcup_{\eta \in \mathtt{P}} T^{-1}_{|_\eta}(A)$$

onde $\mathtt{P}$ é uma partição de $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
m(T^{-1}(A)) &= m\left(\bigcup_{\eta\in\mathtt{P}} T^{-1}_{|_\eta}(A)\right)\\
&= \sum_{\eta\in\mathtt{P}} m(T^{-1}_{|_\eta}(A))\\
&= \sum_{\eta\in\mathtt{P}} \int_\eta \chi_{T^{-1}_{|_\eta}(A)}dm\\
&= \sum_{\eta\in\mathtt{P}} \int_\eta \chi_A \circ T_{|_\eta} dm\\
&= \sum_{\eta\in\mathtt{P}} \int_{T(\eta)} \left[\frac{1}{|DT|}\circ T^{-1}_{|_\eta}\right]\cdot \chi_A dm\\
&= \sum_{\eta\in\mathtt{P}} \int \left[\frac{1}{|DT|}\circ T^{-1}_{|_\eta}\cdot \chi_{T(\eta)}\right]\cdot \chi_A dm\\
&= \int \left[\sum_{\eta\in\mathtt{P}} \frac{1}{|DT|}\circ T^{-1}_{|_\eta}\cdot \chi_{T(\eta)}\right]\cdot \chi_A dm\\
&= \int_A \left[\sum_{\eta\in\mathtt{P}} \frac{1}{|DT|}\circ T^{-1}_{|_\eta}\cdot \chi_{T(\eta)}\right] dm
\end{aligned}$$

Consequentemente, se $m(A) = 0$ temos $T * m(A) = m(T^{-1}(A)) = 0$ uma vez que m é a integral sobre um conjunto de medida nula. $\square$

Definição 1.1.33. Dada um função $f : X \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, μ-integrável, definimos μ_f, por

$$\mu_f(A) = \int_A f d\mu = \int f \circ \chi_A d\mu.$$

Definição 1.1.34. Seja $T : X \to X$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante. A *sequência de correlações de duas funções mensuráveis* $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ é definida por

$$C_n(\varphi, \psi) = \int (\varphi \circ T^n)\psi d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu, \ n \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.1.35. Dizemos que o sistema (f, μ) é *misturador* se

$$\lim_n C_n(\chi_A, \chi_B) = \lim_n \mu(f^{-n}(A) \cap B) - \mu(A)\mu(B) = 0$$

para quaisquer conjuntos mensuráveis $A, B \subset M$. Em outras palavras, quando n cresce, a probabilidade do evento $\{x \in B \ e \ f^n(x) \in A\}$ converge para o produto das probabilidades dos eventos $\{x \in B\}$ e $\{f^n(x) \in A\}$.

Definição 1.1.36. Dizemos que (T, μ) tem *decaimento exponencial de correlações* num dado espaço vetorial $\mathcal{V}$ se existe $\lambda < 1$ e para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{V}$ existe $A(\varphi, \psi) > 0$ tal que

$$|C_n(\varphi, \psi)| \leq A(\varphi, \psi)\lambda^n \ \textit{para todo} \ n \geq 1$$

temos noções similares quando a sequência λ^n é substituída por qualquer outra sequência convergindo para zero. Se for substituída por uma expressão polinomial dizemos que o sistema tem *decaimento polinomial de correlações.*

Proposição 1.1.37. *Seja $0 < \alpha < 1$, para qualquer $\xi \in [0, 1]$ temos*

$$(1 + \xi)^\alpha \leq 1 + \alpha\xi.$$

Demonstração. Primeiramente, vamos relembrar o

Teorema 1.1.38. ***(Teorema do Valor Médio de Lagrange)*** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

.

Tomemos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(\xi) = (1+\xi)^{\alpha}$, temos que f é derivável em $[0,1]$ e $f'(\xi) = \alpha(1+\xi)^{\alpha-1}$, como $\alpha - 1$ é menor que 1 temos $f'(\xi)$ decrescente em $[0,1]$ logo

$$\sup_{\xi \in [0,1]} f'(\xi) = \alpha$$

como f é contínua em $[0,\xi]$ o Teorema do Valor Médio de Lagrange nós dá que existe $c \in (0,\xi)$ tal que

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(0) &= f'(c)(\xi - 0) \\ &\leq \sup_{\xi \in [0,\xi]} f'(\xi)(\xi - 0) \\ &= \alpha\xi \\ (1+\xi)^{\alpha} - 1 &\leq \alpha\xi \end{aligned}$$

e assim, obtemos a desigualdade

$$(1+\xi)^{\alpha} \leq 1 + \alpha\xi$$

□

Definição 1.1.39. Seja E um conjunto de funções $f : X \to \mathbb{R}$, todas com o mesmo domínio $X \subset \mathbb{R}$. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, diremos que o conjunto E é *equicontínuo no ponto* x_0 quando, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in X,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \textit{ para qualquer que seja } f \in E.$$

Definição 1.1.40. Um conjunto E de funções $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se *equicontínuo* quando E é equicontínuo em todos os pontos $x_0 \in X$.

Proposição 1.1.41. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

1) *M é compacto;*

2) *Todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação;*

3) *Toda sequência em M possui uma subsequência convergente.*

4) *M é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Ver [4], Página 248. □

Proposição 1.1.42. *Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função decrescente e $x < y$, então*

$$\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)} f(z)dz \geq \frac{1}{|B_\varepsilon(y)|}\int_{B_\varepsilon(y)} f(z)dz$$

onde $|B_\varepsilon(x)| = \operatorname{diam} B_\varepsilon(x)$ *e* $|B_\varepsilon(x)| = |B_\varepsilon(y)|$.

Demonstração. Suponha que $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$, como $x < y$ podemos tomar o extremo esquerdo da bola $B_\varepsilon(y)$ e sendo f decrescente obtemos

$$f(y-\varepsilon) = \sup_{\xi \in B_\varepsilon(y)} f(\xi).$$

Dado $z \in B_\varepsilon(x)$, novamente a monotonicidade de f nos dá

$$\begin{aligned}\sup_{\xi \in B_\varepsilon(y)} f(\xi) \leq f(z) \quad &\Rightarrow \quad \int_{B_\varepsilon(x)} \sup_{\xi \in B_\varepsilon(y)} f(\xi) dz \leq \int_{B_\varepsilon(x)} f(z)dz \\ &\Rightarrow \quad 2\varepsilon \sup_{\xi \in B_\varepsilon(y)} f(\xi) \leq \int_{B_\varepsilon(x)} f(z)dz.\end{aligned}$$

Assim, devemos ter

$$\sup_{\xi \in B_\varepsilon(y)} f(\xi) \leq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(z)dz.$$

Por outro lado,

$$\int_{B_\varepsilon(y)} f(z)dz \leq 2\xi \sup_{\xi \in B_\varepsilon(y)} f(\xi) \Rightarrow \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(y)} f(z)dz \leq \sup_{\xi \in B_\varepsilon(y)} f(\xi).$$

Portanto, obtemos

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(y)} f(z)dz \leq \sup_{\xi \in B_\varepsilon(y)} f(\xi) \leq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(z)dz.$$

Agora se $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) \neq \emptyset$ veja que

1) $\displaystyle\int_{B_\varepsilon(x)} f(z)dz = \int_{x-\varepsilon}^{y-\varepsilon} f(z)dz + \int_{y-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(z)dz;$

2) $\displaystyle\int_{B_\varepsilon(y)} f(z)dz = \int_{y-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(z)dz + \int_{x+\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(z)dz.$

Assim,

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(z)dz \quad = \quad \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{y-\varepsilon} f(z)dz + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{y-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(z)dz,$$

como $[x-\varepsilon, y-\varepsilon] \cap [x+\varepsilon, y+\varepsilon] = \emptyset$ e ambos os intervalos tem o mesmo comprimento $y - x$ logo, pela primeira desigualdade demonstrada, vamos obter

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(z)dz &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{y-\varepsilon} f(z)dz + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{y-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(z)dz \\
&\geq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x+\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(z)dz + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{y-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(z)dz \\
&\geq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(z)dz \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(y)} f(z)dz
\end{aligned}$$

provando assim o resultado. □

1.2 O Operador de Transferência

Esta seção é dedicada a apresentar alguns fatos sobre o operador que usaremos para obter as propriedades estatísticas para a dinâmica em questão. Além disso, esta construção nos dá naturalmente qual será o espaço de nossa aplicação. Sua definição pode ser dada em uma situação geral, onde $T : X \to X$ é uma transformação mensurável no espaço mensurável $(X, \mathcal{X})$ e m é uma medida finita qualquer neste espaço com mais uma suposição adicional: m é não-singular em relação a T(Ver Definição 1.1.31).

Definição 1.2.1. Seja $U_T : L^\infty_{(m)} \to L^\infty_{(m)}$ um operador linear definido por $U_T(\varphi) = \varphi \circ T$ chamaremos esse operador de *Operador de Koopman de T*. Temos que

1) $||U_T(\varphi)||_\infty \leq ||\varphi||_\infty$

2) Como as funções constantes são pontos fixos, temos $||U_T||_\infty = 1$.

Depois disso podemos fazer a pergunta: existe o "dual de U_T, ou seja, um operador $P_T : L^1_{(m)} \to L^1_{(m)}$ tal que para todo $\varphi \in L^\infty_m$ e $\psi \in L^1_{(m)}$ vale a "relação de dualidade ":

$$\int U_T(\varphi).(\psi)dm = \int (\varphi)P_T(\psi)dm \quad ?$$

O próximo resultado nos dará a resposta.

Teorema 1.2.2. *Se m é não-singular(Ver Definição 1.1.31), então existe apenas um operador*

$$P_T : L^1(m) \to L^1(m)$$

tal que, para todo $\psi \in L^1$ e para todo conjunto A temos

$$\int U_T(\chi_A) \cdot (\varphi)dm = \int (\chi_A) \cdot P_T(\varphi)dm \tag{1.3}$$

Demonstração. Para uma dada $f \in L^1_{(m)}$ tal que $f \geq 0$ defina a medida m_f dada por $m_f(E) = \int_E f dm$. Com essa definição e a não singularidade de m temos $T * m_f(E) = m_f(T^{-1}(E)) = \int_{T^{-1}(E)} f dm = 0$, desde que $m(T^{-1}(E)) = 0$. Usando o Teorema de Radon-Nykodyn (Ver Teorema 1.1.21), defina

$$P_T(f) := \frac{dT * m_f}{dm}$$

Vejamos que definindo assim vale a "relação de dualidade" é satisfeita (quando $f \geq 0$). Na verdade,

$$\begin{aligned}
\int (\chi_A) P_T(f) dm &= \int (\chi_A) \cdot \frac{dT * m_f}{dm} dm \\
&= \int_A \frac{dT * m_f}{dm} dm \\
&= T * m_f(A) \\
&= m_f(T^{-1}(A)) \\
&= \int_{T^{-1}(A)} f dm \\
&= \int f \cdot \chi_{T^{-1}(A)} dm \\
&= \int f \cdot \chi_A \circ T dm \\
&= \int f \cdot U_T(\chi_A) dm
\end{aligned}$$

Para uma $f \in L^1(m)$ arbitrária, nos decompomos $f = f^+ - f^-$ e daí obtemos

$$P_T(f) = P_T(f^+) - P_T(f^-)$$

Vamos ver que este é um operador linear e é o que procuramos.

$$\begin{aligned}
\int \chi_A \cdot P_T(f) dm &= \int \chi_A (P_T(f^+) - P_T(f^-)) dm \\
&= \int (\chi_A) \cdot P_T(f^+) dm - \int \chi_A \cdot P_T(f^-) dm \\
&= \int U_T(\chi_A) \cdot f^+ dm - \int U_T(\chi_A) \cdot f^- dm \\
&= \int U_T(\chi_A) \cdot (f^+ - f^-) dm \\
&= \int U_T(\chi_A) \cdot f dm
\end{aligned}$$

e chegamos na equação 1.3. Observe que $f^+ \geq 0$ e também $f^- \geq 0$ de tal forma que podemos aplicar a relação de dualidade acima (para funções não negativas) na terceira igualdade acima. Portanto, a equação 1.3 vale para P_T. Para finalizar o teorema resta provar que P_T é um operador linear. Para isso precisamos do seguinte lema:

Lema 1.2.3. *Se f e g são funções integráveis tal que $\int_A f dm = \int_A g dm$ para cada $A \subset X$ mensurável, então $f = g$ para m-qtp $x \in X$.*

Demonstração. Do lema seja $A = \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\}$. Então $(f-g)\chi_A$ é uma função não-negativa. O mesmo acontece com $(g-f)\chi_{A^c}$. Por hipótese, temos que

$$\begin{aligned} \int (f-g)\chi_A dm &= \int f\chi_A dm - \int g\chi_A dm \\ &= \int_A f dm - \int_A g dm \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\int (g-f)\chi_{A^c} dm = 0.$$

Como as funções são não negativas temos que $f(x) = g(x)$ para m-qtp $x \in A$ e $g(x) = f(x)$ para m-qtp $x \in A^c$. Portanto, $f = g$ m-qtp $x \in X$. □

Observação 1.2.4. *Na prova acima usamos o fato: "Se f é uma função integrável tal que $f \geq 0$, então $\int f dm = 0$ se, e somente se, $f = 0$ m-qtp $x \in X$"(A prova dessa afirmação pode ser vista em [1], Página 35).*

Então, por dualidade, temos

$$\begin{aligned} \int_A P_T(f_1 + \alpha f_2) dm &= \int \chi_A \cdot P_T(f_1 + \alpha f_2) dm \\ &= \int U_T(\chi_A) \cdot (f_1 + \alpha f_2) dm \\ &= \int U_T(\chi_A)(f_1) dm + \alpha \int \chi_A P_T(f_2) dm \\ &= \int \chi_A \cdot P_T(f_1) dm + \alpha \int \chi_A P_T(f_2) dm \\ &= \int \chi_A (P_T(f_1) + \alpha P_T(f_2)) dm \\ &= \int_A (P_T(f_1) + \alpha P_T(f_2)) dm. \end{aligned}$$

Como vale para todo conjunto mensurável A, pelo lema 1.2.3 temos a linearidade do operador. □

Observação 1.2.5. *Esteja ciente de que a relação de dualidade equação 1.3 é fundamental e vamos usá-la muito neste trabalho.*

Por exemplo, no caso em que o sistema dinâmico, (T, m), pertence à classe dos mapas intermitentes (Ver Definição 1.1.29) o Teorema 1.2.2 e a Proposição 1.1.32 garantem a existência e a unicidade do operador.

A próxima proposição nos diz que o operador de Perron-Frobenius é positivo.

Proposição 1.2.6. *Se $f \geq 0$, então $P_T(f) \geq 0$.*

Demonstração. Para um conjunto mensurável $A \subset X$

$$\begin{aligned}
\int_A P_T(f)dm &= \int P_T(f) \cdot \chi_A dm \\
&= \int f \cdot (\chi_A \circ T)dm \\
&= \int_{T^{-1}(A)} f dm \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

pois $f \geq 0$. Uma vez que que vale para todo conjunto mensurável A, devemos ter $P_T(f) \geq 0$. □

Observação 1.2.7. *Observe que a unicidade do Operador de Perron Frobenius depende apenas da relação de dualidade(prova do Teorema 1.2.2). O mesmo vale para sua positividade. Isso significa que se você está em uma situação específica em que é capaz de encontrar um operador linear que satisfaça a relação de dualidade, então você tem tudo: singularidade e positividade. Esta observação nos mostra o buraco da não-singularidade da medida. Ele só funciona para garantir a existência do operador em uma situação abstrata.*

Corolário 1.2.8. *Para toda $f \in L^1(m)$ temos $\int P_T(f)dm = \int f dm$*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\int P_T(f)dm &= \int 1 \cdot P_T(f)dm \\
&= \int (1 \circ T) f dm \\
&= \int f dm.
\end{aligned}$$

□

Agora vamos ver a limitação do operador de Perron Frobenius

Corolário 1.2.9. *Para toda $f \in L^1(m)$ temos $\int |P_T(f)|dm \leq \int |f|dm$ e consequentemente $||P_T||_1 \leq 1$.*

Demonstração. Relembre que $f = f^+ - f^-$, onde $f^+ = \max\{f(x), 0\}$ e $f^- = \max\{-f(x), 0\}$, $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$. Pela Proposição 1.2.6 temos que $P_T(f^+) \geq 0$, $P_T(f^-) \geq 0$ e

$$\begin{aligned}
\int |P_T(f^+)|dm &= \int P_T(f^+)dm \\
&= \int f^+ dm \\
&= \int |f^+|dm.
\end{aligned}$$

No entanto,

$$\begin{aligned}
\int |P_T(f)|dm &= \int |P_T(f^+ - f^-)dm \\
&\leq \int |P_T(f^+)|dm + \int |P_T(f^-)|dm \\
&= \int |f^+|dm + \int |f^-|dm \\
&= \int f^+ dm + \int f^- dm \\
&= \int (f^+ - f^-)dm \\
&= \int |f|dm.
\end{aligned}$$

A relação acima nos dá $\dfrac{||P_T(f)||_1}{||f||_1} \leq 1$ para todo $f \in L^1(m)$ e então

$$||P_T||_1 = \sup_{f\neq 0} \frac{||P_T(f)||_1}{||f||_1} \leq 1.$$

□

Vamos denotar

$$D(X) = \{f \in L^1(m) \;\; f \geq 0 \; m - qtp \; e \; ||f||_1 = 1\}$$

e chame todos os elementos desde conjunto por densidades.

