Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Caracterização de Hipersperfície com Curvatura r-Média Constante

Carlos Henrique da Silva

Maceió - AL
Agosto de 2021

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Caracterização de Hipersuperfícies com Curvatura r-Média Constante

por

Carlos Henrique da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto

Maceió - AL
Agosto de 2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

S586c Silva, Carlos Henrique da.
Caracterização de hipersuperfície com curvatura r-média constante / Carlos Henrique da Silva. - 2021.
59 f.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 58-59.

1. Hipersuperfícies. 2. Curvatura constante, Espaços de. 3. Espaços hiperbólicos. I. Título.

CDU: 514.764.27

Caracterização de Hipersperfícies com Curvatura r-Média Constante

por

Carlos Henrique da Silva [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada em 26 de Agosto de 2021.

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
Gregorio Manoel da Silva Neto
Data: 02/09/2021 13:36:54-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto (UFAL)
(Orientador)

Documento assinado digitalmente
Hilario Alencar da Silva
Data: 04/09/2021 09:01:08-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva (UFAL)
(Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente
Gregorio Pacelli Feitosa Bessa
Data: 03/09/2021 18:51:09-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa (UFC)
(Examinador Externo)

[1] O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que sempre me deu saúde, força e coragem a cada dia para seguir em frente.

À minha família, em especial aos meus pais José Aparecido e Maria Cicera por terem me dado uma boa educação e por sempre apoiarem meus estudos, as minhas irmãs Natália, Riquele e Sara por todo companheirismo e ajuda em todos os momentos, e à minha noiva Laice por todo carinho, amor e paciência durante esta passagem. Sem vocês isto não seria possível.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto pelo apoio e dedicação durante o desenvolvimento deste trabalho, pelas conversas e encontros que renderam bons ensinamentos para minha carreira profissional e pessoal.

Aos professores por aceitarem participar da banca e pelas valiosas sugestões.

Aos meus amigos da pós-graduação, pelos momentos juntos durante estes dois anos de estudo, em especial aos meus amigos Allan Kennedy, Cleone Neres, Deivid Santos, Manoel Vinicios e Rodrigo Costa pelas “resenhas” e momentos de descontração.

A minha Madrinha Genilda por toda ajuda durante todo o Mestrado. Deixo aqui minha gratidão.

À CAPES pelo suporte financeiro ao longo de todo o Mestrado.

Mais uma vez agradeço à minha família pelo incentivo e apoio em todos os momentos de minha vida.

Isto é uma ordem: sê firme e corajoso. Não te atemorizes, não tenhas medo, porque o Senhor está contigo em qualquer parte para onde fores (Josué 1.9)

Resumo

O objetivo desta dissertação é apresentar uma demostração do teorema de Sebastián Montiel e Antonio Ros que caracterizam as hipersuperfícies compactas, mergulhadas e com r-ésima curvatura média constante em formas espaciais. Esse teorema generaliza o teorema clássico de Alexandrov e estabelece que

As únicas hipersuperfícies compactas, sem fronteira e mergulhadas em $\mathbb{R}^{n+1}$, *no hemisfério aberto da esfera Euclidiana* $\mathbb{S}^{n+1}$ *ou no espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n+1}$, *com curvatura* r*-média constante para algum* $r = 1, \ldots, n$, *são as hiperesferas geodésicas.*

Observamos ainda que, apesar de seguirmos as ideias de Montiel e Ros, neste trabalho apresentamos uma nova abordagem para algumas etapas da demonstração.

Palavras-chave: Hipersuperfícies; r-ésima Curvatura media de ordem superior; Mergulhada; Compactas, Hemisfério aberto, Hiperbólico.

Abstract

This thesis aims to present a proof of a theorem of Sebastián Montiel and Antonio Ros which characterizes the compact hypersurfaces, without boundary, with constant r-mean curvature embedded in the space forms. This theorem generalizes the classical theorem of Alexandrov and states that

The only compact, without boundary, hypersurfaces with constant r-mean curvature for some $r = 1, \ldots, n$, embedded in $\mathbb{R}^{n+1}$, in the open hemisphere of the Euclidean sphere $\mathbb{S}^{n+1}$ or in the hyperbolic space $\mathbb{H}^{n+1}$, are the geodesic hyperspheres.