Teorema 1.2.10. *Suponha que $f \in D(X)$. Então $P_T(f) = f$ se, e somente se, a medida de m_f for T-invariante e absolutamente contínua em relação a m.*

Demonstração. Suponha $f \in D(X)$ e $P_T(f) = f$. Então

$$\begin{aligned}
m_f(T^{-1}(E)) &= \int_{T^{-1}(E)} f dm \\
&= \int f \cdot (\chi_{T^{-1}(E)})dm \\
&= \int f \cdot (\chi_E \circ T)dm \\
&= \int f \cdot U_T(\chi_E)dm \\
&= \int P_T(f) \cdot \chi_E dm \\
&= \int_E f dm \\
&= m_f(E).
\end{aligned}$$

Assim, m_f é T-invariante e por sua definição também é absolutamente contínua em relação a m. Agora suponha que m_f é T-invariante. Portanto, para cada conjunto mensurável A

temos $m_f(T^{-1}(A)) = m_f(A)$.
Então, para um dado conjunto mensurável A, temos

$$\begin{aligned}
\int_A P_T(f)dm &= \int P_T(f)\cdot \chi_A dm \\
&= \int f\cdot U_T(\chi_A)dm \\
&= \int f\cdot(\chi_A\circ T)dm \\
&= \int f\cdot(\chi_{T^{-1}(A)})dm \\
&= \int_{T^{-1}(A)} f dm \\
&= m_f(T^{-1}(A)) \\
&= m_f(A) \\
&= \int_A f dm
\end{aligned}$$

como vale para todo mensurável A, pelo Lema 1.2.3, temos que $P_T(f) = f$ m-qtp $x \in X$ e nós terminamos a prova do resultado. □

Proposição 1.2.11. *Suponha que (T, m) seja misturador e preserve probabilidades, então P_T tem 1 como autovalor e seu autoespaço associado é simples (seu autoespaço é unidimensional).*

Demonstração. Primeiro observe que 1 é um autovalor de P_T. De fato como m é T-invariante, pelo Teorema 1.2.10 a função constante 1 deve ser um ponto fico de P_T. E isso implica que 1 é um autovalor de P_T.
Agora se m é mixing, então para cada $\varphi \in L^1_{(m)}$ e $\psi \in L^\infty_{(m)}$ temos

$$\lim_{n\to+\infty}\int \varphi\cdot\psi\circ T^n dm = \int \varphi dm \int \psi dm. \tag{1.4}$$

Se $P_T(g) = g$ e $\psi \in L^\infty_{(m)}$ temos

$$\begin{aligned}
\int g\cdot\psi dm &= \int P_T^n(g)\cdot\psi dm \\
&= \int g\cdot(\psi\circ T^n)dm \\
&\to \int g dm \int \psi dm
\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$. Portanto,

$$\int g\cdot\psi dm = \int g dm \int \psi dm.$$

No entanto, para um dado conjunto mensurável $A \subset X$ e fazendo $\psi = \chi_A$ temos

$$\begin{aligned}\int_A g dm &= \int g \cdot \chi_A dm \\ &= \int g dm \int \chi_A dm \\ &= \int \int g dm \chi_A dm \\ &= \int_A \int g dm dm.\end{aligned}$$

Como vale para todo conjunto mensurável $A \subset X$, significa que g deve ser constante m-qtp e

$$g \equiv \int g dm.$$

No entanto, a função constante $1 : X \to \mathbb{R}$, $1(x) = x$ gera todo o auto espaço. $\square$

Em alguns casos podemos encontrar uma fórmula para o operador de Perron-Frobenius e é por isso que às vezes é tão útil. Em particular, podemos encontrar uma fórmula quando o sistema dinâmico em questão pertence à classe dos mapas intermitentes(Ver definição 1.1.29). Isto é o que diz a próxima proposição.

Proposição 1.2.12. *Suponha que $T : [0, 1] \to [0, 1]$ é um mapa satisfazendo as condições da Definição 1.1.29. Então o operador de Perron-Frobenius associado a T tem a seguinte fórmula. Para todo $f \in L^1(m)$ e $x \in [0, 1]$*

$$P_T(f)(x) = \sum_{\eta \in \mathrm{P}^{(1)}} (g_\eta \cdot f) \circ T_{|_\eta}^{-1}(x) = \sum_{\eta \in \mathrm{P}^{(1)}} \left(\frac{f}{|DT|} \circ T_{|_\eta}^{-1}(x) \right) \tag{1.5}$$

onde $P^{(1)}$ é uma partição de $[0, 1]$ em intervalos η e $g_\eta = \dfrac{1}{|DT_{|_\eta}(x)|}$.

Demonstração. Vamos usar a fórmula de mudança de variável para mostrar que a equação 1.5 satisfaz a relação de dualidade. Uma vez feito isso, pela observação 1.2.7 terminamos a prova. Considere $x \in [0, 1]$ arbitrário e defina $y = T_{|_\eta}(x)$. Além disso, considere as funções $\psi \in L^{\infty}_{(m)}$ e $\varphi \in L^1_{(m)}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (\varphi(x))(\psi \circ T(x))dm(x) &= \sum_{\eta \in \mathrm{P}^{(1)}} \int_\eta (\varphi(x))(\psi \circ T(x))dm(x) \\
&= \sum_{\eta \in \mathrm{P}^{(1)}} \int_{T(\eta)} (\varphi \circ (T_{|_\eta})^{-1}(y))((\psi(y)) \cdot |D(T_{|_\eta}(y)|^{-1} dm(y) \\
&= \sum_{\eta \in \mathrm{P}^{(1)}} \int_0^1 \frac{(\varphi \circ (T_{|_\eta})^{-1}(y))(\psi(y))}{|DT_{|_\eta}((T_{|_\eta})^{-1}(y))|} \chi_{T(\eta)}(y) dm(y) \\
&= \int_0^1 \sum_{\eta \in \mathrm{P}^{(1)}} \frac{\varphi}{|DT_{|_\eta}|} \circ ((T_{|_\eta})^{-1}(y))\psi(y) dm(y) \\
&= \int P_T(\varphi)\psi dm
\end{aligned}
$$

□

e nós terminamos.

Um outra forma de escrever $P_T(f)$ é quando estamos sobre as seguintes hipóteses

Proposição 1.2.13. *Seja (T, m) um sistema dinâmico, com $T : I \to I$ diferenciável, considerando I a união disjunta de intervalos $\{I_j\}$ tal que T é injetiva em I_j e $T'(x) \neq 0$. Então o operador de Perron Frobenius de T é dado pela seguinte expressão, para toda $f \in L^1_{(m)}$ e $x \in I$*

$$P_T(f) = \sum_{y \in T^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|D_y T|}. \tag{1.6}$$

Demonstração. Definindo $P_T(f)$ como acima temos

$$
\begin{aligned}
\int g(x) \cdot P_T(f(x)) dm &= \sum_j \int_{T(I_j)} g(x) \cdot \frac{f(T_j^{-1}(x))}{|D_{T_j^{-1}(x)} T|} dm(x) \\
&= \sum_j \int_{I_j} g(T(x)) \cdot \frac{f(\tilde{x})}{|D_{\tilde{x}} T|} |D_{\tilde{x}} T| dm(\tilde{x}) \\
&= \sum_j \int_{I_j} g \circ T(\tilde{x}) f(\tilde{x}) dm \\
&= \int P_T(g) \cdot f dm.
\end{aligned}
$$

Assim vemos que $P_T(f)$ satisfaz a relação de dualidade. □

De agora em diante, escrevemos P em vez de P_T quando não houver confusão.

Proposição 1.2.14. *Seja (T, m) como na Proposição 1.2.13, então para $f \in L^1_{(m)}$ e $n \in \mathbb{N}$ podemos escrever*

$$P^n f = \sum_{y \in T^{-n}(x)} \frac{f(y)}{|D_y T^n|}. \tag{1.7}$$

Demonstração. Usando a Proposição 1.2.13, vemos que a aplicação repetida de P nos dá que

$$
\begin{aligned}
P^n f(x) &= P^{n-1}(Pf(x)) \\
&= P^{n-1}\left(\sum_{y\in T^{-1}(x)} \frac{f(y)}{|D_yT|}\right) \\
&= P^{n-2}\left(\sum_{s\in T^{-1}(x)} \frac{\sum_{y\in T^{-1}(s)} \frac{f(y)}{|D_yT|}}{|D_sT|}\right) \\
&= P^{n-2}\left(\sum_{y\in T^{-2}(x)} \frac{f(y)}{|D_{T(y)}T||D_yT|}\right) \\
&\vdots \\
&= \sum_{y\in T^{-n}(x)} \frac{f(y)}{\prod_{j=0}^{n-1}|D_{T^j(y)}T|} \\
&= \sum_{y\in T^{-n}(x)} \frac{f(y)}{|D_yT^n|}.
\end{aligned}
$$

□

Proposição 1.2.15. *Seja (T,m), um sistema dinâmico, com $T:[0,1]\to[0,1]$, tal que $|D_yT|>\lambda$ e T satisfaz a Definição 1.1.29. Seja $y,y'\in J$, com $J\subset[0,1]$ um intervalo, tal que $T^n(J)\subset[0,1]$. Temos a seguinte desigualdade*

$$|y-y'|\leq \frac{1}{\lambda^n}|T^n(y)-T^n(y')|.$$

Demonstração. Como T é de classe C^1 em J, pelo Teorema do valor médio obtemos

$$|y-y'||D_xT|=|T(y)-T(y')|$$

para algum x entre y e y'. Por definição $|D_yT|>\lambda$, consequentemente temos

$$.|y-y'|\leq \frac{1}{\lambda}|T(y)-T(y')|.$$

Como $y,y'\in J$, temos $T(y),T(y')\in T(J)$, com o uso repetido da desigualdade anterior, obtemos

$$|y-y'|\leq \frac{1}{\lambda^n}|T^n(y)-T^n(y')|.$$

□

Capítulo 2

O modelo

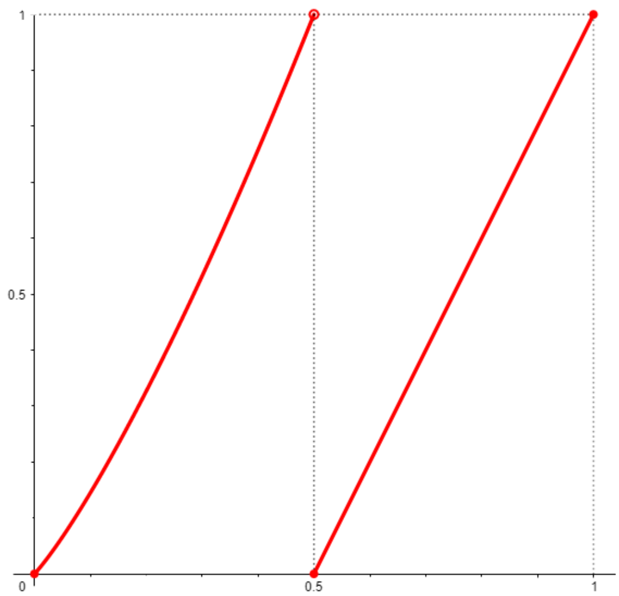
Neste capítulo, definiremos o modelo da dinâmica estudada para obter a medida invariante. Será fornecido uma abordagem para essa técnica e suas propriedades para tal mapa.

2.1 O Mapa de Manneville-Pomeau

Definição 2.1.1. (O modelo) Vamos considerar para $0 < \alpha < 1$, o mapa $T : [0,1] \to [0,1]$ [3]

$$T(x) = \begin{cases} x(1 + 2^{\alpha}x^{\alpha}), & \forall x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1, & \forall x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Figura 1 - Dinâmica T



Fonte: elaborada pelo autor.

[3]Note que este mapa satisfaz a Definição 1.1.29. Além disso, $D_yT \geq 1$ para todo $y \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$.

2.2 Cones Invariantes

Definição 2.2.1. Um subconjunto C do espaço vetorial E chama-se um *cone* quando, para todo $v \in C$ e todo $t > 0$, tem-se $tv \in C$.

Definição 2.2.2. Se definirmos o cone C_0, é imediato ver que C_0 é deixado invariante pelo Operador de Perron Frobenius P, onde

$$C_0 = \{f \in C^0((0,1]);\ f \geq 0,\ f \text{ é } decrescente\}. \tag{2.1}$$

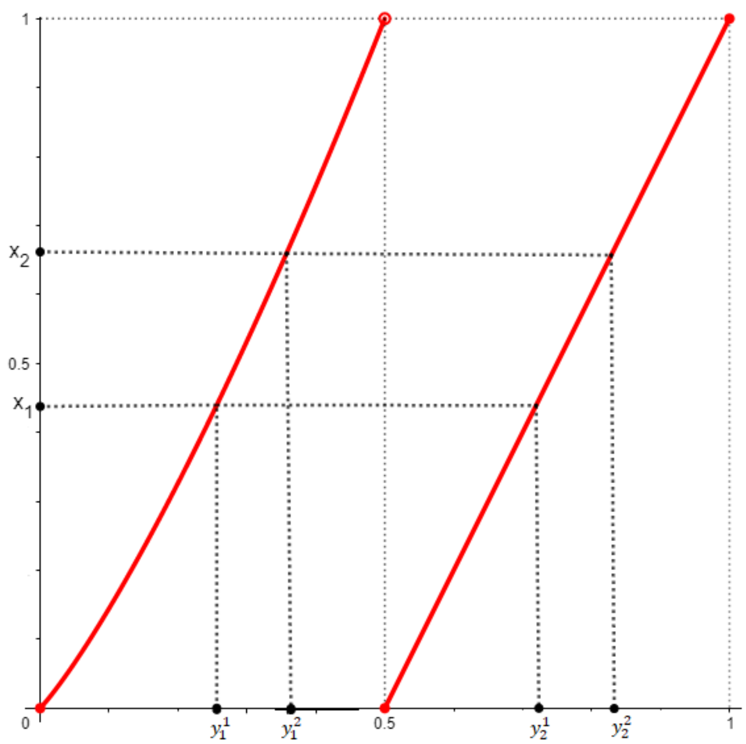
Primeiramente dizer que C_0 é deixado invariante pelo Operador de Perron-Frobenius P, significa dizer que $P_T(C_0) \subset C_0$, ou seja,

$$f \in C_0 \Rightarrow Pf \in C_0.$$

Desse modo, se $f \in C_0$, então por definição, $f \geq 0$ e f é decrescente, consequentemente $Pf \geq 0$, uma vez que, vale a Proposição 1.2.6.

Agora considere $x_1 < x_2$, então ao analisarmos os ramos do gráfico da dinâmica T observamos o seguinte: $T^{-1}(x_1) = \{y_1^1, y_2^1\}$ e $T^{-1}(x_2) = \{y_1^2, y_2^2\}$, como D_yT é crescente em $[0, \frac{1}{2})$ e constante em $(\frac{1}{2}, 1]$, temos que $\dfrac{1}{D_yT}$ é decrescente em $[0, \frac{1}{2})$ e constante em $(\frac{1}{2}, 1]$.

Figura 2 - Ramos do gráfico de T



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessas observações temos,

1) $\dfrac{1}{|D_{y_1^2}T|} < \dfrac{1}{|D_{y_1^1}T|}$

2) $\dfrac{1}{|D_{y_2^2}T|} = \dfrac{1}{|D_{y_2^1}T|}$

onde $y_1^1 < y_1^2$ e $y_2^1 < y_2^2$.

Também temos que f é decrescente, logo $f(y_1^2) < f(y_1^1)$ e $f(y_2^2) < f(y_2^1)$. Pela forma analítica do Operador de Perron-Frobenius o seguinte é válido

$$
\begin{aligned}
Pf(x_2) = \sum_{y\in T^{-1}(x_2)} \frac{f(y)}{|D_yT|} &= \frac{f(y_1^2)}{|D_{y_1^2}T|} + \frac{f(y_2^2)}{|D_{y_2^2}T|} \\
&< \frac{f(y_1^1)}{|D_{y_1^1}T|} + \frac{f(y_2^1)}{|D_{y_2^1}T|} \\
&= \sum_{y\in T^{-1}(x_1)} \frac{f(y)}{|D_yT|} \\
&= Pf(x_1).
\end{aligned}
$$

Portanto, obtemos que se $x_1 < x_2$, então $Pf(x_2) < Pf(x_1)$, ou seja, Pf é decrescente, consequentemente teremos $Pf \in C_0$. Mostrando, de fato, que C_0 é deixado invariante pelo Operador de Perron Frobenius P.

Vamos chamar X de a *identidade*, $X(x) = x$. O próximo lema mostra mais um cone que possui a propriedade de invariância em relação ao Operador de Perron-Frobenius.

Lema 2.2.3. *O cone $C_1 = \{f \in C_0;\ X^{\alpha+1}f$ é crescente$\}$ é deixado invariante pelo operador P.*

Demonstração. Devemos mostrar que dada $f \in C_1$, temos que $Pf \in C_1$. Desse modo, seja $f \in C_1$, então $f \in C_0$ e $X^{\alpha+1}f$ é crescente. Logo,

$$
\begin{aligned}
X^{\alpha+1}(x)Pf(x) = x^{\alpha+1}Pf(x) &= \sum_{y\in T^{-1}(x)} [T(y)]^{\alpha+1}\frac{f(y)}{D_yT} \\
&= \sum_{y\in T^{-1}(x)} \frac{[T(y)]^{\alpha+1}}{y^{\alpha+1}}\frac{y^{\alpha+1}f(y)}{D_yT} \\
&= \sum_{y\in T^{-1}(x)} \left[\frac{T(y)}{y}\right]^{\alpha+1}\frac{y^{\alpha+1}f(y)}{D_yT}.
\end{aligned}
$$

Definindo $T^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$; $y_1 \leq y_2$ e $\xi = 2^\alpha y_1^\alpha$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
x^{\alpha+1}Pf(x) &= \left[\frac{T(y_1)}{y_1}\right]^{\alpha+1}\frac{y_1^{\alpha+1}f(y_1)}{D_{y_1}T}+\left[\frac{T(y_2)}{y_2}\right]^{\alpha+1}\frac{y_2^{\alpha+1}f(y_2)}{D_{y_2}T}\\
&= \left[\frac{y_1(1+2^\alpha y_1^\alpha)}{y_1}\right]^{\alpha+1}\frac{y_1^{\alpha+1}f(y_1)}{1+(\alpha+1)2^\alpha y_1^\alpha}+\left(\frac{2y_2-1}{y_2}\right)^{\alpha+1}\frac{y_2^{\alpha+1}f(y_2)}{2}\\
&= \frac{(1+2^\alpha y_1^\alpha)^{\alpha+1}}{1+(\alpha+1)2^\alpha y_1^\alpha}y_1^{\alpha+1}f(y_1)+\frac{1}{2}\left(\frac{2y_2-1}{y_2}\right)^{\alpha+1}y_2^{\alpha+1}f(y_2)\\
&= \frac{(1+\xi)^{\alpha+1}}{1+(\alpha+1)\xi}y_1^{\alpha+1}f(y_1)+\frac{1}{2}\left(\frac{2y_2-1}{y_2}\right)^{\alpha+1}y_2^{\alpha+1}f(y_2).
\end{aligned}$$

Uma vez que,

$$T(T^{-1}(x))=x$$

derivando ambos os lados da expressão acima

$$T'(T^{-1}(x)).(T^{-1})'(x)=1$$

$$(T^{-1})'(x)=\frac{1}{T'(T^{-1}(x))}$$

$$(T^{-1})'(x)=\frac{1}{T'(y)}.$$

Observando cada ramo de T em seus respectivos domínios, sabemos que $T'(y)>0$ para todo $y\in[0,1]$ (onde a derivada de T existe). Logo $(T^{-1})'(x)=\dfrac{1}{T'(y)}>0$. Portanto, podemos concluir que $x\mapsto y_1$, $x\mapsto y_2$ são funções crescentes. Além disso, como $\xi=\xi(y_1)=2^\alpha y_1^\alpha$ temos

$$\xi'(y_1)=2^\alpha\alpha y_1^{\alpha-1}>0.$$

Logo a função $y_1\mapsto 2^\alpha y_1^\alpha$ é crescente. Como composição de funções crescentes ainda é uma função crescente, obtemos que $x\mapsto\xi$ é crescente. Como por definição $X^{\alpha+1}f$ é crescente, logo a expressão

$$x^{\alpha+1}Pf(x)=\frac{(1+\xi)^{\alpha+1}}{1+(\alpha+1)\xi}y_1^{\alpha+1}f(y_1)+\frac{1}{2}\left(\frac{2y_2-1}{y_2}\right)^{\alpha+1}y_2^{\alpha+1}f(y_2)$$

nos dá que $Pf\in C_1$. □

Vamos definir

$$m(f)=\int_0^1 f dm.$$

Obviamente $m(Pf)=m(f)$. Basta observar o Corolário 1.2.8. Iremos considerar em $m(f)$ a integral sobre a medida de Lebesgue definida em 1.1.7. A última propriedade interessante está contida no seguinte lema

Lema 2.2.4. *O cone* $C_* = \{f \in C_1 \cap L^1([0,1]) \mid f(x) \leq ax^{-\alpha}m(f)\}$ *é invariante com respeito ao operador* P*, desde que "a" seja escolhido suficientemente grande.*

Demonstração. Para cada $f \in C_*$ vale que

$$f(x) \leq ax^{-\alpha}m(f)$$

e como $X^{\alpha+1}f$ é crescente, também vale que

$$x^{\alpha+1}f(x) \leq 1^{\alpha+1}f(1) = f(1) = \inf_{x\in[0,1]} f(x) \leq \int_0^1 f dm = m(f).$$

Vamos supor, para simplificar, que $m(f) = 1$, pois se $m(f) \neq 1$ podemos tomar $g = \dfrac{f}{m(f)}$ e $m(g) = 1$, com $g \in C_*$. Deve-se encontrar uma constante a, independente de f, tal que $Pf(x) \leq ax^{-\alpha}$ uma vez que $m(Pf) = m(f) = 1$.
Desse modo,

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \frac{f(y_1)}{D_{y_1}T} + \frac{f(y_2)}{D_{y_2}T} && (2.2)\\ &\leq \frac{ay_1^{-\alpha}m(f)}{D_{y_1}T} + \frac{y_2^{-\alpha-1}}{D_{y_2}T} && (2.3)\end{aligned}$$

onde obtemos 2.3 do fato que $f \in C_*$, implica

$$f(y_1) \leq ay_1^{-\alpha}m(f)$$

e por $f \in C_1$, obtemos $X^{\alpha+1}f$ crescente, logo

$$y_2^{\alpha+1}f(y_2) \leq 1 = m(f) \Rightarrow f(y_2) \leq \frac{1}{y_2^{\alpha+1}} = y_2^{-\alpha-1}$$

continuando,

$$\begin{aligned} Pf(x) &\leq \frac{ay_1^{-\alpha}m(f)}{D_{y_1}T} + \frac{y_2^{-\alpha-1}}{D_{y_2}T}\\ &= \frac{ay_1^{-\alpha}}{D_{y_1}T} + \frac{y_2^{-\alpha-1}}{D_{y_2}T}\\ &\leq \frac{ay_1^{-\alpha}}{D_{y_1}T}\frac{x^\alpha}{x^\alpha} + \frac{a}{a}\frac{x^\alpha}{x^\alpha}\frac{y_2^{-\alpha-1}}{D_{y_2}T}\\ &\leq ax^{-\alpha}\left[\frac{x^\alpha}{y_1^\alpha}\frac{1}{D_{y_1}T} + \frac{1}{a}\frac{x^\alpha}{y_2^{\alpha+1}D_{y_2}T}\right].\end{aligned}$$

Agora observe o seguinte, o segundo termo dentro do colchetes pode ser limitado da seguinte maneira

$$
\begin{aligned}
\frac{x^\alpha}{y_2^{\alpha+1}D_{y_2}T} &= \frac{[T(y_1)]^\alpha}{y_2^{\alpha+1}2} = \frac{[y_1(1+\xi)]^\alpha}{y_2^{\alpha+1}2} = \frac{y_1^\alpha(1+\xi)^\alpha}{y_2^{\alpha+1}2} && (2.4)\\
&\leq \frac{y_1^\alpha(1+\xi)^\alpha}{2^{-\alpha-1}2} = 2^\alpha y_1^\alpha(1+\xi)^\alpha && (2.5)
\end{aligned}
$$

onde obtemos 2.5 por meio de,

$$\frac{1}{2} \leq y_2 \Rightarrow 2 \geq \frac{1}{y_2} \Rightarrow 2^{\alpha+1} \geq \frac{1}{y_2^{\alpha+1}}.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\frac{x^\alpha}{y_2^{\alpha+1}D_{y_2}T} &\leq 2^\alpha y_1^\alpha(1+\xi)^\alpha = \xi(1+\xi)^\alpha && (2.6)\\
&\leq 2^\alpha \xi && (2.7)
\end{aligned}
$$

onde 2.7 segue de

$$y_1 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2y_1 < 1 \Rightarrow (2y_1)^\alpha < 1 \Rightarrow \xi < 1 \Rightarrow 1+\xi < 2 \Rightarrow (1+\xi)^\alpha < 2^\alpha.$$

Portanto, acabamos de mostrar a seguinte desigualdade

$$\frac{x^\alpha}{y_2^{\alpha+1}D_{y_2}T} \leq 2^\alpha \xi. \quad (2.8)$$

Daí, de 2.4, temos

$$
\begin{aligned}
Pf(x) &\leq \left[\frac{x^\alpha}{y_1^\alpha}\frac{1}{D_{y_1}T} + \frac{1}{a}\frac{x^\alpha}{y_2^{\alpha+1}D_{y_2}T}\right] ax^{-\alpha} && (2.9)\\
&\leq \left[\left(\frac{x}{y_1}\right)^\alpha \frac{1}{D_{y_1}T} + \frac{1}{a}\frac{x^\alpha}{y_2^{\alpha+1}D_{y_2}T}\right] ax^{-\alpha} && (2.10)\\
&\leq \left[\left(\frac{T(y_1)}{y_1}\right)^\alpha \frac{1}{D_{y_1}T} + \frac{1}{a}\frac{x^\alpha}{y_2^{\alpha+1}D_{y_2}T}\right] ax^{-\alpha} && (2.11)\\
&\leq \left[\left(\frac{y_1(1+\xi)}{y_1}\right)^\alpha \frac{1}{1+(\alpha+1)\xi} + \frac{1}{a}\frac{x^\alpha}{y_2^{\alpha+1}D_{y_2}T}\right] ax^{-\alpha} && (2.12)\\
&\leq \left[\frac{(1+\xi)^\alpha}{1+(\alpha+1)\xi} + \frac{1}{a}\frac{x^\alpha}{y_2^{\alpha+1}D_{y_2}T}\right] ax^{-\alpha} && (2.13)\\
&\leq \left[\frac{(1+\xi)^\alpha}{1+(\alpha+1)\xi} + \frac{1}{a}2^\alpha\xi\right] ax^{-\alpha} && (2.14)\\
&= \left[\frac{(1+\xi)^\alpha + \frac{2^\alpha}{a}\xi(1+(\alpha+1)\xi)}{1+(\alpha+1)\xi}\right] ax^{-\alpha}. && (2.15)
\end{aligned}
$$

Usando a proposição 1.1.37 em 2.15, obtemos

$$
\begin{aligned}
Pf(x) &\leq \left[\frac{1+\alpha\xi+\dfrac{2^{\alpha}}{a}\xi(1+(\alpha+1)\xi)}{1+(\alpha+1)\xi}\right]ax^{-\alpha} && (2.16)\\
&= \left[\frac{1+\left(\alpha+\dfrac{2^{\alpha}}{a}+\dfrac{2^{\alpha}}{a}(\alpha+1)\xi\right)\xi}{1+(\alpha+1)\xi}\right]ax^{-\alpha} && (2.17)\\
&\leq \left[\frac{1+\left(\alpha+\dfrac{2^{\alpha}}{a}+\dfrac{2^{\alpha}}{a}(\alpha+1)\right)\xi}{1+(\alpha+1)\xi}\right]ax^{-\alpha} && (2.18)\\
&= \left[\frac{1+\left(\alpha+\dfrac{2^{\alpha}}{a}(\alpha+2)\right)\xi}{1+(\alpha+1)\xi}\right]ax^{-\alpha}. && (2.19)
\end{aligned}
$$

Observando a expressão 2.19 vemos que se $\dfrac{2^{\alpha}}{a}(\alpha+2) \leq 1 \Rightarrow 2^{\alpha}(\alpha+2) \leq a$, então para essa desigualdade teremos

$$Pf(x) \leq ax^{-\alpha}.$$

Portanto, a partir disso o lema está provado. □

Lema 2.2.5. *Existe uma função localmente Lipschitz h tal que $Ph = h$ e $h(x) \leq ax^{-\alpha}$.*

Demonstração. O operador P deixa invariante o conjunto

$$K = \{f \in C_* \mid m(f) = 1\}$$

pois, em particular, podemos usar o lema 2.2.4, mas $X^{\alpha+1}K$ consiste em funções equicontinuas uniformemente limitadas, portanto, é compacto(Ascoli-Arzelá) em $C^{(0)}$. De fato, relembre 1.1.39 e 1.1.40 mostraremos agora que $X^{\alpha+1}K$ é um conjunto de funções equicontínuas. Seja $\phi \in X^{\alpha+1}K$, então $\phi(x) = x^{\alpha+1}f(x)$ para $x \geq y$ como $f \in C_1$, então

$$y^{\alpha+1}f(y) \leq x^{\alpha+1}f(x)$$

assim,

$$\begin{aligned}
0 \leq \phi(x) - \phi(y) &= x^{\alpha+1}f(x) - y^{\alpha+1}f(y) \\
&\leq x^{\alpha+1}f(x) - y^{\alpha+1}f(x) \\
&= (x^{\alpha+1} - y^{\alpha+1})f(x) \\
&\leq ax^{-\alpha}(1+\alpha)\int_y^x \xi^\alpha d\xi \\
&\leq ax^{-\alpha}(1+\alpha)\sup_{\xi\in[y,x]} \xi^\alpha |x-y| \\
&= ax^{-\alpha}(1+\alpha)x^\alpha|x-y| \\
&= a(1+\alpha)|x-y|
\end{aligned}$$

para $\delta < \dfrac{\varepsilon}{a(1+\alpha)}$ obtemos nossa afirmação. Com um cálculo básico é possível obter que cada função $\phi \in X^{\alpha+1}K$ é uniformemente limitada. Como $X^{\alpha+1}K$ é compacto, consequentemente, para cada $f \in K$ a sequência

$$\varphi_n(f) = X^{\alpha+1}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} P^i f$$

tem pontos de acumulação em C^0, uma vez que 1.1.41 é válido. Logo, existe $(\varphi_k) \subset X^{\alpha+1}K$ que converge para um ponto de $X^{\alpha+1}K$, e assim esse ponto é de acumulação. Seja $h_* \in X^{\alpha+1}K$ tal ponto. Temos $h_* = X^{\alpha+1}h$, com $h \in K$ afirmamos que $h = X^{-\alpha-1}h_*$ é um ponto fixo de P. Com efeito, observe que $\varphi_k(f) = X^{\alpha+1}\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} P^i f$ converge para $h_* = X^{\alpha+1}h$, então $X^{-\alpha-1}\varphi_k(f) \to h$, onde $h = X^{-\alpha-1}h_*$. Desse modo,

$$\begin{aligned}
\|PX^{-\alpha-1}\varphi_k(f) - X^{-\alpha-1}\varphi_k(f)\|_1 &= \left\|\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} P^{i+1}f - \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} P^i f\right\|_1 && (2.20) \\
&= \frac{1}{k}\left\|\sum_{i=0}^{k-1} P^{i+1}f - \sum_{i=0}^{k-1} P^i f\right\|_1 && (2.21) \\
&= \frac{1}{k}\|P^k f - f\|_1 && (2.22) \\
&\leq \frac{1}{k}\|P^k f + f\|_1 && (2.23) \\
&\leq \frac{1}{k}(\|P^k\|_1\|f\|_1 + \|f\|_1) && (2.24) \\
&\leq \frac{2}{k}\|f\|_1 && (2.25)
\end{aligned}$$

onde em 2.25 usamos 1.2. Logo, quando $k \to \infty$, obtemos $\|PX^{-\alpha-1}\varphi_k(f) - X^{-\alpha-1}\varphi_k(f)\|_1 \to 0$. Como P é limitado e a norma $\| \ \|_1$ é contínua, temos $\|Ph - h\| = 0$, ou seja, $Ph = h$, provando a nossa afirmação. Afirmamos também que $h \in C_*$. De fato, h_* é um ponto de

acumulação de $X^{\alpha+1}K$, então
$$h_* = X^{\alpha+1}h$$
com, $h \in K$. Como $K = \{f \in C_* \mid m(f) = 1\}$, logo $h \in C_*$ e então $h(x) \leq ax^{-\alpha}$. Finalmente, pelo raciocínio desenvolvido para mostrar que $X^{\alpha+1}K$ é um conjunto equicontinuo podemos concluir que h é localmente Lipschitz. $\square$

Lema 2.2.6. *Para cada função $f \in C_*$*

$$\inf_{x\in[0,1]} f(x) = f(1) \geq \min\left\{a, \left[\frac{\alpha(1+\alpha)}{a^\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}\int_0^1 f dm.$$

Demonstração. É claramente suficiente mostrar o caso $\displaystyle\int_0^1 f dm = 1$. Já vimos que

$$f(x) \leq ax^{-\alpha},$$

pois $f \in C^* = \{f \in C_1 \cap L^1[0,1] \mid f(x) \leq ax^{-\alpha}m(f)\}$. E como $f \in C_1$ temos

$$x^{\alpha+1}f(x) \leq 1^{\alpha+1}f(1) \Rightarrow f(x) \leq x^{-\alpha-1}f(1).$$

Tomando o ponto $x_* = a^{-1}f(1)$. A esquerda, a primeira desigualdade é estrita e o oposto vale à sua direita. Se $x_* > 1$ então $a^{-1}f(1) > 1 \Rightarrow f(1) > a$. De outra forma se $x_* < 1$, temos

$$\begin{aligned}
1 = m(f) = \int_0^1 f dm &= \int_0^{x_*} f dm + \int_{x_*}^1 f dm \\
&\leq \int_0^{x_*} a\xi^{-\alpha} dm + \int_{x_*}^1 \xi^{-1-\alpha} f(1) dm \\
&= \left.\frac{a\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^{x_*} - \left.\frac{\xi^{-\alpha}}{\alpha}f(1)\right|_{x_*}^1 \\
&= \left.\frac{a\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^{x_*} + \left.\frac{\xi^{-\alpha}}{\alpha}f(1)\right|_1^{x_*} \\
&= \frac{ax_*^{1-\alpha}}{1-\alpha} + f(1)\frac{x_*^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{f(1)}{\alpha} \\
&= \frac{aa^{\alpha-1}f(1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{a^\alpha f(1)^{1-\alpha}}{\alpha} - \frac{f(1)}{\alpha} \\
&\leq \frac{a^\alpha f(1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{a^\alpha f(1)^{1-\alpha}}{\alpha} \\
&= \frac{\alpha a^\alpha f(1)^{1-\alpha} + a^\alpha f(1)^{1-\alpha} - \alpha a^\alpha f(1)^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}
\end{aligned}$$

daí, vamos obter

$$1 \leq \frac{a^\alpha f(1)^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)} \Rightarrow \left[\frac{\alpha(1-\alpha)}{a^\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq f(1)$$

do qual segue o lema. $\square$

Capítulo 3

Uma perturbação aleatória

Neste capítulo, vamos mostrar as ideias chaves do artigo, que é a pertubação aleatória e suas propriedades. Além disso, iremos definir o kernel do Operador Pertubado $\mathbb{P}_\varepsilon$ e mostrar que em S^1 este kernel está limitado inferiormente por um valor $\gamma > 0$.

3.1 O Mapa Perturbado

Vamos identificar $[0,1]$ com o círculo S^1, em S^1 o mapa T não é suave, mas é continuo, cuja identificação pode ser definida por

$$\gamma : [0,1] \to S^1$$

$$\gamma(t) = e^{2\pi i t}$$

podemos definir a bola

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in S^1; |x - y| \leq \varepsilon\}$$

e o operador média

$$\mathbb{A}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy. \tag{3.1}$$

Agora vamos definir o operador perturbado por

$$\mathbb{P}_\varepsilon = P^{n_\varepsilon} \mathbb{A}_\varepsilon$$

onde n_ε será especificado mais tarde.
O lema a seguir mostra que o operador perturbado não é muito diferente do original, desde que consideremos os observáveis.

Lema 3.1.1. *Para cada $f \in C_*$*

$$\|P^{n_\varepsilon} f - \mathbb{P}_\varepsilon f\|_1 \leq c_1 \|f\|_1 \varepsilon^{1-\alpha}$$

onde $c_1 = \dfrac{10a}{\alpha(1-\alpha)}$.