We remark that, despite we follow the ideas of Montiel and Ros, we give a new approach for some steps of the proof presented here.

Keywords: Hypersurfaces; r-th Curvature media of higher order; Layered; Compact, Open Hemisphere, Hyperbolic.

Sumário

Introdução

Um dos problemas clássicos de Geometria Diferencial é o estudo de superfícies com curvatura média ou curvatura Gaussiana constantes. Liebmann [12], em 1899, foi um dos pioneiros a estudar esses problemas, mostrando que a esfera é a única superfície compacta em $\mathbb{R}^3$ com curvatura Gaussiana constante, e posteriormente, que a esfera é o único ovaloide (superfície compacta em $\mathbb{R}^3$ com curvatura estritamente positiva) com curvatura média constante.

As generalizações naturais destas curvaturas para hipersuperfície M^n, no espaço euclidiano de $(n+1)$-dimensional, são as r-ésimas curvaturas médias, H_r, $r = 1, \ldots, n$, definidas pelo r-ésimo polinômio simétrico elementar nas curvaturas principais de M^n.

Considere M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n, compacta e orientável, seja $\psi : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica sobre a variedade Riemanniana $(n+1)-$dimensional $\bar{M}^{n+1}$. Sendo M^n orientável, podemos escolher um campo normal unitário global N. Denotaremos por ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M^n e $\bar{M}^{n+1}$, respectivamente. Associado à segunda forma fundamental da imersão temos o operador auto-adjunto A, definido por

$$A(X) = -(\bar{\nabla}_X N)^{\top}.$$

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A num ponto $p \in M^n$. Definimos a r-ésima curvatura média H_r da imersão ψ no ponto p da seguinte maneira:

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r}.$$

No sentido de unificar a notação, definimos $H_0 = 1$ e $H_r = 0$ para todo $r > n$. Note que para $r = 1, H_1 = H$ é a curvatura média da imersão e no caso $r = n, H_n$ é a curvatura de Gauss-Kronecker.

Adicionado à hipótese de convexidade para a hipersuperfície, em 1952, Süss [17] estendeu os resultados de Liebmann para a r-ésima curvatura média H_r constante para algum $r = 1, \ldots, n$. Em 1954, Hsiung [9] provou que a hipótese adicional da convexidade, assumida por Süss, poderia ser relaxada para estrelada.

Uma descoberta fundamental no sentido de estender os resultados de Liebamn, foi feita em 1956, por Alexandrov [1], que provou que

Teorema 1. *A esfera é a única hipersuperfície compacta, mergulhada no espaço euclidiano, com curvatura média, constante.*

O método de Alexandrov é completamente diferente dos métodos de Liebmann e Süss, sendo essencialmente baseado nos princípios do máximo para equações elípticas.

Em 1978, Reilly [15] obteve uma nova demonstração do Teorema de Alexandrov, usando novas técnicas. Em 1986, Ros [16] provou, seguindo o método de Reilly, que

Teorema 2. *A esfera é a única hipersuperfície compacta, mergulhada no espaço euclidiano, com curvatura escalar constante.*

Com relação ao caso imerso, Hopf [7] mostrou, em 1951, que a única imersão com curvatura média constante de $\mathbb{S}^2$ em $\mathbb{R}^3$ é a imersão canônica, originando uma pergunta natural:

Problema 1. *A esfera é a única hipersuperficie compacta, imersa/mergulhada, com curvatura média de ordem superior, H_r, constante, para algum $r = 1, 2, \ldots, n$?*

Essa pergunta foi respondida negativamente para o caso imerso por Hsiang, Teng e Yu [8], que em 1983, exibiram exemplos de hipersuperfícies compactas, não esféricas, imersas em $\mathbb{R}^{2k}$, com curvatura média constante. Finalmente, em 1986 , Wente [18] apresentou um toro imerso em $\mathbb{R}^3$, com curvatura média constante, e em 1987, Kapouleas [10] construiu novos exemplos de superfícies compactas imersas em $\mathbb{R}^3$, com curvatura média constante e gênero maior que um. Desta forma, a hipótese de mergulho nos teoremas de Alexandrov e de Ros é, de fato, uma necessidade e não pode ser relaxada para imersão.