Demonstração. Assumimos que $f \in C_*$ e $\int_0^1 f dm = 1$. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned}
\|P^{n_\varepsilon} f - \mathbb{P}_\varepsilon f\|_1 &= \|P^{n_\varepsilon} f - P^{n_\varepsilon}\mathbb{A}_\varepsilon f\|_1 && (3.2)\\
&= \|P^{n_\varepsilon}(f - \mathbb{A}_\varepsilon f)\|_1 && (3.3)\\
&\leq \|P^{n_\varepsilon}\|_1 \|f - \mathbb{A}_\varepsilon f\|_1 && (3.4)\\
&\leq \|P\|_1^{n_\varepsilon} \|f - \mathbb{A}_\varepsilon f\|_1 && (3.5)\\
&\leq \|f - \mathbb{A}_\varepsilon f\|_1 && (3.6)
\end{aligned}$$

onde em 3.5 usamos o fato que $\|P\|_1 \leq 1$ uma vez que 1.2.9 vale. Vamos agora relembrar as seguintes estimativas

$$f(x) \leq a x^{-\alpha} \tag{3.7}$$

$$\frac{f(y)}{f(x)} \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{1+\alpha} \quad \forall\ x \geq y. \tag{3.8}$$

Iremos limitar a norma L^1 da diferença entre f e a média. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|f - \mathbb{A}_\varepsilon f\|_1 &= \int_0^1 |f(x) - \mathbb{A}_\varepsilon f(x)| dx\\
&= \int_0^1 \left| f(x) - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy \right| dx\\
&= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left| f(x) - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy \right| dx + \int_{B_\varepsilon(0)} \left| f(x) - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy \right| dx\\
&= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left| \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(x)dy - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy \right| dx\\
&\qquad + \int_{B_\varepsilon(0)} \left| f(x) - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy \right| dx\\
&= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} \left| \int_{B_\varepsilon(x)} [f(x) - f(y)]dy \right| dx + \int_{B_\varepsilon(0)} \left| f(x) - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy \right| dx\\
&\leq \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \right) dx + \int_{B_\varepsilon(0)} \left| f(x) + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy \right| dx\\
&\leq \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \right) dx + \int_{B_\varepsilon(0)} \left(|f(x)| + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} |f(y)| dy \right) dx\\
&= \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \right) dx + \int_{B_\varepsilon(0)} f(x)dx\\
&\qquad + \int_{B_\varepsilon(0)} \left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f-\mathbb{A}_\varepsilon f\|_1 \ &\leq\ \int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\left\{\int_{x-\varepsilon}^{x}|f(x)-f(y)|\,dy+\int_x^{x+\varepsilon}|f(x)-f(y)|\,dy\right\}\right)dx\\ &\quad+\int_{B_\varepsilon(0)}f(x)dx+\int_{B_\varepsilon(0)}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)}f(y)dy\right)dx.\end{aligned}$$

Usando 1.1.42, obtemos que

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(0)}f(y)dy \geq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)}f(y)dy$$

logo,

$$\begin{aligned}\|f-\mathbb{A}_\varepsilon f\|_1 \ &\leq\ \int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\left\{\int_{x-\varepsilon}^{x}|f(x)-f(y)|\,dy+\int_x^{x+\varepsilon}|f(x)-f(y)|\,dy\right\}\right)dx\\ &\quad+\int_{B_\varepsilon(0)}f(x)dx+\int_{B_\varepsilon(0)}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(0)}f(y)dy\right)dx\\ &\leq\ \int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\left\{\int_{x-\varepsilon}^{x}|f(x)-f(y)|\,dy+\int_x^{x+\varepsilon}|f(x)-f(y)|\,dy\right\}\right)dx\\ &\quad+\int_{B_\varepsilon(0)}f(x)dx+\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(0)}f(y)dy\\ &=\ \int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\left\{\int_{x-\varepsilon}^{x}|f(x)-f(y)|\,dy+\int_x^{x+\varepsilon}|f(x)-f(y)|\,dy\right\}\right)dx\\ &\quad+\int_{B_\varepsilon(0)}f(x)dx+\int_{B_\varepsilon(0)}f(y)dy\\ &\leq\ \int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\left\{\int_{x-\varepsilon}^{x}|f(x)-f(y)|\,dy+\int_x^{x+\varepsilon}|f(x)-f(y)|\,dy\right\}\right)dx\\ &\quad+\int_{B_\varepsilon(0)}f(x)dx+\int_{B_{2\varepsilon}(0)}f(y)dy.\end{aligned}$$

Finalmente, como $x-\varepsilon\leq y\leq x \Rightarrow f(x)\leq f(y)\Rightarrow f(x)-f(y)\leq 0$ e $x\leq y\Rightarrow f(y)\leq f(x)\Rightarrow f(x)-f(y)\geq 0$, temos

$$\begin{aligned}\|f-\mathbb{A}_\varepsilon f\|_1 \ &\leq\ \int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x}[f(y)-f(x)]dy\right)dx+\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon}[f(x)-f(y)]dy\right)dx\\ &\quad+\int_{B_\varepsilon(0)}f(x)dx+\int_{B_{2\varepsilon}(0)}f(y)dy\\ &=\ \frac{1}{2\varepsilon}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x}[f(y)-f(x)]dy\right)dx+\frac{1}{2\varepsilon}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\int_x^{x+\varepsilon}[f(x)-f(y)]dy\right)dx\\ &\quad+\int_{B_\varepsilon(0)}f(x)dx+\int_{B_{2\varepsilon}(0)}f(y)dy\end{aligned}$$

vamos desenvolver o primeiro termo da desigualdade acima,

1) $\displaystyle\frac{1}{2\varepsilon}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x}[f(y)-f(x)]dy\right)dx$

do seguinte modo. Observe que

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x}[f(y)-f(x)]dy\right)dx \ = \ \frac{1}{2\varepsilon}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x}f(y)\left[1-\frac{f(x)}{f(y)}\right]dy\right)dx$$

daí, $x-\varepsilon \leq y \Rightarrow x \leq y+\varepsilon \Rightarrow f(y+\varepsilon) \leq f(x) \Rightarrow \dfrac{f(y+\varepsilon)}{f(y)} \leq \dfrac{f(x)}{f(y)} \Rightarrow$
$-\dfrac{f(y+\varepsilon)}{f(y)} \geq -\dfrac{f(x)}{f(y)} \Rightarrow 1-\dfrac{f(y+\varepsilon)}{f(y)} \geq 1-\dfrac{f(x)}{f(y)}$. Assim,

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x} f(y)\left[1-\frac{f(x)}{f(y)}\right]dy\right)dx \quad \leq \quad \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x} f(y)\left[1-\frac{f(y+\varepsilon)}{f(y)}\right]dy\right)dx.$$

Agora, veja que $y+\varepsilon \geq y \Rightarrow \dfrac{f(y)}{f(y+\varepsilon)} \leq \left(\dfrac{y+\varepsilon}{y}\right)^{1+\alpha} \Rightarrow -\dfrac{f(y)}{f(y+\varepsilon)} \geq -\left(\dfrac{y+\varepsilon}{y}\right)^{1+\alpha} \Rightarrow$
$-\dfrac{f(y+\varepsilon)}{f(y)} \leq -\left(\dfrac{y}{y+\varepsilon}\right)^{1+\alpha} \Rightarrow 1-\dfrac{f(y+\varepsilon)}{f(y)} \leq 1-\left(\dfrac{y}{y+\varepsilon}\right)^{1+\alpha}$. Onde na primeira implicação usamos a estimativa 3.8. Além disso, a estimativa 3.7, nos dá $f(y) \leq ay^{-\alpha}$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x}[f(x)-f(y)]dy\right)dx \\
&\qquad \leq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x} f(y)\left[1-\frac{f(y+\varepsilon)}{f(y)}\right]dy\right)dx \\
&\qquad \leq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x} ay^{-\alpha}\left[1-\left(\frac{y}{y+\varepsilon}\right)^{1+\alpha}\right]dy\right)dx \\
&\qquad = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x} ay^{-\alpha}dy-\int_{x-\varepsilon}^{x}\frac{ay}{(y+\varepsilon)^{1+\alpha}}dy\right)dx \\
&\qquad = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x} ay^{-\alpha}dy-\int_{x}^{x+\varepsilon}\frac{a(u-\varepsilon)}{u^{1+\alpha}}du\right)dx \\
&\qquad = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x} ay^{-\alpha}dy-\int_{x}^{x+\varepsilon}au^{-\alpha}du+\int_{x}^{x+\varepsilon}a\varepsilon u^{-1-\alpha}du\right)dx \\
&\qquad = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\left.\frac{ay^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x-\varepsilon}^{x}-\left.\frac{au^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x}^{x+\varepsilon}-\left.\frac{a\varepsilon u^{-\alpha}}{\alpha}\right|_{x}^{x+\varepsilon}\right)dx \\
&\qquad = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\frac{ax^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{a(x-\varepsilon)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{a(x+\varepsilon)^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{ax^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)dx \\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(-\frac{a\varepsilon(x+\varepsilon)^{-\alpha}}{\alpha}+\frac{a\varepsilon x^{-\alpha}}{\alpha}\right)dx \\
&\qquad = \frac{a}{2(1-\alpha)\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[2x^{1-\alpha}-(x-\varepsilon)^{1-\alpha}-(x+\varepsilon)^{1-\alpha}\right]dx \\
&\qquad\qquad +\frac{a}{2\alpha}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[x^{-\alpha}-(x+\varepsilon)^{-\alpha}\right]dx \\
&\qquad = \frac{a}{2(1-\alpha)\varepsilon}\left.\left[\frac{2x^{2-\alpha}}{2-\alpha}-\frac{(x+\varepsilon)^{2-\alpha}}{2-\alpha}-\frac{(x-\varepsilon)^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]\right|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \\
&\qquad\qquad +\frac{a}{2\alpha}\left.\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{(x+\varepsilon)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]\right|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}&\left(\int_{x-\varepsilon}^{x}[f(x)-f(y)]dy\right)dx\\
&\leq \frac{a}{2(1-\alpha)(2-\alpha)\varepsilon}[2(1-\varepsilon)^{2-\alpha}-2\varepsilon^{2-\alpha}-1+(2\varepsilon)^{2-\alpha}-(1-2\varepsilon)^{2-\alpha}]\\
&\qquad +\frac{a}{2\alpha(1-\alpha)}[(1-\varepsilon)^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}-1+2^{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}].
\end{aligned}
$$

Agora na primeira expressão, da igualdade acima, considere

$$g(\xi)=(2\xi)^{2-\alpha}-2\xi^{2-\alpha}-(1-2\xi)^{2-\alpha}-1+2(1-\xi)^{2-\alpha}$$

derivando g com relação a ξ obtemos

$$
\begin{aligned}
g'(\xi) &= (2-\alpha)(2\xi)^{1-\alpha}2-2(2-\alpha)\xi^{1-\alpha}-(2-\alpha)(1-2\xi)^{1-\alpha}(-2)\\
&\qquad +2(2-\alpha)(1-\xi)^{1-\alpha}(-1)\\
&= (2-\alpha)2^{2-\alpha}\xi^{1-\alpha}-2(2-\alpha)\xi^{1-\alpha}+2(2-\alpha)(1-2\xi)^{1-\alpha}-2(2-\alpha)(1-\xi)^{1-\alpha}\\
&\leq (2-\alpha)2^{2-\alpha}\xi^{1-\alpha}-2(2-\alpha)\xi^{1-\alpha}\\
&= (2-\alpha)\xi^{1-\alpha}[2^{2-\alpha}-2].
\end{aligned}
$$

Onde a primeira desigualdade acima obtemos do fato que definido

$$u(\xi)=2(2-\alpha)(1-\xi)^{1-\alpha}$$

$u'(\xi)=-2(2-\alpha)(1-\alpha)(1-\xi)^{-\alpha}$ é negativa, pois $\xi\in[0,1]$, logo u é decrescente e assim $2(2-\alpha)(1-2\xi)^{1-\alpha}-2(2-\alpha)(1-\xi)^{1-\alpha}<0$. Pelo Teorema do Valor Médio, aplicado a g em $[0,\varepsilon]$, existe um $c\in(0,\varepsilon)$ tal que

$$
\begin{aligned}
g(\varepsilon)-g(0) &= g'(c)(\varepsilon-0)\\
(2\varepsilon)^{2-\alpha}-2\varepsilon^{2-\alpha}-(1-2\varepsilon)^{2-\alpha}-1+2(1-\varepsilon)^{2-\alpha} &= g'(c)\varepsilon\\
&\leq (2-\alpha)c^{1-\alpha}[2^{2-\alpha}-2]\varepsilon\\
&\leq (2-\alpha)\varepsilon^{2-\alpha}[2^{2-\alpha}-2]
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade usamos o fato da função $j(\xi)=\xi^{1-\alpha}$ ser crescente e $c<\varepsilon$, daí

$$\frac{a}{2(1-\alpha)(2-\alpha)\varepsilon}[2(1-\varepsilon)^{2-\alpha}-2\varepsilon^{2-\alpha}-1+(2\varepsilon)^{2-\alpha}-(1-2\varepsilon)^{2-\alpha}]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{a(2-\alpha)}{2(1-\alpha)(2-\alpha)\varepsilon}[2^{2-\alpha}-2]\varepsilon^{2-\alpha}\\
&= \frac{a}{2(1-\alpha)}[2^{2-\alpha}-2]\varepsilon^{1-\alpha}\\
&= \frac{a}{1-\alpha}[2^{1-\alpha}-1]\varepsilon^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

como $2^{1-\alpha}<2$, obtemos $2^{1-\alpha}-1<1$ e $\alpha<1 \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha}>1$ e assim concluímos que

$$\frac{a}{2(1-\alpha)(2-\alpha)\varepsilon}[2(1-\varepsilon)^{2-\alpha}-2\varepsilon^{2-\alpha}-1+(2\varepsilon)^{2-\alpha}-(1-2\varepsilon)^{2-\alpha}] \leq \frac{a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha}.$$

No segundo termo, como $(1-\varepsilon)<1 \Rightarrow (1-\varepsilon)^{1-\alpha}<1 \Rightarrow (1-\varepsilon)^{1-\alpha}-1<0$ e $-\varepsilon^{1-\alpha}<0$, logo

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2\alpha(1-\alpha)}[(1-\varepsilon)^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}-1+2^{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}] &\leq \frac{a}{2\alpha(1-\alpha)}2^{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}\\
&\leq \frac{a2\varepsilon^{1-\alpha}}{2\alpha(1-\alpha)}\\
&= \frac{a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

podemos concluir do desenvolvimento dessas desigualdades que

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x}[f(y)-f(x)]dy\right)dx \leq \frac{2a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha}$$

agora vamos desenvolver a segunda expressão,

2) $\displaystyle\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x}^{x+\varepsilon}[f(x)-f(y)]dy\right)dx.$

Com efeito, observe que

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x}^{x+\varepsilon}[f(x)-f(y)]dy\right)dx = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x}^{x+\varepsilon}f(y)\left[\frac{f(x)}{f(y)}-1\right]dy\right)dx$$

desse modo, como $x\leq y\leq x+\varepsilon \Rightarrow x-\varepsilon\leq y-\varepsilon\leq x \Rightarrow y-\varepsilon\leq x \Rightarrow f(x)\leq f(y-\varepsilon) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{f(y)}\leq\dfrac{f(y-\varepsilon)}{f(y)}$. Como $y\geq y-\varepsilon$ obtemos $\dfrac{f(y-\varepsilon)}{f(y)}\leq\left(\dfrac{y}{y-\varepsilon}\right)^{1+\alpha}$, onde novamente utilizamos a estimativa 3.8 e pela estimativa 3.7 temos $f(y)\leq ay^{-\alpha}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_x^{x+\varepsilon}[f(x)-f(y)]dy\right)dx &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_x^{x+\varepsilon}f(y)\left[\frac{f(x)}{f(y)}-1\right]dy\right)dx\\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_x^{x+\varepsilon}ay^{-\alpha}\left[\left(\frac{y}{y-\varepsilon}\right)^{1+\alpha}-1\right]dy\right)dx\\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_x^{x+\varepsilon}\frac{ay}{(y-\varepsilon)^{1+\alpha}}dy-\int_x^{x+\varepsilon}ay^{-\alpha}dy\right)dx\\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x}\frac{a(u+\varepsilon)}{u^{1+\alpha}}du-\int_x^{x+\varepsilon}ay^{-\alpha}dy\right)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_{x-\varepsilon}^{x}au^{-\alpha}du+\int_{x-\varepsilon}^{x}a\varepsilon u^{-1-\alpha}du-\int_x^{x+\varepsilon}ay^{-\alpha}dy\right)dx\\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\left.\frac{au^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x-\varepsilon}^{x}-\left.\frac{a\varepsilon u^{-\alpha}}{\alpha}\right|_{x-\varepsilon}^{x}-\left.\frac{ay^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{x}^{x+\varepsilon}\right)dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[\frac{ax^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{a(x-\varepsilon)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{a\varepsilon x^{-\alpha}}{\alpha}+\frac{a\varepsilon(x-\varepsilon)^{-\alpha}}{\alpha}\right]dx\\
&\qquad -\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[\frac{a(x+\varepsilon)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{ax^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]dx\\
&= \frac{a}{2\varepsilon(1-\alpha)}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[2x^{1-\alpha}-(x-\varepsilon)^{1-\alpha}-(x+\varepsilon)^{1-\alpha}]dx\\
&\qquad +\frac{a}{2\alpha}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[(x-\varepsilon)^{-\alpha}-x^{-\alpha}]dx\\
&= \frac{a}{2\varepsilon(1-\alpha)}\left.\left[\frac{2x^{2-\alpha}}{2-\alpha}-\frac{(x-\varepsilon)^{2-\alpha}}{2-\alpha}-\frac{(x+\varepsilon)^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]\right|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\\
&\qquad +\frac{a}{2\alpha}\left.\left[\frac{(x-\varepsilon)^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]\right|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\\
&= \frac{a}{2\varepsilon(1-\alpha)(2-\alpha)}[2(1-\varepsilon)^{2-\alpha}-(1-2\varepsilon)^{2-\varepsilon}-1-2\varepsilon^{2-\alpha}+(2\varepsilon)^{2-\alpha}]\\
&\qquad +\frac{a}{2(1-\alpha)\alpha}[(1-2\varepsilon)^{1-\alpha}-(1-\varepsilon)^{1-\alpha}+\varepsilon^{1-\alpha}].
\end{aligned}$$

Tomando $h(\xi)=2(1-\xi)^{2-\alpha}-(1-2\xi)^{2-\alpha}-1-2\xi^{2-\alpha}+(2\xi)^{2-\alpha}$ temos que

$$\begin{aligned}
h'(\xi) &= 2(2-\alpha)(1-\xi)^{1-\alpha}.(-1)-(2-\alpha)(1-2\xi)^{1-\alpha}(-2)-2(2-\alpha)\xi^{1-\alpha}\\
&\qquad +(2-\alpha)(2\xi)^{1-\alpha}.2\\
&= -2(2-\alpha)(1-\xi)^{1-\alpha}+2(2-\alpha)(1-2\xi)^{1-\alpha}-2(2-\alpha)\xi^{1-\alpha}+2(2-\alpha)(2\xi)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

como $(1-\xi)^{1-\alpha} > (1-2\varepsilon)^{1-\alpha} \Rightarrow 2(2-\alpha)(1-2\xi)^{1-\alpha} - 2(2-\alpha)(1-\xi)^{1-\alpha} < 0$, assim

$$h'(\xi) \leq (2-\alpha)\xi^{1-\alpha}[2^{2-\alpha}-2].$$

Novamente, pelo Teorema do Valor Médio, existe um $d \in (0,\varepsilon)$ tal que

$$\begin{aligned} h(\varepsilon)-h(0) &= h'(d)(\varepsilon-0) \\ 2(1-\varepsilon)^{2-\alpha}-(1-2\varepsilon)^{2-\alpha}-1-2\varepsilon^{2-\alpha}+(2\varepsilon)^{2-\alpha} &= h'(d)\varepsilon \\ &\leq (2-\alpha)d^{1-\alpha}[2^{2-\alpha}-2]\varepsilon \\ &\leq (2-\alpha)\varepsilon^{2-\alpha}[2^{2-\alpha}-2] \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{a}{2\varepsilon(1-\alpha)(2-\alpha)}[2(1-\varepsilon)^{2-\alpha}-(1-2\varepsilon)^{2-\varepsilon}-1-2\varepsilon^{2-\alpha}+(2\varepsilon)^{2-\alpha}] &\leq \frac{a(2-\alpha)}{2\varepsilon(1-\alpha)(2-\alpha)}\varepsilon^{2-\alpha} \\ &\leq \frac{a}{1-\alpha}[2^{1-\alpha}-1]\varepsilon^{1-\alpha} \\ &\leq \frac{a}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha} \end{aligned}$$

portanto,

$$\frac{a}{2\varepsilon(1-\alpha)(2-\alpha)}[2(1-\varepsilon)^{2-\alpha}-(1-2\varepsilon)^{2-\varepsilon}-1-2\varepsilon^{2-\alpha}+(2\varepsilon)^{2-\alpha}] \leq \frac{a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha}.$$

Para a segunda expressão,

$$\begin{aligned} \frac{a}{2\alpha(1-\alpha)}[(1-2\varepsilon)^{1-\alpha}-(1-\varepsilon)^{1-\alpha}+\varepsilon^{1-\alpha}] &\leq \frac{a}{2\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha} \\ &\leq \frac{a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\int_x^{x+\varepsilon}[f(x)-f(y)]dy\right)dx \leq \frac{2a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha}$.
Agora usando a identificação de $[0,1]$ com S^1, obtemos que:

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\alpha} = \infty$

2) $\lim\limits_{\theta\to 0^-} x^{-\alpha} = 1$

logo, $\int_{-\varepsilon}^{0} x^{-\alpha}dx < \int_{0}^{\varepsilon} x^{-\alpha}dx$. Usando esse fato, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_\varepsilon(0)} f(x)dx &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx \\
&= \int_{-\varepsilon}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\varepsilon} f(x)dx \\
&\leq 2\int_{0}^{\varepsilon} ax^{-\alpha}dx \\
&= 2a\int_{0}^{\varepsilon} x^{-\alpha}dx \\
&= \frac{2a}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha} \\
&\leq \frac{2a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo temos,

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2\varepsilon}(0)} f(y)dy &= \int_{B_{2\varepsilon}(0)} f(x)dx \\
&= \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} f(x)dx \\
&= \int_{-2\varepsilon}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2\varepsilon} f(x)dx \\
&\leq 2\int_{0}^{2\varepsilon} ax^{-\alpha}dx \\
&= 2a\int_{0}^{2\varepsilon} x^{-\alpha}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2\varepsilon}(0)} f(y)dy &\leq \frac{2a}{1-\alpha}(2\varepsilon)^{1-\alpha} \\
&\leq \frac{4a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Desse modo, usando todas as desigualdades encontradas na expressão

$$\begin{aligned}
\|f - \mathbb{A}_\varepsilon f\|_1 &\leq \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \left(\frac{1}{2\varepsilon} \left\{ \int_{x-\varepsilon}^{x} |f(x) - f(y)|\, dy + \int_{x}^{x+\varepsilon} |f(x) - f(y)|\, dy \right\} \right) dx \\
&\quad + \int_{B_\varepsilon(0)} f(x)dx + \int_{B_{2\varepsilon}(0)} f(y)dy
\end{aligned}$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
\|f - \mathbb{A}_\varepsilon f\|_1 &\leq \frac{2a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha} + \frac{2a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha} + \frac{2a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha} + \frac{4a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha} \\
&\leq \frac{10a}{\alpha(1-\alpha)}\varepsilon^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

o que prova o lema. □

Agora vamos obter uma nova expressão para o operador perturbado. Com efeito, para qualquer $f \in C_*$ e pela proposição 1.2.14 temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\varepsilon f(x) &= P^{n_\varepsilon}\mathbb{A}_\varepsilon f(x) \\
&= P^{n_\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(z)dz \\
&= \sum_{y\in T^{-n_\varepsilon}(x)} \frac{1}{|D_yT^{n_\varepsilon}|}\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(y)} f(z)dz \\
&= \sum_{y\in T^{-n_\varepsilon}(x)} \frac{1}{|D_yT^{n_\varepsilon}|}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 \chi_{B_\varepsilon(y)}(z)f(z)dz \\
&= \sum_{y\in T^{-n_\varepsilon}(x)} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 \chi_{B_\varepsilon(y)}(z)\frac{f(z)}{|D_yT^{n_\varepsilon}|}dz \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 \sum_{y\in T^{-n_\varepsilon}(x)} \chi_{B_\varepsilon(y)}(z)\frac{f(z)}{|D_yT^{n_\varepsilon}|}dz \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 \sum_{y\in T^{-n_\varepsilon}(x)} \frac{\chi_{B_\varepsilon(z)}(y)}{|D_yT^{n_\varepsilon}|}f(z)dz \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 P^{n_\varepsilon}\chi_{B_\varepsilon(z)}(x)f(z)dz \\
&= \int_0^1 K_\varepsilon(x,z)f(z)dz.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{P}_\varepsilon f(x) = \int_0^1 K_\varepsilon(x,z)f(z)dz.$$

Onde obtemos a igualdada da sétima linha pelo fato que, se $z \in B_\varepsilon(y)$, então $y \in B_\varepsilon(z)$, pois $|y-z|< \varepsilon$, por outro lado se $z \notin B_\varepsilon(y)$, então $y \notin B_\varepsilon(z)$, pois $|y-z|\geq \varepsilon$, logo devemos ter $\chi_{B_\varepsilon(z)}(y) = \chi_{B_\varepsilon(y)}(z)$.

Nossa próxima tarefa é encontrar um limite inferior para o Kernel $K_\varepsilon(x,z)$. Para este propósito, vamos definir T_1 como o mapa T restrito ao intervalo $[0,\frac{1}{2}]$ e $a_n = T_1^{-n}1$. Temos o seguinte limite assintótico para a sequência a_n.

Lema 3.1.2. *Para todos os inteiros $n > 0$, o seguinte é válido*

$$a_n \leq 2^{\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\right)}n^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Demonstração. O lema é comprovado por indução. Primeiro, é claramente satisfeito para $n = 1$, pois

$$a_1 = T_1^{-1}1 = \frac{1}{2} = 2^{-1} < 2^{\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Em seguida vamos supor que $a_n < cn^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}$ e vamos provar que $a_{n+1} < c(n+1)^{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}$. Se for falso, então

$$\begin{aligned} a_n &= T_1^{-n}1 \\ &= T_1^{1+(-1+n)}1 \\ &= T_1(T_1^{-(n+1)}1) \\ &= T_1(a_{n+1}) \\ &= a_{n+1}(1+2^\alpha a_{n+1}^\alpha) \\ &\geq c(n+1)^{-\frac{1}{\alpha}}(1+2^\alpha c^\alpha (n+1)^{-1}) \end{aligned}$$

pela suposição de a_n, obtemos

$$\begin{aligned} cn^{-\frac{1}{\alpha}} &\geq c(n+1)^{-\frac{1}{\alpha}}(1+2^\alpha c^\alpha (n+1)^{-1}) \\ n^{-\frac{1}{\alpha}} &\geq (n+1)^{-\frac{1}{\alpha}}\left(1+\frac{2^\alpha c^\alpha}{n+1}\right) \end{aligned}$$

ou equivalente,

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \geq 1+\frac{2^\alpha c^\alpha}{n+1} \tag{3.9}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq 1+\frac{2^\alpha c^\alpha}{n+1}. \tag{3.10}$$

Agora considere a função $f(\xi)=\xi^{\frac{1}{\alpha}}-1$, vemos que $f'(\xi)=\dfrac{1}{\alpha}\xi^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}$, consequentemente, $f''(\xi)=\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\xi^{\frac{1}{\alpha}-2}$. Como $0<\alpha<1$, temos $\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)>0$ e $\xi^{\left(\frac{1}{\alpha}-2\right)}\geq 0$, pois $\xi\geq 0$, então $f''(\xi)\geq 0,\ \forall \xi\geq 0$, logo f é convexa. Desse modo,

$$1+\frac{1}{n}=1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=(1-\frac{1}{n})1+2.\frac{1}{n}.$$

Logo, por convexidade, segue que

$$f\left(1+\frac{1}{n}\right) = f\left[(1-\frac{1}{n})1+2\cdot\frac{1}{n}\right] \tag{3.11}$$

$$\leq \left(1-\frac{1}{n}\right)f(1)+\frac{1}{n}f(2) \tag{3.12}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 0+\frac{1}{n}f(2) \tag{3.13}$$

$$= \frac{1}{n}f(2) \tag{3.14}$$

$$= \frac{1}{n}(2^{\frac{1}{\alpha}}-1). \tag{3.15}$$

Assim,

$$f\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq \frac{1}{n}(2^{\frac{1}{\alpha}}-1). \tag{3.16}$$

como $f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1$, segue que da desigualdade 3.16 e da 3.10 que

$$(2^{\frac{1}{\alpha}}-1)\frac{1}{n}\geq\frac{2^{\alpha}c^{\alpha}}{n+1}$$

isto é,

$$\begin{aligned}(2^{\frac{1}{\alpha}}-1)\frac{n+1}{n} &\geq 2^{\alpha}c^{\alpha}\\ 2^{-\alpha}(2^{\frac{1}{\alpha}}-1)\frac{n+1}{n} &\geq c^{\alpha}\\ 2^{-\alpha+1}(2^{\frac{1}{\alpha}}-1) &\geq c^{\alpha}\end{aligned}$$

o que é contraditório, pois se escolhermos $c=2^{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}}$ temos

$$c^{\alpha}=2^{\frac{1}{\alpha}+1}=2.2^{\frac{1}{\alpha}}>2^{-\alpha+1}(2^{\frac{1}{\alpha}}-1)\geq c^{\alpha}$$

□

Definimos $\Delta_k=[a_k,a_{k-1}]$ para cada $k>0$. Agora somos capazes de provar

Proposição 3.1.3. *Existe $\gamma>0$ tal que para cada $\varepsilon>0$, x, $z\in S^1$*

$$K_{\varepsilon}(x,z)\geq\gamma$$

desde que escolhamos $n_{\varepsilon}=[2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}]+1$. Aqui os colchetes representam a parte inteira.

Demonstração. Em primeiro lugar escolhemos $k_0=3$. Em seguida observe que para cada intervalo J e inteiro m

$$(P^m\chi_J)(x)=\sum_{y\in T^{-m}(x)}\frac{\chi_J(y)}{|D_yT^m|}=\sum_{y\in T^{-m}(x)}\frac{\chi_J(y)}{D_yT^m}. \tag{3.17}$$

Agora, se $\chi_J(y)=1$, então $y\in J$, como $y\in T^{-m}(x)$ temos $T^m(y)=x$, logo $x\in T^m(J)$, consequentemente, $\chi_{T^mJ}(x)=1$. Por outro lado, se $\chi_J(y)=0$, então $y\notin J$ e utilizando o mesmo raciocínio vamos obter que $x\notin T^m(J)$, ou seja, $\chi_{T^mJ}(x)=0$. Logo podemos concluir que

$$\chi_{T^mJ}(x)=\chi_J(y). \tag{3.18}$$

Consequentemente, de 3.17 obtemos

$$P^m\chi_J(x)\geq\chi_{T^mJ}(x)\cdot\inf_{y\in J}(D_yT^m)^{-1}.$$

Seja $\delta_0=a_{k_0}-a_{k_0+1}$. Como cada intervalo J aplicado em T sofre uma expansão existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $T^{n_0}(J)=[0,1]$, logo para $n\geq n_0$ teremos $\chi_{T^nJ}(x)\equiv 1$, então encontraremos um c_0 tal que para todo intervalo I de tamanho maior que δ_0 vale

$$P^n \chi_I \geq c_0$$

quando $n \geq n_0$. Assim, a tarefa é controlar o $\inf\limits_{y \in J}(D_y T^m)^{-1}$, onde m é o tempo necessário para que o intervalo J se torne um intervalo de tamanho δ_0. Seja $I_0 = [0, a_{k_0}]$. Tomando um intervalo J, três possibilidades podem ocorrer:

1) $J \cap I_0 = \emptyset$.

2) $J \cap I_0 \neq \emptyset$ e J contém, no máximo, um a_k para $k > k_0$.

3) J contém mais de um a_k para $k > k_0$.

Podemos associar a cada J uma sequência $n_1, k_1, ..., k_{p-1}, n_p$ de inteiros (n_1 pode ser nulo) retraçando a trajetória de J da seguinte maneira: Para o tempo n_1, $T^{n_1}(J) \cap I_0 = \emptyset$, então a imagem de J entra na região intermitente I_0 e $T^{k_1+n_1}(J) \cap I_0 \neq \emptyset$, onde $T^{k_1+n_1}(J)$ contém no máximo, um a_k para $k > k_0$ e $k = k_1 + k_0$, então após k_1 interações ela existe a partir de I_0. Então a imagem de J fica na região hiperbólica por n_2 iterações, e assim por diante. Finalmente terminamos quando o tamanho do intervalo torna-se maior que δ_0 ou se a imagem de J contém mais de um a_k para $k > k_0$. Vamos ver o que acontece nesses regimes.

1) Sejam $D = \sup\limits_{y \in [a_{k_0+1}, 1]} \dfrac{D_y^2 T}{D_y T^2}$ e $r = (D_{a_{k_0+1}} T)^{-1}$. Para $n \leq n_1$ as estimativas de distorção usuais produzem, para cada $y \in J$, com $c_2 = \dfrac{D}{1-r}$,

$$\frac{D_y T^n |J|}{|T^n J|} \leq \text{Exp}[c_2 |T^n J|]. \tag{3.19}$$

Com efeito, para $n \leq n_1$ temos que para cada $y_1, y_2 \in J$,

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{D_{y_1} T^n}{D_{y_2} T^n}\right) &= \log\left(\frac{\prod_{j=0}^{n-1} D_{T^j(y_1)} T}{\prod_{j=0}^{n-1} D_{T^j(y_2)} T}\right) && (3.20) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (\log D_{T^j(y_1)} T - \log D_{T^j(y_2)} T). && (3.21) \end{aligned}$$

Usando o Teorema do Valor Médio em cada parcela em 3.21, obtemos um $c_j \in (T^j(y_1), T^j(y_2))$, para cada $j \in 0, 1, ..., n-1$, tal que

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{D_{y_1}T^n}{D_{y_2}T^n}\right) &= \sum_{j=0}^{n-1}(\log D_{T^j(y_1)}T - \log D_{T^j(y_2)}T) && (3.22)\\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1}[\log D_\xi T]'\Big|_{\xi=c_j}.|T^j(y_1) - T^j(y_2)| && (3.23)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{D^2_{c_j}T}{D_{c_j}T}.|T^j(y_1) - T^j(y_2)| && (3.24)\\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1}\frac{D^2_{c_j}T}{D_{c_j}T}.\frac{1}{\lambda^{n-j}}.|T^n(y_1) - T^n(y_2)|. && (3.25)
\end{aligned}$$

Onde em 3.24 usamos a proposição 1.2.15, onde estamos supondo conhecido o valor de λ. Nosso candidato ao valor de λ é encontrado do seguinte modo, observe que para $n \leq n_1$ vale que $T^n(J) \cap I_0 = \emptyset$, logo $D_yT > D_{a_{k_0+1}}T$, para todo $y \in T^n(J)$, uma vez que, $D_\xi T$ é uma função crescente. Assim,

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{D_{y_1}T^n}{D_{y_2}T^n}\right) &\leq \sum_{j=0}^{n-1}\frac{D^2_{c_j}T}{D_{c_j}T}.\frac{1}{(D_{a_{k_0+1}}T)^{n-j}}.|T^n(y_1) - T^n(y_2)| && (3.26)\\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1}\frac{D^2_{c_j}T}{D_{c_j}T}.\frac{1}{D_{a_{k_0+1}}T}\left(\frac{1}{D_{a_{k_0+1}}T}\right)^{n-1-j}.|T^nJ| && (3.27)
\end{aligned}$$

como $a_{k_0} < c_j$, $a_{k_0+1} < a_{k_0}$, D_yT crescente e D^2_yT decrescente, temos

$$\frac{D^2_{c_j}T}{D_{c_j}T} < \frac{D^2_{a_{k_0}}T}{D_{a_{k_0}}T} < \frac{D^2_{a_{k_0+1}}T}{D_{a_{k_0}}T} \tag{3.28}$$

logo,

$$\frac{D^2_{c_j}T}{D_{c_j}T}.\frac{1}{D_{a_{k_0+1}}T} < \frac{D^2_{a_{k_0+1}}T}{D_{a_{k_0}}T}.\frac{1}{D_{a_{k_0+1}}T} = D = \sup_{y\in[a_{k_0+1},1]}\frac{D^2_yT}{D_yT^2} \tag{3.29}$$

Portanto, usando 3.29 em 3.27 temos

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{D_{y_1}T^n}{D_{y_2}T^n}\right) &\leq D.|T^nJ|\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{D_{a_{k_0+1}}T}\right)^{n-1-j}\\
&= D.|T^nJ|\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{D_{a_{k_0+1}}T}\right)^{j}\\
&\leq D.|T^nJ|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{D_{a_{k_0+1}}T}\right)^{j}\\
&\leq \frac{D}{1-r}|T^nJ|
\end{aligned}$$

onde $r = \dfrac{1}{D_{a_{k_0+1}}T}$. Pela última expressão obtemos,

$$\frac{D_{y_1}T^n}{D_{y_2}T^n} \leq \text{Exp}[c_2|T^nJ|] \tag{3.30}$$

com $c_2 = \dfrac{D}{1-r}$. Como a desigualdade vale para qualquer $y_1, y_2 \in J$ e $n \leq n_1$, se $J = [a_1, a_2]$, então $T^n(J) = [T^n(a_1), T^n(a_2)]$. Logo pelo Teorema do Valor Médio, temos que existe $y_2 \in J$ aplicado em T^n tal que

$$|T^nJ| = D_{y_2}T^n \cdot |J|. \tag{3.31}$$

Substituindo 3.31 em 3.30, obtemos a expressão 3.19. Consequentemente, podemos observar que 3.19 nos dá um controle sobre D_yT^n para $n \leq n_1$.