Feitas essas considerações, podemos enunciar o principal resultado dessa dissertação que se encontra no artigo [13] de Sebastián Montiel e Antonio Ros. Por questões de organização do trabalho e das demonstrações, iremos enunciar e demonstrar os três casos, isto é, para os mergulhos em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$, separadamente, a saber:

Teorema 3 (Teorema 2.1.6)**.** *Seja M^n uma hipersuperfície mergulhada, compacta e sem bordo no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Se H_r é constante para algum $r = 1, \ldots, n$, então M^n é uma esfera.*

Teorema 4 (Teorema 2.2.7)**.** *Seja M^n uma hipersuperfície mergulhada, compacta e sem bordo no hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$. Se H_r é constante para algum $r = 1, \ldots, n$, então M^n é uma hiperesfera geodésica.*

Teorema 5 (Teorema 2.3.7)**.** *Seja M^n uma hipersuperfície mergulhada, compacta e sem bordo no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Se H_r é constante para algum $r = 1, \ldots, n$, então M^n é uma hiperesfera geodésica.*

O trabalho está dividido em dois capítulos. No capítulo 1 introduzimos alguns pré-requisitos básicos de Geometria Riemanniana com o objetivo de deixar a exposição o mais autocontida possível. Além disso, faremos uma breve exposição sobre funções simétricas, definiremos o r-ésimo tensor de Newton associado à segunda forma fundamental de uma imersão $\psi : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ e demonstraremos algumas de suas propriedades.

O capítulo 2 contém as demonstrações do resultado principal e está dividido em três seções, cada uma dedicada a uma forma espacial, sendo que na primeira seção provaremos o caso Euclidiano do teorema principal e na segunda e terceira seções provaremos os casos esférico e hiperbólico, respectivamente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os requisitos necessários para a compreensão dos resultados principais dessa dissertação. Exceto quando explicitamente mencionado, a demonstração dos resultados apresentados aqui podem ser encontrados em [5]. Sejam M^n (ou simplesmente M) uma variedade Riemanniana de dimensão n e classe C^∞, $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M, $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M, ∇ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sua conexão e métrica Riemanniana, respectivamente. O símbolo ∇ também representará o gradiente de uma função. Nesses casos ficará claro no contexto tal diferença, excluindo assim qualquer possibilidade de confusão. Além disso, se $p \in M$, então T_pM denotará o espaço tangente a M em p e TM o fibrado tangente a M.

1.1 Variedades diferenciáveis e campo de vetores

Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações injetivas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$, definidas em abertos U_α de $\mathbb{R}^n$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}\left(U_\alpha\right) = M$;

(ii) Para todo par de índices α, β tais que $\mathbf{x}_\alpha\left(U_\alpha\right) \cap \mathbf{x}_\beta\left(U_\beta\right) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathbf{x}_\beta \circ \mathbf{x}_\alpha^{-1} : \mathbf{x}_\alpha^{-1}(W) \to \mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são diferenciáveis;

(iii) A família $\left\{(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)\right\}_\alpha$ é maximal com esta propriedade.

A família $\left\{(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)\right\}_\alpha$ recebe o nome de atlas. Cada $(\mathbf{x}_\alpha, U_\alpha)$ é denominado carta ou parametrização, ou ainda sistema de coordenadas. O conjunto $\mathbf{x}_\alpha\left(U_\alpha\right)$ é chamado vizinhança coordenada de cada ponto $p \in \mathbf{x}_\alpha\left(U_\alpha\right)$.