2) Seja $J_1 = T^{n_1}J$. Vamos ver o que acontece na região intermitente. Supondo que $J_1 \subset (a_{k+1}, a_{k-1})$, isto é, J_1 contém no máximo um a_k, com $k = k_0 + k_1$. Neste caso, um cálculo direto para $j \leq k_1$ e $y_1, y_2 \in J_1$ implica

$$\log\left(\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j}\right) = \log\left(\frac{\prod_{i=0}^{j-1} D_{T^i(y_1)}T}{\prod_{i=0}^{j-1} D_{T^i(y_2)}T}\right) \tag{3.32}$$

$$= \sum_{i=0}^{j-1}(\log D_{T^i(y_1)}T - \log D_{T^i(y_2)}T). \tag{3.33}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, para cada i temos que existe um $c_i \in (T^i(y_1), T^i(y_2))$ tal que

$$\log\left(\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j}\right) \leq \sum_{i=0}^{j-1}\frac{D^2_{c_i}T}{D_{c_i}T}.|T^i(y_1) - T^i(y_2)|. \tag{3.34}$$

Como $y_1, y_2 \in J_1 \subset (a_{k+1}, a_{k-1})$, temos $(y_1, y_2) \subset (a_{k+1}, a_{k-1})$. Consequentemente, $(T^i(y_1), T^i(y_2)) \subset (a_{k+1-i}, a_{k-1-i})$. Logo para cada i, temos

$$D^2_{c_i}T \leq \sup_{\xi \in [a_{k+1-i}, a_{k-1-i}]} D^2_\xi T \tag{3.35}$$

e

$$\inf_{\xi \in [a_{k+1-i}, a_{k-1-i}]} D_\xi T \leq D_{c_i}T \Rightarrow \frac{1}{D_{c_i}T} \leq \frac{1}{\inf_{\xi \in [a_{k+1-i}, a_{k-1-i}]} D_\xi T}. \tag{3.36}$$

Assim,

$$\frac{D^2_{c_i}T}{D_{c_i}T} \leq \frac{\sup\limits_{\xi\in[a_{k+1-i},a_{k-1-i}]} D^2_\xi T}{\inf\limits_{\xi\in[a_{k+1-i},a_{k-1-i}]} D_\xi T} \tag{3.37}$$

logo,

$$\log\left(\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j}\right) \leq \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\sup\limits_{\xi\in[a_{k+1-i},a_{k-1-i}]} D^2_\xi T}{\inf\limits_{\xi\in[a_{k+1-i},a_{k-1-i}]} D_\xi T} \cdot |T^i(y_1) - T^i(y_2)| \tag{3.38}$$

$$= \sum_{i=1}^{j} \frac{\sup\limits_{\xi\in[a_{k+2-i},a_{k-i}]} D^2_\xi T}{\inf\limits_{\xi\in[a_{k+2-i},a_{k-i}]} D_\xi T} \cdot |T^{i-1}(y_1) - T^{i-1}(y_2)|. \tag{3.39}$$

Como T é expansora em $[a_k, a_{k-1}]$ e $j \leq k_1$ temos

$$\log\left(\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j}\right) \leq \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\sup\limits_{\xi\in[a_{k+2-i},a_{k-i}]} D^2_\xi T}{\inf\limits_{\xi\in[a_{k+2-i},a_{k-i}]} D_\xi T} \cdot |T^i(y_1) - T^i(y_2)| \tag{3.40}$$

$$\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j} \leq \operatorname{Exp}\left[\sum_{i=1}^{k_1} \frac{\sup\limits_{\xi\in[a_{k+2-i},a_{k-i}]} D^2_\xi T}{\inf\limits_{\xi\in[a_{k+2-i},a_{k-i}]} D_\xi T} \cdot |T^i(y_1) - T^i(y_2)|\right]. \tag{3.41}$$

Para $x \in [0, \frac{1}{2})$ temos $T(x) = x + 2^\alpha x^{\alpha+1}$, logo

I. $T'(x) = 1 + (\alpha+1)2^\alpha x^\alpha$ (crescente)

II. $T''(x) = (\alpha+1)\alpha 2^\alpha x^{\alpha-1}$ (decrescente)

Para cada $i \in \{1, 2, ..., k_1\}$,

$$\sup_{\xi\in[a_{k+2-i},a_{k-i}]} D^2_\xi T = (\alpha+1)\alpha 2^\alpha a^{\alpha-1}_{k+2-i}$$

e

$$\inf_{\xi\in[a_{k+2-i},a_{k-i}]} D_\xi T = D_{a_{k+2-i}}T$$

logo, usando essas expressões em 3.41 teremos

$$\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j} \leq \operatorname{Exp}\left[\sum_{i=1}^{k_1} (\alpha+1)\alpha 2^\alpha a^{\alpha-1}_{k+2-i} (D_{a_{k+2-i}}T)^{-1} |T^i(y_1) - T^i(y_2)|\right] \tag{3.42}$$

usando 1.2.15 na desigualdade acima e considerando $\lambda = \inf D_{a_{k+2-i}}T$, obtemos

$$\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j} \leq \operatorname{Exp}\left[\sum_{i=1}^{k_1}(\alpha+1)\alpha 2^{\alpha} a_{k+2-i}^{\alpha-1}(D_{a_{k+2-i}}T)^{-k_1+i}|T^{k_1}(y_1)-T^{k_1}(y_2)|\right] \quad (3.43)$$

$$\leq \operatorname{Exp}\left[\sum_{i=1}^{k_1}(\alpha+1)\alpha 2^{\alpha} a_{k+2-i}^{\alpha-1}((D_{a_{k+2-i}}T)^{k_1-i})^{-1}|T^{k_1}J_1|\right] \quad (3.44)$$

onde em 3.44 usamos o fato que $y_1, y_2 \in J_1 \Rightarrow (y_1, y_2) \subset J_1 \Rightarrow (T^i(y_1), T^i(y_2)) \subset T^i(J_1) \subset T^{k_1}J_1$, ou seja, $|T^i(y_1) - T^i(y_2)| \leq |T^{k_1}J_1|$, para cada $i \in \{1, 2, ..., k_1\}$. Seja $q = k - i + 2$ como $1 \leq i \leq k_1$ temos

$$\begin{array}{rcl} 1 \leq & i & \leq k_1 \quad .(-1) \\ -k_1 \leq & -i & \leq -1 \\ k-k_1 \leq & k-i & \leq k-1 \\ k-k_1+2 \leq & k-i+2 & \leq k+1 \\ k_0+2 \leq & q & \leq k_0+k_1+1 \end{array}$$

e $k_1 - i = q - (k_0 + 2)$. Assim, fazendo as substituições acima em 3.44, segue que

$$\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j} \leq \operatorname{Exp}\left[\sum_{q=k_0+2}^{k_0+k_1+1}(\alpha+1)\alpha 2^{\alpha} a_q^{\alpha-1}(D_{a_q}T^{q-(k_0+2)})^{-1}|T^{k_1}J_1|\right]. \quad (3.45)$$

Como o mapa é convexo, temos

$$T(x) - T(a) \geq D_aT(x-a), \qquad \textit{com } x > a. \quad (3.46)$$

Por outro lado,

$$D_{a_q}T^{q-(k_0+2)} = \prod_{j=0}^{q-(k_0+2)-1} D_{T^j(a_q)}T \quad (3.47)$$

$$= D_{a_q}T \cdot D_{a_{q-1}}T \cdot D_{a_{q-2}}T \cdot \ldots \cdot D_{a_{k_0+4}}T \cdot D_{a_{k_0+3}}T \quad (3.48)$$

Se $x < a$ em 3.46 teremos $\dfrac{T(x)-T(a)}{x-a} \leq D_aT$. Substituindo esse resultado em cada produto de 3.48, obtemos

$$
\begin{aligned}
D_{a_q}T^{q-(k_0+2)} &\geq \frac{T(x)-T(a_q)}{x-a_q}\cdot\frac{T(x)-T(a_{q-1})}{x-a_{q-1}}\cdot\ldots\cdot\frac{T(x)-T(a_{k0+3})}{x-a_{k_0+3}}\\
&= \frac{T(x)-a_{q-1}}{x-a_q}\cdot\frac{T(x)-a_{q-2}}{x-a_{q-1}}\cdot\ldots\cdot\frac{T(x)-a_{k0+2}}{x-a_{k_0+3}}\\
&= \frac{T(a_{q-1})-a_{q-1}}{a_{q-1}-a_q}\cdot\frac{T(a_{q-2})-a_{q-2}}{a_{q-2}-a_{q-1}}\cdot\ldots\cdot\frac{T(a_{k_0+2})-a_{k0+2}}{a_{k_0+2}-a_{k_0+3}}\\
&= \frac{a_{q-2}-a_{q-1}}{a_{q-1}-a_q}\cdot\frac{a_{q-3}-a_{q-2}}{a_{q-2}-a_{q-1}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{k_0+1}-a_{k0+2}}{a_{k_0+2}-a_{k_0+3}}\\
&= \frac{\cancel{a_{q-2}-a_{q-1}}}{a_{q-1}-a_q}\cdot\frac{\cancel{a_{q-3}-a_{q-2}}}{\cancel{a_{q-2}-a_{q-1}}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{k_0+1}-a_{k0+2}}{\cancel{a_{k_0+2}-a_{k_0+3}}}\\
&= \frac{a_{k_0+1}-a_{k0+2}}{a_{q-1}-a_q}\\
&\geq r\cdot\frac{a_{k_0+1}-a_{k0+2}}{a_{q-1}-a_q}\\
&= r\cdot\frac{T(a_{k_0+2})-a_{k_0+2}}{T(a_q)-a_q}\\
&= r\cdot\frac{a_{k_0+2}+2^\alpha a_{k_0+2}^{\alpha+1}-a_{k_0+2}}{a_q+2^\alpha a_q^{\alpha+1}-a_q}\\
&= r\cdot\frac{a_{k_0+2}^{\alpha+1}}{a_q^{\alpha+1}}\\
&= r\cdot(a_{k_0+2})^{\alpha+1}\cdot a_q^{-(1+\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade acima, em 3.45, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j} &\leq \operatorname{Exp}\left[\sum_{q=k_0+2}^{k_0+k_1+1}(\alpha+1)\alpha 2^\alpha a_q^{\alpha-1}(D_{a_q}T^{q-(k_0+2)})^{-1}|T^{k_1}J_1|\right] && (3.49)\\
&\leq \operatorname{Exp}\left[\sum_{q=k_0+2}^{k_0+k_1+1}(\alpha+1)\alpha 2^\alpha a_q^{\alpha-1}r^{-1}\cdot(a_{k_0+2}^{1+\alpha})^{-1}a_q^{1+\alpha}|T^{k_1}J_1|\right] && (3.50)\\
&= \operatorname{Exp}\left[\sum_{q=k_0+2}^{k_0+k_1+1}(\alpha+1)\alpha 2^\alpha a_q^{2\alpha}r^{-1}\cdot(a_{k_0+2}^{1+\alpha})^{-1}|T^{k_1}J_1|\right]. && (3.51)
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 3.1.2 em 3.50, obtemos

$$
\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j} \leq \operatorname{Exp}\left[\sum_{q=k_0+2}^{k_0+k_1+1}(\alpha+1)\alpha 2^{\frac{2}{\alpha}+2}q^{-2}r^{-1}\cdot(a_{k_0+2}^{1+\alpha})^{-1}|T^{k_1}J_1|\right]. \tag{3.52}
$$

Tomando $\tilde{c}_3=\alpha(\alpha+1)2^{\frac{2}{\alpha}+2}r^{-1}(a_{k_0+2}^{1+\alpha})^{-1}$, teremos

$$
\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j} \leq \operatorname{Exp}\left[\sum_{q=k_0+2}^{k_0+k_1+1}\tilde{c}_3 q^{-2}|T^{k_1}J_1|\right] \tag{3.53}
$$

considerando $c_3 = \tilde{c_3}. \sum_{q=k_0+2}^{k_0+k_1+1} q^{-2}$, vamos concluir que

$$\frac{D_{y_1}T^j}{D_{y_2}T^j} \leq \operatorname{Exp}\left[c_3|T^{k_1}J_1|\right] \tag{3.54}$$

e o regime 2) está mostrado.

3) Finalmente, vejamos o que acontece se $K = T^j J$ contém mais de um a_k para $k > k_0$. Se mais de um terço do tamanho de K está em $[a_1, 1]$, então consideramos $K \cap [a_1, 1]$ e o caso 1) é válido para sempre, perdendo apenas o fator $\frac{1}{3}$. Caso contrário, cortamos K em pedaços $\Delta_{k_-}, \cdots, \Delta_{k_+}$ de modo que a união deles seja de tamanho maior que $\frac{|K|}{3}$. Para estes Δ_k, o cálculo anterior produz

$$P^{k-k_0}\chi_{\Delta_k} \geq X_{\Delta_{k_0}} \frac{\operatorname{Exp}[-c_3|\Delta_{k_0}|]}{|\Delta_{k_0}|}|\Delta_k|. \tag{3.55}$$

Portanto, com $l = n_0 + k_+ - k_0$

$$\begin{aligned}
P^l\chi_K &\geq \sum_{k=k_-}^{k_+} P^{l+k_0-k}P^{k-k_0}\chi_{\Delta_k} \\
&\geq \sum_{k=k_-}^{k_+} c_0\frac{\operatorname{Exp}[-c_3\delta_0]}{\delta_0}|\Delta_k| \\
&\geq c_0\frac{\operatorname{Exp}[-c_3\delta_0]}{\delta_0}\frac{|K|}{3}.
\end{aligned}$$

Uma vez que controlamos o que acontece em cada região, é possível estimar a distorção total após $m = n_1 + k_1 + \cdots + n_p + l$ iterações, onde $l = n_0$ se o caso 3) nunca acontecer $(l = n_0 + k_+ - k_0)$ se o caso 3) ocorrer.

$$\begin{aligned}
P^m\chi_J &\geq P^lP^{n_p}P^{k_{p-1}}\cdots P^{n_2}P^{k_1}P^{n_1}\chi_J \\
&\geq |J|\frac{c_0}{3\delta_0}\operatorname{Exp}[-c_3\delta_0 - c_2|T^{n_p+\cdots+k_1+n_1}J| - \cdots - c_3|T^{k_1+n_1}J| - c_2|T^{n_1}J|] \\
&\geq |J|\frac{c_0}{3\delta_0}\operatorname{Exp}[-(c_2+c_3)\delta_0(1 + r^{n_p} + r^{n_p+n_{p-1}} + \cdots + r^{n_p+n_{p-1}+\cdots+n_2})] \\
&\geq |J|\frac{c_0}{3\delta}\operatorname{Exp}\left[-\frac{(c_2+c_3)\delta_0 r}{1-r}\right] := \gamma|J|.
\end{aligned}$$

Para concluir, precisamos corrigir n_ε. Escolhemos o supremo sobre todos os valores possíveis de $m = n_1 + k_1 + \cdots + n_p + l$, associados a intervalos J de tamanho 2ε. É imediato ver que o pior cenário é quando o caso 3) acontece no inicio e $J = \left(-\frac{2\varepsilon}{3}, \frac{4\varepsilon}{3}\right)$. Neste caso, m é tal que $a_{k_0+m} \leq \frac{2\varepsilon}{3}$. Claramente, $n_\varepsilon = \left[2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}\right] + 1$ é grande o suficiente e o lema está provado. □

Capítulo 4

Decaimento de Correlações

Neste Capítulo, apresentaremos a demonstração do nosso resultado principal, onde iremos provar que o Mapa de Manneville-Pomeau T possui decaimento polinomial das funções correlações.

4.1 Convergência Exponencial em L^1

A proposição 3.1.3 permite concluir imediatamente que $\mathbb{P}_\varepsilon$ tem uma densidade invariante para qual converge exponencialmente rápido em L^1. De fato , vamos relembrar brevemente o seguinte argumento: Defina $\Omega = [0,1]$ e considere $f \in L^1(\Omega)$ com $\int_\Omega f dm = 0$. Relembre que $\mathbb{P}_\varepsilon 1 = 1$, uma vez que

$$\mathbb{P}_\varepsilon f(x) = \int_0^1 K_\varepsilon(x,z) f(z) dz \tag{4.1}$$

e como $K_\varepsilon(x,z) = \dfrac{1}{2\varepsilon} P^{n_\varepsilon} \chi_{B_\varepsilon(z)}(x)$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\varepsilon 1 &= \int_0^1 K_\varepsilon(x,z) dz \\
&= \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 P^{n_\varepsilon} \chi_{B_\varepsilon(z)}(x) dz \\
&= \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^1 \chi_{B_\varepsilon(z)}(x) dz \\
&= \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon} \\
&= 1
\end{aligned}$$

e assim temos $\mathbb{P}_\varepsilon 1 = 1$. Também definimos $\Omega_\varepsilon^+ = \{x \in \Omega | \ \mathbb{P}_\varepsilon f \geq 0\}$ e $\Omega^+ = \{x \in \Omega | f \geq 0\}$, então

$$
\begin{aligned}
||\mathbb{P}_\varepsilon f||_1 &= \int_\Omega |\mathbb{P}_\varepsilon f(x)| dx \\
&= \int_\Omega [\mathbb{P}_\varepsilon f(x)]^+ dx + \int_\Omega [\mathbb{P}_\varepsilon f(x)]^- dx \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon^+} [\mathbb{P}_\varepsilon f(x)]^+ dx + \int_{\Omega/\Omega_\varepsilon^+} [\mathbb{P}_\varepsilon f(x)]^+ dx + \int_{\Omega_\varepsilon^+} [\mathbb{P}_\varepsilon f(x)]^- dx + \int_{\Omega/\Omega_\varepsilon^+} [\mathbb{P}_\varepsilon f(x)]^- dx \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon^+} \mathbb{P}_\varepsilon f(x) dx - \int_{\Omega/\Omega_\varepsilon^+} \mathbb{P}_\varepsilon f(x) dx \\
&= 2\int_{\Omega_\varepsilon^+} \mathbb{P}_\varepsilon f(x) dx \\
&= 2\int_{\Omega_\varepsilon^+} \int_\Omega K_\varepsilon(x,y) f(y) dy dx \\
&= 2\int_\Omega f(y) \int_{\Omega_\varepsilon^+} K_\varepsilon(x,y) dx dy \\
&= 2\int_\Omega f(y) \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon^+} [K_\varepsilon(x,y) - \gamma] dx + \int_{\Omega_\varepsilon^+} \gamma dx \right\} dy \\
&= 2\int_\Omega f(y) \int_{\Omega_\varepsilon^+} [K_\varepsilon(x,y) - \gamma] dx dy + 2\int_\Omega f(y) \int_{\Omega_\varepsilon^+} \gamma dx dy \\
&= 2\int_\Omega f(y) \int_{\Omega_\varepsilon^+} [K_\varepsilon(x,y) - \gamma] dx dy + 2\gamma m_x(\Omega_\varepsilon^+) \int_\Omega f(y) dy \\
&= 2\int_\Omega f(y) \int_{\Omega_\varepsilon^+} [K_\varepsilon(x,y) - \gamma] dx dy \\
&\leq 2\int_{\Omega_+} f(y) \int_\Omega [K_\varepsilon(x,y) - \gamma] dx dy \\
&= 2\int_{\Omega_+} f(y) \left\{ \int_\Omega K_\varepsilon(x,y) dx - \int_\Omega \gamma dx \right\} dy \\
&= 2\int_{\Omega_+} f(y) [1 - \gamma m_x(\Omega)] dy \\
&= 2\int_{\Omega_+} f(y)(1-\gamma) dy.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
||\mathbb{P}_\varepsilon f||_1 &\leq (1-\gamma)\cdot 2\int_{\Omega_+} f(y) dy \\
&= (1-\gamma)\left[\int_{\Omega_+} f(y) dy + \int_{\Omega_+} f(y) dy \right] \\
&= (1-\gamma)\left\{ \int_\Omega [f(y)]^+ dy + \int_\Omega [f(y)]^+ dy \right\} \\
&= (1-\gamma)\left\{ \int_\Omega [f(y)]^+ dy + \int_\Omega [f(y)]^- dy \right\} \\
&= (1-\gamma)||f||_1.
\end{aligned}
$$

Desse modo, concluímos

$$
||\mathbb{P}_\varepsilon f||_1 \leq (1-\gamma)||f||_1. \tag{4.2}
$$

Agora, para cada $f \in L^1(\Omega)$ e definindo $\prod f = \int_\Omega f dm$, vale que

$$||(\mathbb{P}_\varepsilon - \prod)^n f||_1 = ||\mathbb{P}_\varepsilon^n(\mathbb{1} - \prod)f||_1 \leq (1-\gamma)^n ||f||_1 \tag{4.3}$$

Por indução em n vamos mostrar que a primeira igualdade é verdadeira.

- Para $n = 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\varepsilon(f - \prod f) &= \mathbb{P}_\varepsilon f - \mathbb{P}_\varepsilon \prod f \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon f - \prod f \cdot \mathbb{P}_\varepsilon 1 \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon f - \prod f \cdot 1 \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon f - \prod f \\
&= (\mathbb{P}_\varepsilon - \prod) f
\end{aligned}$$

logo, $\mathbb{P}_\varepsilon(f - \prod f) = \mathbb{P}_\varepsilon(\mathbb{1} - \prod)f$.

- Para $n = 2$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P}_\varepsilon - \prod)^2 f &= (\mathbb{P}_\varepsilon^2 - \mathbb{P}_\varepsilon \prod - \prod \mathbb{P}_\varepsilon + \prod^2) f \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon^2 f - \mathbb{P}_\varepsilon \prod f - \prod \mathbb{P}_\varepsilon f + \prod^2 f \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon^2 f - \prod f \cdot \mathbb{P}_\varepsilon 1 - \prod \mathbb{P}_\varepsilon f + \prod f \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon^2 f - \prod f - \prod \mathbb{P}_\varepsilon f + \prod f \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon^2 f - \prod \mathbb{P}_\varepsilon f.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\mathbb{P}_\varepsilon^2(\mathbb{1} - \prod)f = \mathbb{P}_\varepsilon^2 f - \mathbb{P}_\varepsilon^2 \prod f = \mathbb{P}_\varepsilon^2 f - \prod f$. Logo, conseguiremos o caso $n = 2$ se

$$\prod \mathbb{P}_\varepsilon f = \prod f.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\prod \mathbb{P}_\varepsilon f(x) &= \int_\Omega \mathbb{P}_\varepsilon f(x)dx \\
&= \int_\Omega P^{n_\varepsilon}\mathbb{A}f(x)dx \\
&= \int_\Omega \mathbb{A}f(x)dx \\
&= \int_\Omega \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dydx \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega\int_\Omega \chi_{B_\varepsilon(x)}(y)f(y)dydx \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega f(y)\int_\Omega \chi_{B_\varepsilon(x)}(y)dxdy \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega f(y)\int_\Omega \chi_{B_\varepsilon(y)}(x)dxdy \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega f(y)\cdot 2\varepsilon dy \\
&= \int_\Omega f(y)dy \\
&= \prod f.
\end{aligned}$$

Portanto, teremos $(\mathbb{P}_\varepsilon - \prod)^2 f = \mathbb{P}_\varepsilon^2 f - \prod \mathbb{P}_\varepsilon f = \mathbb{P}_\varepsilon^2 f - \prod f = \mathbb{P}_\varepsilon^2(\mathbb{1} - \prod)f$,e o caso $n = 2$ está provado.

- Suponha agora que o resultado seja válido para $n = k$, ou seja

$$(\mathbb{P}_\varepsilon - \prod)^k f = \mathbb{P}_\varepsilon^k(\mathbb{1} - \prod)f$$

Vamos usar o seguinte lema para concluir o nosso raciocínio.

Lema 4.1.1. *Os operadores $\mathbb{P}_\varepsilon$ e $\mathbb{1} - \prod$ são comutativos. Além disso, $\mathbb{1} - \prod$ é uma projeção, ou seja, $(\mathbb{1} - \prod)^2 = \mathbb{1} - \prod$.*

Demonstração. Observe que para cada $f \in L^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\varepsilon(\mathbb{1} - \prod)f &= \mathbb{P}_\varepsilon f - \prod f \\
&= \mathbb{1}\cdot\mathbb{P}_\varepsilon f - \prod \mathbb{P}_\varepsilon f \\
&= (\mathbb{1} - \prod)\mathbb{P}_\varepsilon f
\end{aligned}$$

o que comprova a comutatividade dos dois aperadores. Para a última afirmação, observe que

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1} - \prod)^2 &= (\mathbb{1} - \prod)(\mathbb{1} - \prod) \\
&= \mathbb{1}^2 - \mathbb{1}\prod - \prod \mathbb{1} + \prod^2 \\
&= \mathbb{1} - 2\prod + \prod \\
&= \mathbb{1} - \prod.
\end{aligned}$$

□

Assim, para $n = k+1$, temos

$$\begin{aligned}
(\mathbb{P}_\varepsilon - \prod)^{k+1} f &= (\mathbb{P}_\varepsilon - \prod)^k (\mathbb{P}_\varepsilon - \prod) f \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon^k (\mathbb{1} - \prod)(\mathbb{P}_\varepsilon - \prod) f \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon^k (\mathbb{1} - \prod)\mathbb{P}_\varepsilon (\mathbb{1} - \prod) f \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon^k (\mathbb{1} - \prod)^k \mathbb{P}_\varepsilon (\mathbb{1} - \prod) f \\
&= [\mathbb{P}_\varepsilon (\mathbb{1} - \prod)]^k \mathbb{P}_\varepsilon (\mathbb{1} - \prod) f \\
&= [\mathbb{P}_\varepsilon (\mathbb{1} - \prod)]^{k+1} f \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon^{k+1} (\mathbb{1} - \prod)^{k+1} f \\
&= \mathbb{P}_\varepsilon^{k+1} (\mathbb{1} - \prod) f.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo principio de indução finita temos que

$$||(\mathbb{P}_\varepsilon - \prod)^n f||_1 = ||\mathbb{P}_\varepsilon^n (\mathbb{1} - \prod) f||_1.$$

Agora observe que $\int_\Omega (\mathbb{1} - \prod) f dm = \int_\Omega f dm - \int_\Omega \prod f dm = \int_\Omega f dm - \int_\Omega f dm = 0$. Logo a função $(\mathbb{1} - \prod) f \in L^1(\Omega)$ com $\int_\Omega (\mathbb{1} - \prod) f dm = 0$. Além disso, podemos observar que

$$\int_\Omega \mathbb{P}_\varepsilon (\mathbb{1} - \prod) f dm = \int_\Omega (\mathbb{1} - \prod) f dm = 0 \tag{4.4}$$

e indutivamente a igualdade vale para qualquer iterado de $\mathbb{P}_\varepsilon$. Desse modo, podemos usar o resultado

$$||\mathbb{P}_\varepsilon f||_1 \leq (1-\gamma)||f||_1.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
||\mathbb{P}_\varepsilon^n (\mathbb{1} - \prod) f||_1 &= ||\mathbb{P}_\varepsilon \mathbb{P}_\varepsilon^{n-1} (\mathbb{1} - \prod) f||_1 \\
&\leq (1-\gamma)||\mathbb{P}_\varepsilon^{n-1} (\mathbb{1} - \prod) f||_1 \\
&\leq (1-\gamma)^2||\mathbb{P}_\varepsilon^{n-2} (\mathbb{1} - \prod) f||_1 \\
&\vdots \\
&\leq (1-\gamma)^n||(\mathbb{1} - \prod) f||_1.
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que para qualquer $f \in L^1(\Omega)$ vale

$$||f - \prod f||_1 \leq ||f||_1. \tag{4.5}$$

Observe, primeiramente, os seguintes casos

Caso 1) $: 0 \leq f - \prod f$

$$\begin{aligned} f - \prod f &= f^+ - f^- - \left(\int_\Omega f^+ dm - \int_\Omega f^- dm\right) \\ &= f^+ - f^- - \int_\Omega f^+ dm + \int_\Omega f^- dm \\ &\leq f^+ + \int_\Omega f^- dm. \end{aligned}$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} \left|f - \prod f\right| &\leq \left|f^+ + \int_\Omega f^- dm\right| \\ &= f^+ + \int_\Omega f^- dm \end{aligned}$$

integrando ambos os membros da desigualdade acima com relação a Ω na medida de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|f - \prod f\right| dm &\leq \int_\Omega f^+ dm + \int_\Omega f^- dm \\ &= \int_\Omega (f^+ + f^-) dm \\ &= \int_\Omega |f| dm \\ &= ||f||_1 \end{aligned}$$

ou seja, $||f - \prod f||_1 \leq ||f||_1$.

Caso 2) $: 0 \geq f - \prod f$

Daí temos $\prod f - f \geq 0$, então

$$\begin{aligned} \prod f - f &= \int_\Omega f^+ dm - \int_\Omega f^- dm - (f^+ - f^-) \\ &= \int_\Omega f^+ dm - \int_\Omega f^- dm - f^+ + f^- \\ &\leq \int_\Omega f^+ dm + f^- \end{aligned}$$

novamente,

$$\left|\prod f - f\right| \leq \int_\Omega f^+ dm + f^-$$

e uma integração em relação a Ω na medida de Lebesgue nos dá que

$$||f - \prod f||_1 \leq ||f||_1$$

o que concluí o resultado. Agora conseguimos mostrar que

$$||\mathbb{P}_\varepsilon^n(\mathbb{1} - \prod)f||_1 \leq (1-\gamma)^n||(\mathbb{1} - \prod)f||_1 \leq (1-\gamma)^n||f||_1$$

Portanto, vale

$$||(\mathbb{P}_\varepsilon - \prod)^n f||_1 = ||\mathbb{P}_\varepsilon^n(\mathbb{1} - \prod)f||_1 \leq (1-\gamma)^n||f||_1$$

4.2 Decaimento de Correlações para o Mapa de Manneville-Pomeau

Proposição 4.2.1. *Para $k \in \mathbb{N}$ e $\gamma > 0$ temos que*

$$||\mathbb{P}_\varepsilon^k P_T^m f||_1 \leq \text{Exp}[-\gamma k]||f||_1$$

Demonstração. Sabemos que se $\int_\Omega f dm = 0$, então $||\mathbb{P}_\varepsilon f||_1 \leq (1-\gamma)||f||_1$, pela relação de dualidade temos que

$$\int_\Omega \psi . P_T f dm = \int_\Omega (\psi \circ T). f dm \tag{4.6}$$

onde $\psi \in L_\infty$ e $f \in L_1$. Em particular, para $\psi \equiv 1$ e $f \in L_1$ temos

$$\int_\Omega P_T f dm = \int_\Omega 1.P_T f dm = \int_\Omega (1 \circ T). f dm = \int_\Omega f dm.$$

Logo, devemos ter $\int_\Omega P_T^m f dm = 0$. Assim,

$$||\mathbb{P}_\varepsilon^k P_T^m f||_1 \leq (1-\gamma)^k ||P_T^m f||_1$$

como $||P_T|| \leq 1$ temos

$$||\mathbb{P}_\varepsilon^k P_T^m f||_1 \leq (1-\gamma)^k ||f||_1.$$

Afirmamos que: $1 - \gamma \leq \text{Exp}[-\gamma]$. Com efeito, considere $f : [0, \gamma] \to \mathbb{R}$ definida por $f(\xi) = e^{-\xi}$. Observe que $f'(\xi) = -e^{-\xi}$, pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in (0, \gamma)$ tal que

$$\begin{aligned} f(\gamma) - f(0) &= f'(c)(\gamma - 0) && (4.7)\\ e^{-\gamma} - 1 &= -e^{-c}\gamma && (4.8)\\ &= (-\gamma)e^{-c} && (4.9) \end{aligned}$$

como $e^{-c} \leq 1$ temos $(-\gamma)e^{-c} \geq -\gamma$. Usando em 4.9 , obtemos $e^{-\gamma} - 1 \geq -\gamma$. Logo, $e^{-k\gamma} \geq (1-\gamma)^k$. Assim,

$$\begin{aligned} ||\mathbb{P}_\varepsilon^k P_T^m f||_1 &\leq (1-\gamma)^k ||f||_1 \\ &\leq e^{-\gamma k}||f||_1 \end{aligned}$$

o que prova a proposição. □

Proposição 4.2.2. *Considere o operador perturbado $\mathbb{P}_\varepsilon$ temos que*

$$||\mathbb{P}_\varepsilon||_1 \leq 1. \tag{4.10}$$

Demonstração. Primeiramente, observe que para cada $f \in C_*$ temos

$$\begin{aligned} ||\mathbb{P}_\varepsilon f||_1 &= ||P^{n_\varepsilon}\mathbb{A}f||_1 \\ &\leq ||P^{n_\varepsilon}||_1||\mathbb{A}f||_1 \\ &\leq ||P||_1^{n_\varepsilon}||\mathbb{A}f||_1 \\ &\leq ||\mathbb{A}f||_1 \end{aligned}$$

assim, precisamos mostrar que o Operador Média 3.1 é uma contração, ou seja, $||\mathbb{A}||_1 \leq 1$. De fato, por definição, temos

$$\begin{aligned} ||\mathbb{A}f||_1 &= \int_0^1 |\mathbb{A}_\varepsilon f(x)|dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2\varepsilon}\left|\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dy\right| dx \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)dydx \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1\int_0^1 f(y)\chi_{B_\varepsilon(x)}(y)dydx \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1\int_0^1 f(y)\chi_{B_\varepsilon(y)}(x)dydx \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1\int_0^1 f(y)\chi_{B_\varepsilon(y)}(x)dxdy \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 f(y)\int_0^1 \chi_{B_\varepsilon(y)}(x)dxdy \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^1 f(y)\cdot 2\varepsilon dy \\ &= \int_0^1 f(y)dy \\ &= ||f||_1 \end{aligned}$$

onde na sexta expressão, acima, usamos o Teorema de Fubini 1.1.23. Portanto, devemos ter $||\mathbb{P}_\varepsilon f||_1 \leq ||f||_1$. $\square$

A seguir, chamaremos μ a medida invariante $d\mu = hdm$. Usando todos os fatos acima, podemos comprovar nosso principal resultado.

Teorema 4.2.3. *Para toda $g \in L^\infty$, $f \in C^{(1)}([0,1])$ tal que $\int_0^1 f d\mu = 0$. O seguinte é válido*
$$\left|\int_0^1 g \circ T^n f d\mu\right| \leq c_4 C(||f||_{C^{(1)}})||g||_\infty n^{-\frac{1}{\alpha}+1}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}}.$$
onde $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim.

Demonstração. Seja $f \in C_* + \mathbb{R}$, $\int_0^1 f d\mu = 0$ e $g \in L^\infty$, $||g||_\infty = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, vamos escrever pelo algoritmo da divisão euclidiana

$$n = kn_\epsilon + m$$

$k \in \mathbb{N}$ e $m < n_\epsilon$. Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 gP^n f dm\right| &\leq \int_0^1 |gP^n f| dm &(4.11)\\
&= ||gP^n f||_1 &(4.12)\\
&\leq ||g||_\infty |||P^n f||_1 &(4.13)\\
&= ||P^n f||_1 &(4.14)\\
&= ||P^n f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f + \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1 &(4.15)\\
&\leq ||P^n f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1 + ||\mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1. &(4.16)
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 4.2.1 no segundo termo da desigualdade 4.16, obtemos

$$\left|\int_0^1 gP^n f dm\right| \leq ||P^n f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1 + \operatorname{Exp}[-\gamma k]||f||_1 \tag{4.17}$$

para o primeiro termo em 4.16 temos

$$\begin{aligned}
||P^n f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1 &= ||P^{kn_\varepsilon+m} f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1\\
&= ||P^{kn_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1\\
&= ||P^{kn_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f + \mathbb{P}_\varepsilon P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1\\
&\leq ||P^{kn_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f||_1 + ||\mathbb{P}_\varepsilon P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1
\end{aligned}$$

tomando o segundo termo do lado direito acima, temos

$$\begin{aligned}
||\mathbb{P}_\varepsilon P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1 &= ||\mathbb{P}_\varepsilon (P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon^{k-1} P^m f)||_1\\
&\leq ||\mathbb{P}_\varepsilon||_1 ||P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon^{k-1} P^m f||_1\\
&\leq ||P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon^{k-1} P^m f||_1
\end{aligned}$$

onde sabemos que $||\mathbb{P}_\varepsilon||_1 \leq 1$ por 4.2.2. Daí,

$$||P^n f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1 \leq ||P^{kn_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f||_1 + ||P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon^{k-1} P^m f||_1$$

Fazendo o mesmo processo mais uma vez, teremos

$$||P^n f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1 \leq \sum_{i=k-2}^{k-1} ||P^{(i+1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon P^{in_\varepsilon} P^m f||_1 + ||P^{(k-2)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon^{k-2} P^m f||_1$$

consequentemente,

$$||P^n f - \mathbb{P}_\varepsilon^k P^m f||_1 \leq \sum_{i=0}^{k-1} ||P^{(i+1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon P^{in_\varepsilon} P^m f||_1 \tag{4.18}$$

completando assim a equação 4.17 com a expressão

$$\left|\int_0^1 g P^n f dm\right| \leq \sum_{i=0}^{k-1} ||P^{(i+1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon P^{in_\varepsilon} P^m f||_1 + \mathrm{Exp}[-\gamma k]||f||_1. \tag{4.19}$$

Observamos agora que, pelo Lema 3.1.1

- Para i = 0

$$\begin{aligned} ||P^{n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon P^m f||_1 &\leq c_1 ||P^m f||_1 \varepsilon^{1-\alpha} \\ &\leq c_1 |||f||_1 \varepsilon^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

- Para i = 1

$$\begin{aligned} ||P^{2n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon P^{n_\varepsilon} P^m f||_1 &= ||P^{n_\varepsilon} P^{n_\varepsilon + m} f - \mathbb{P}_\varepsilon P^{n_\varepsilon + m} f||_1 \\ &\leq c_1 ||P^{n_\varepsilon + m} f||_1 \varepsilon^{1-\alpha} \\ &\leq c_1 ||f||_1 \varepsilon^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

$\vdots$

- Para i = k - 1

$$\begin{aligned} ||P^{kn_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f||_1 &= ||P^{n_\varepsilon} P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f - \mathbb{P}_\varepsilon P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f||_1 \\ &\leq c_1 ||P^{(k-1)n_\varepsilon} P^m f||_1 \varepsilon^{1-\alpha} \\ &\leq c_1 ||f||_1 \varepsilon^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Logo, aplicando as observações acima no somatório em 4.19, obtemos