Definição 1.1.1. Sejam M^n e M^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\psi : M^n \to M^m$ é diferenciável em $p \in M^n$, se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \to M^m$ em

$\psi(p)$ existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ em p tal que $\psi(x(U)) \subset y(V)$ e, além disso, a aplicação

$$y^{-1} \circ \psi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. Dizemos que a aplicação ψ é diferenciável em um aberto de M^n, se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Definição 1.1.2. Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$ é chamada uma curva (diferenciável) em M^n. Suponha que $\alpha(0) = p \in M^n$, o vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \qquad f \in \mathcal{D}.$$

Definição 1.1.3. Sejam M^n e M^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\psi : M^n \to M^m$ diferenciável é uma imersão, se $d\psi_p : T_pM^n \to T_{\psi(p)}M^m$ é injetiva para todo $p \in M^n$. Se, além disso, ψ é um homeomorfismo sobre $\psi(M^n) \subset M^m$, onde $\psi(M^n)$ tem a topologia induzida por M^m, diz-se que ψ é um mergulho. Se $M^n \subset M^m$, então a inclusão $i : M^n \hookrightarrow M^m$ é uma subvariedade de M^m.

Definição 1.1.4. Seja M^n uma variedades diferenciável. Diz-se que M^n é orientável, se M^n admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que, para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cup x_\beta(U_\beta = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenada $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo.

Definição 1.1.5. Uma campo de vetores X em uma variedade diferenciável M^n é uma correspondência que a cada ponto $p \in M^n$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M^n no fibrado tangente TM. O campo de vetores X é diferenciável, se a aplicação $X : M^n \to TM^n$ é diferenciável.

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ é a base associada a x_i, $i = 1, \ldots, n$. É claro que X é diferenciável se, e só se, as funções a_i são diferenciáveis para algum i, portanto, para qualquer parametrização.

As vezes é conveniente utilizar a ideia de vetor e pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$ do conjunto das funções diferenciáveis em M^n, definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

A expressão campo de vetores significa campo diferenciável de vetores. Também denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos (diferenciáveis) de vetores.

Exemplo 1.1.6. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Escrevamos $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ em uma vizinhança coordenada $x(U)$. Então,

$$\begin{aligned}
XY(f) &= X\left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\\
&= \sum_{j=1}^n X\left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.
\end{aligned}$$

Analogamente, vemos que

$$YX(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_j a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Portanto, usando o teorema de Schwarz, que diz que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, obtemos

$$XY(f) - YX(f) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

sobre $x(U)$. Além disso, pode-se demonstrar que a expressão de $XY - YX$ independe da parametrização x. Portanto, $XY - YX \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.1.7. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o campo $[X, Y] := XY - YX \in \mathfrak{X}(M)$ é chamado o colchete de X e Y.

Proposição 1.1.8. *Se X, Y e Z são campos de vetores suaves sobre M, a e b são números reais e f e g são funções suaves definidas em M, então*

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$;

(ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$;

(iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$;

(iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.2 Métricas Riemannianas

Definição 1.2.1. Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M^n é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = g_p(\cdot, \cdot)$ no espaço tangente T_pM, tal que, se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, então para cada par $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $q \longmapsto \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$ é uma função suave definida sobre $x(U)$.

As funções $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ são chamadas de componentes da métrica Riemanniana g no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M^n$. Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana é chamada de variedade Riemanniana. É usual deixar de indicar o índice p em $g_p = \langle , \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. Denotaremos por (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n com uma métrica g. Sempre que não for importante ou estiver implícito com qual métrica estamos trabalhando, escreveremos apenas M no lugar de (M, g) e, além disso, diremos que M é uma variedade Riemanniana.

Definição 1.2.2. Sejam M e N variedades Riemannianas com métricas g e h, respectivamente. Um difeomorfismo $f : M \to N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma isometria se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

ou seja,

$$g(u, v)(p) = h\left(df_p(u), df_p(v)\right)(f(p)),$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$.

A definição acima introduz uma relação de equivalência entre duas variedades Riemannianas. Ela diz que duas variedades isométricas são indistinguíveis do ponto de vista métrico. Isto significa que as medidas como ângulo, área, volume, comprimento e curvatura, definidas adiante, são idênticas em ambas as variedades.

Definição 1.2.3. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

indicada por $(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_Y Z$;

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.

Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$. Dizemos que $\nabla_X Y$ é a derivada covariante do campo Y na direção do campo X.

A seguinte proposição estabelece uma relação entre a conexão e a derivada covariante.