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 g P^n f dm\right| &\leq c_1 ||f||_1 k \varepsilon^{1-\alpha} + \mathrm{Exp}[-k\gamma]||f||_1 \qquad (4.20) \\ &\leq 2c_1 ||f||_1 k \varepsilon^{1-\alpha} + \mathrm{Exp}[-k\gamma]||f||_1 \qquad (4.21) \end{aligned}$$

como $n = kn_\varepsilon + m$ temos $k = \dfrac{n}{n_\varepsilon} - \dfrac{m}{n_\varepsilon} \leq \dfrac{n}{n_\varepsilon}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 gP^n f dm\right| &\leq 2c_1||f||_1 k\varepsilon^{1-\alpha} + \mathrm{Exp}[-k\gamma]||f||_1 \\
&\leq 2c_1||f||_1 \frac{n}{n_\varepsilon}\varepsilon^{1-\alpha} + \mathrm{Exp}\left[\left(\frac{m}{n_\varepsilon} - \frac{n}{n_\varepsilon}\right)\gamma\right]||f||_1 \\
&= 2c_1||f||_1 \frac{n}{n_\varepsilon}\varepsilon^{1-\alpha} + \mathrm{Exp}\left[\frac{m}{n_\varepsilon}\gamma\right].\mathrm{Exp}\left[-\frac{n}{n_\varepsilon}\gamma\right]||f||_1 \\
&\leq 2c_1||f||_1 \frac{n}{n_\varepsilon}\varepsilon^{1-\alpha} + \mathrm{Exp}[\gamma].\mathrm{Exp}\left[-\gamma\frac{n}{n_\varepsilon}\right]||f||_1.
\end{aligned}$$

Como $n_\varepsilon = \left[2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}\right] + 1$ e $x - 1 \leq [x] \leq x$. Tomando $x = 2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}$ temos

$$\begin{aligned}
\left[2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}\right] + 1 &\leq 2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha} + 1 \\
&\leq 2.2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
n_\varepsilon &\leq 2.2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha} \Rightarrow \\
\frac{1}{n_\varepsilon} &\geq (2.2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1}.\varepsilon^{\alpha} \Rightarrow \\
-\gamma\frac{n}{n_\varepsilon} &\leq -\gamma(2.2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1}\varepsilon^{\alpha} n.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{Exp}[\gamma]\,\mathrm{Exp}\left[-\gamma\frac{n}{n_\varepsilon}\right] \leq \mathrm{Exp}[\gamma]\,\mathrm{Exp}\left[-\gamma(2.2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1}\varepsilon^{\alpha} n\right].$$

Daí, tomando $\varepsilon = n^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\log n^{(1-\gamma)^{-1}(\frac{1}{\alpha}-1)2^{2+\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ teremos

$$\varepsilon^{\alpha} = n^{-1}\log n^{(1-\gamma)^{-1}(\frac{1}{\alpha}-1)2^{2+\frac{1}{\alpha}}} \tag{4.22}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Exp}[\gamma]\,\mathrm{Exp}\left[-\gamma\frac{n}{n_\varepsilon}\right] &\leq \mathrm{Exp}[\gamma]\,\mathrm{Exp}\left[-\gamma(2.2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1}\varepsilon^{\alpha} n\right] \\
&= \mathrm{Exp}[\gamma]\,\mathrm{Exp}\left[-\gamma(2.2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1}n^{-1}\log n^{(1-\gamma)^{-1}(\frac{1}{\alpha}-1)2^{2+\frac{1}{\alpha}}} n\right] \\
&= \mathrm{Exp}[\gamma]\,\mathrm{Exp}\left[\log n^{-2^{-1}\gamma(1-\gamma)^{-1}(\frac{1}{\alpha}-1)}\right] \\
&= \mathrm{Exp}[\gamma] n^{-2^{-1}\gamma(1-\gamma)^{-1}(\frac{1}{\alpha}-1)} \\
&= \mathrm{Exp}[\gamma] n^{2^{-1}\gamma(1-\gamma)^{-1}(1-\frac{1}{\alpha})}.
\end{aligned}$$

Agora, considerando $2\gamma < 1 \Rightarrow \gamma < 1 - \gamma \Rightarrow \dfrac{\gamma}{1-\gamma} < 1 \Rightarrow \dfrac{2^{-1}\gamma}{1-\gamma} < 1$. Assim, tomando

$c_2 = \mathrm{Exp}[\gamma]$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp}[\gamma]\,\mathrm{Exp}\left[-\gamma\frac{n}{n_\varepsilon}\right] &\leq c_2 n^{1-\frac{1}{\alpha}} && (4.23)\\ &\leq c_2 n^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}}. && (4.24) \end{aligned}$$

Novamente, como $n_\varepsilon = \left[2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}\right] + 1$ e $x - 1 \leq [x] \leq x$. Tomando $x = 2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}$, obtemos

$$\begin{aligned} 2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha} - 1 &\leq \left[2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}\right] \Rightarrow\\ 2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha} &\leq \left[2^{2+\frac{1}{\alpha}}\varepsilon^{-\alpha}\right] + 1 \Rightarrow\\ (2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1}\varepsilon^{\alpha} &\geq \frac{1}{n_\varepsilon} \Rightarrow\\ (2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1}\varepsilon^{\alpha} n &\geq \frac{n}{n_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{n}{n_\varepsilon}\varepsilon^{1-\alpha} &\leq (2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1}\varepsilon^{\alpha} n \varepsilon^{1-\alpha}\\ &= (2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1} n\varepsilon \end{aligned}$$

considerando $\varepsilon = n^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\log n^{(1-\gamma)^{-1}(\frac{1}{\alpha}-1)2^{2+\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{n}{n_\varepsilon}\varepsilon^{1-\alpha} &\leq (2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1} n\varepsilon && (4.25)\\ &= (2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1} n . n^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\log n^{(1-\gamma)^{-1}(\frac{1}{\alpha}-1)2^{2+\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} && (4.26)\\ &= (2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{-1}(1-\gamma)^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^{\frac{1}{\alpha}}(2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{\frac{1}{\alpha}} n^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}} && (4.27)\\ &= c_3 n^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}} && (4.28) \end{aligned}$$

onde $c_3 = (2^{2+\frac{1}{\alpha}})^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-\gamma)^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Finalmente, pelas desigualdades 4.24 e 4.28, encontradas anteriormente, vamos obter

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 gP^n f dm\right| &\leq 2c_1\|f\|_1\frac{n}{n_\varepsilon}\varepsilon^{1-\alpha} + \mathrm{Exp}[\gamma].\,\mathrm{Exp}\left[-\gamma\frac{n}{n_\varepsilon}\right]\|f\|_1 && (4.29)\\ &\leq 2c_1\|f\|_1 c_3 n^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}} + c_2 n^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}}\|f\|_1 && (4.30)\\ &\leq c_4\|f\|_1 n^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}} && (4.31) \end{aligned}$$

onde $c_4 = 2c_1c_3 + c_2$.
Isso ainda não é o decaimento de correlação com respeito a medida invariante absoulutamente contínua $d\mu = hdx$ do nosso sistema dinâmico. Para obter tal resultado, precisamos

notar que $f \in C^{(1)}$, então podemos escolher $\lambda, \nu, \delta \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_{\lambda,\nu,\delta}(x) = (f(x) + \lambda x + \nu)h(x) + \delta \in C_*$$

e

$$(\lambda x + \nu)h(x) + \delta \in C_*$$

a dependência dos parâmetros em relação à norma $C^{(1)}$ de f ser afim. De fato, para $f_{\lambda,\nu,\delta}$ ser decrescente e $f_{\lambda,\nu,\delta} \geq 0$ (Ver 2.1) devemos ter:

1) Como $f \in C^{(1)}$, $f(x) + \lambda x + \nu$ é decrescente para $[f(x) + \lambda x + \nu]' < 0 \Rightarrow f'(x) + \lambda < 0 \Rightarrow \lambda < -f'(x) \Rightarrow \lambda < \sup\limits_{x \in (0,1]} \{-f'(x)\} \Rightarrow \lambda < -\inf\limits_{x \in (0,1]} f'(x)$. Precisamos ter também $f(x) + \lambda x + \nu \geq 0$, $\forall\, x \in (0,1]$ para concluirmos nosso raciocínio, ou seja,

$$\begin{aligned} f(x) + \lambda x + \nu &\geq 0 \\ \nu &\geq -f(x) - \lambda x \\ &\geq \inf_{x \in (0,1]} \{-f(x) - \lambda x\} \\ &= -\sup_{x \in (0,1]} \{f(x) + \lambda x\}. \end{aligned}$$

Desse modo, para $x > y$ temos

$$f(y) + \lambda y + \nu > f(x) + \lambda x + \nu \tag{4.32}$$

e como $h \in C_0$, então

$$h(y) > h(x), \tag{4.33}$$

multiplicando as expressões 4.32 e 4.33 temos

$$\begin{aligned} h(y)(f(y) + \lambda y + \nu) &> h(x)(f(x) + \lambda x + \nu) \\ h(y)(f(y) + \lambda y + \nu) + \delta &> h(x)(f(x) + \lambda x + \nu) + \delta \\ f_{\lambda,\nu,\delta}(y) &> f_{\lambda,\nu,\delta}(x) \end{aligned}$$

ou seja, $f_{\lambda,\nu,\delta}$ é decrescente.
Para $f_{\lambda,\nu,\delta} \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned} \delta &\geq \inf_{x \in (0,1]} \{-(f(x) + \lambda x + \nu)h(x)\} \\ &= -\sup_{x \in (0,1]} \{(f(x) + \lambda x + \nu)h(x)\}. \end{aligned}$$

Portanto, $f_{\lambda,\nu,\delta} \in C_0$.

2) Para termos $f_{\lambda,\nu,\delta} \in C_1$ (Ver 2.2.3) basta que $X^{\alpha+1} f_{\lambda,\nu,\delta}$ seja crescente. Com efeito,

se $x < y$

$$\begin{aligned} X^{\alpha+1} f_{\lambda,\nu,\delta}(x) &= x^{\alpha+1}(f(x) + \lambda x + \nu) h(x) + \delta x^{\alpha+1} \\ &\leq y^{\alpha+1} h(y)(f(x) + \lambda x + \nu) + \delta y^{\alpha+1} \end{aligned}$$

como no item 1) temos $\delta \geq -\sup_{x\in(0,1]} \{(f(x) + \lambda x + \nu)h(x)\}$ basta tomar δ suficientemente grande tal que

$$\begin{aligned} x^{\alpha+1} f_{\lambda,\nu,\delta}(x) &\leq y^{\alpha+1} h(y)(f(y) + \lambda y + \nu) + \delta y^{\alpha+1} \\ &= y^{\alpha+1}[h(y)(f(y) + \lambda y + \nu) + \delta] \\ &= y^{\alpha+1} f_{\lambda,\nu,\delta}(y) \end{aligned}$$

ou seja, $X^{\alpha+1} f_{\lambda,\nu,\delta}$ é crescente. Portanto, $f_{\lambda,\nu,\delta} \in C_1$.

3) Para $f_{\lambda,\nu,\delta} \in C_*$ (Ver 2.2.4), observe primeiro que

$$\begin{aligned} m(f_{\lambda,\nu,\delta}) &= \int_0^1 f_{\lambda,\nu,\delta} dm \\ &= \int_0^1 fhdm + \lambda \int_0^1 xhdm + \nu \int_0^1 hdm + \delta \\ &= \int_0^1 fh + \lambda \int_0^1 xh + \nu + \delta. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f_{\lambda,\nu,\delta}(x) &= (f(x) + \lambda x + \nu)h(x) + \delta \\ &\leq ax^{-\alpha}(f(x) + \lambda x + \nu) + \delta \\ &= ax^{-\alpha}(f(x) + \lambda x + \nu) + ax^{-\alpha}\delta a^{-1} x^{\alpha} \\ &= ax^{-\alpha}[f(x) + \lambda x + \nu + \delta a^{-1} x^{\alpha}] \\ &\leq ax^{-\alpha}[f(x) + \lambda x + \nu + \delta]. \end{aligned}$$

Desse modo, temos que

$$f_{\lambda,\nu,\delta}(x) \leq ax^{-\alpha} m(f_{\lambda,\nu,\delta}).$$

Logo, $f_{\lambda,\nu,\delta} \in C_*$.

4) Para $(\lambda x + \nu)h(x) + \delta \in C_*$, basta tomar $f \equiv 0$ e aplicar os resultados obtidos anteriormente.

Finalmente, o decaimento de correlações com respeito a μ para cada $f \in C^{(1)}$, $\int_0^1 f d\mu = 0$ e $g \in L^\infty$ pode ser estimado como segue:

Considere $f_{\lambda,\nu,\delta}+c \in C_* + \mathbb{R}$, onde c é uma constante, tal que

$$\int_0^1 (f_{\lambda,\nu,\delta}+c)d\mu = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 gP^n(f_{\lambda,\nu,\delta}+c)dm\right| &= \left|\int_0^1 gP^n[(f+\lambda x+\nu)h+\delta+c]dm\right| \\ &= \left|\int_0^1 gP^n fhdm + \int_0^1 gP^n[(\lambda x+\nu)h+\delta+c]dm\right|\end{aligned}$$

Sabemos que para $x,y\in\mathbb{R}$ vale que $|x-y|\geq ||x|-|y||$, logo

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 gP^n fhdm - \left(-\int_0^1 gP^n[(\lambda x+\nu)h+\delta+c]dm\right)\right| \\ &\qquad\geq \left|\,\left|\int_0^1 gP^n fhdm\right| - \left|\int_0^1 gP^n[(\lambda x+\nu)h+\delta+c]dm\right|\,\right| \\ &\qquad\geq \left|\int_0^1 gP^n fhdm\right| - \left|\int_0^1 gP^n[(\lambda x+\nu)h+\delta+c]dm\right|.\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\int_0^1 gP^n(f_{\lambda,\nu,\delta}+c)dm\right| + \left|\int_0^1 gP^n[(\lambda x+\nu)h+\delta+c]dm\right| \geq \left|\int_0^1 gP^n fhdm\right|, \tag{4.34}$$

como $\int_0^1 fd\mu = 0$, então temos que $\int_0^1[(\lambda x+\nu)h+\delta+c]d\mu = 0$. Pelas observações feitas anteriormente podemos usar o primeiro resultado aplicado a f nos dois termos do lado esquerdo da desigualdade 4.34. Assim, vamos ter que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 gP^n fhdm\right| &\leq c_4||f_{\lambda,\nu,\delta}+c||_1 n^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\qquad + c_4||(\lambda x+\nu)h+\delta+c||_1 n^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}},\end{aligned}$$

como $(\lambda x+\nu)h+\delta+c\in C_*+\mathbb{R}$, então $||(\lambda x+\nu)h+\delta+c||_1 = K<\infty$. Portanto, teremos

$$\left|\int_0^1 gP^n fhdm\right| \leq c_4(||f_{\lambda,\nu,\delta}+c||_1 + K)n^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{4.35}$$

observe que

$$\begin{aligned}
||f_{\lambda,\nu,\delta}+c||_1 &= \int_0^1 |(f+\lambda x+\nu)h+\delta+c|dm \\
&\leq \int_0^1 |(f+\lambda x+\nu)h+\delta|dm + \int_0^1 |c|dm \\
&= \int_0^1 [(f+\lambda x+\nu)h+\delta]dm + |c| \\
&= \int_0^1 fhdm + \int_0^1 [(\lambda x+\nu)h+\delta]dm + |c| \\
&= \int_0^1 [\lambda x+\nu)h+\delta]dm + |c| \\
&\leq \int_0^1 [(\lambda x+\nu)h+\delta]dm + |c| + ||f||_{C^{(1)}} \\
&= A + ||f||_{C^{(1)}},
\end{aligned}$$

onde $A = \displaystyle\int_0^1 (\lambda x+\nu)h+\delta+|c| < +\infty$ e $||f|_{C^{(1)}} = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$. Uma vez que $(\lambda x+\nu)h+\delta \in C_*$, tomando $C(||f||_{C^{(1)}}) = B + ||f||_{C^{(1)}}$, onde $B = A+K$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 gP^n fhdm\right| &\leq c_4(||f_{\lambda,\nu,\delta}+c||_1 + K)n^{1-\frac{1}{\alpha}}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&\leq c_4 C(||f||_{C^{(1)}})n^{-\frac{1}{\alpha}+1}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}},
\end{aligned}$$

e como $\mu = hdm$, concluímos que vale

$$\left|\int_0^1 gP^n fd\mu\right| \leq c_4 C(||f||_{C^{(1)}})n^{-\frac{1}{\alpha}+1}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{4.36}$$

Finalmente, a relação de dualidade (Ver 1.3) nós dá que

$$\int_0^1 gP^n fd\mu = \int_0^1 g\circ T^n fd\mu,$$

a partir da expressão 4.36 concluímos que vale

$$\left|\int_0^1 g\circ T^n fd\mu\right| \leq c_4 C(||f||_{C^{(1)}})||g||_\infty n^{-\frac{1}{\alpha}+1}(\log n)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

□

Referências Bibliográficas

[1] BARTLE, Robert. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. 1st edition. Eastern Michigan University and University of Illinois: Wiley-Interscience, 1995.

[2] BILBAO, Rafael. BIONI, Ricardo. LUCENA, Rafael. *Hölder regularity and exponential decay of correlations for a class of piecewise partially hyperbolic maps*, **30**, Outubro, 2020.

[3] BONANNO, Claudio. LENCI, Marco. *Pomeau-Manneville maps are global-local mixing*. Final Version for *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, **23**, July 2020.

[4] LIMA, Elon. *Espaços Métricos*. 2ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[5] LIVERANI, Carlangelo. SAUSSOL, Benoît. VAIENTI, Sandro. *A Probabilistic Approach to Intermittency*. University of Rome Tor Vergata, Centre de Physique Théorique, Marseilles, PhyMat, University of Toulon, **15**, October, 1997.

[6] LUCENA, Rafael. *Spectral Gap and Statiscal Properties for Piecewise Expanding Maps*. **40**, 2014. Notas de aula. Disponível em `https://sites.google.com/im.ufal.br/rafaellucena/artigos-preprints-e-lecture-notes?authuser=0#h.p_bvbit0xA_KAL`

[7] LUCENA, Rafael. *The Transfer and Perron-Frobenius Operators*. **23**, 2015. Notas de aula. Disponível em `https://sites.google.com/im.ufal.br/rafaellucena/artigos-preprints-e-lecture-notes?authuser=0#h.p_7HIcD4sP_KAA`

[8] SLEGERS, Wouter. *Spectral Theory for Perron-Frobenius operators*. Department of Mathematics Uppsala University, **33**, September, 2019.

[9] VIANA, Marcelo; OLIVEIRA, Krerley. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. 2ª Edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.

[10] VIANA, Marcelo. *Stochastic Dynamics of Deterministic Systems*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, **197**, Julho, 1997.