Proposição 1.2.4. *Sejam M uma variedade Riemanniana e ∇ sua conexão. Existe uma única correspondência que associa a cada campo de vetores V, ao longo de uma curva $c : I \subset \mathbb{R} \to M$, um outro campo de vetores $\dfrac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que*

(a) $\dfrac{D}{dt}(V + W) = \dfrac{DV}{dt} + \dfrac{DW}{dt}$;

(b) $\dfrac{D}{dt}(fV) = \dfrac{df}{dt}V + f\dfrac{DV}{dt}$, *onde f é uma função diferenciável em I;*

(c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$.

Definição 1.2.5. Dizemos que uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle .$$

Definição 1.2.6. Uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana M é dita simétrica, se para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Agora iremos enunciar uma proposição importante sobre a existência e unicidade de uma conexão afim simétrica e compatível com a métrica de uma variedade Riemanniana.

Proposição 1.2.7. *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver página 61 de [5] $\square$

A conexão afim da proposição anterior é denominada a conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de M. De agora em diante, estaremos sempre considerando variedades Riemannianas com suas respectivas conexões Riemannianas.

Definição 1.2.8. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado paralelo, quando $\dfrac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Definição 1.2.9. Um conjunto $\{E_1, \dots, E_n\}$ é dito um referencial para M se, para cada $p \in M$, o conjunto $\{E_1(p), \dots, E_n(p)\}$ for uma base de T_pM. Se essa base é ortonormal para todo $p \in M$, dizemos que o referencial é ortonormal.

Isto implica que todo campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser escrito da forma

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i,$$

onde as funções x_i são diferenciáveis. Um caso especial de referencial será particularmente útil:

Definição 1.2.10. Um referencial ortornormal em M é dito geodésico $p \in M$, se$\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

1.3 Integrais sobre variedades Riemannianas

Seja M uma variedade Riemanniana compacta e seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ uma parametrização tal que o fecho de U é compacto. Definimos a integral de f sobre U por

$$\int_U f dM = \int_U (f \circ \mathbf{x})(u_1, \ldots, u_n)\sqrt{g} du_1 \ldots du_n,$$

onde $g = \det G$ e $G = (g_{ij})_{n \times n}$ é a matriz cujos coeficientes são os termos da métrica. Observe que a definição acima não depende da parametrização. De fato, se $\mathbf{y} : W \subset \mathbb{R}^n \to V \subset M$ é uma outra parametrização e se $\xi = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : W \to U$ é a mudança de coordenadas de $\mathbf{y}$ para $\mathbf{x}$, então, pelo teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas, temos

$$\int_U f \circ \mathbf{x}(u_1, \ldots, u_n)\sqrt{g} du_1 \ldots du_n = \int_{\xi^{-1}(U)} (f \circ \mathbf{x} \circ \xi)(v_1, \ldots, v_n)\sqrt{g}|\det \xi'| dv_1 \ldots dv_n$$

$$= \int_W (f \circ \mathbf{y})(v_1, \ldots, v_n)\sqrt{g}.\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{g}} dv_1 \ldots dv_n = \int_W (f \circ \mathbf{y})(v_1 \ldots v_n)\sqrt{h} dv_1 \ldots dv_n,$$

onde usamos que $|\det \xi'| = |\det H|/|\det G| = \sqrt{g}/\sqrt{h}$, G e H são as matrizes da métrica relativas às parametrizações $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, respectivamente, e onde seus respectivos determinantes são representados por $\sqrt{g}$ e $\sqrt{h}$. Assim, a integral está bem definida e não depende de parametrizações.

Para estender a definição de integral sobre toda a superfície compacta M, iremos utilizar as partições da unidade.

Definição 1.3.1. O suporte de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\operatorname{supp} f = \{x \in M; x = \lim_k x_k, x_k \in M, f(x_k) \neq 0\},$$

isto é, o fecho (em M) do conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $f(x) \neq 0$.

Definição 1.3.2. Uma partição da unidade em uma variedade diferenciável compacta

M é uma família $(\eta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de funções diferenciáveis $\eta_\lambda : M \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\eta_\lambda(x) \geq 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$ e todo $x \in M$;

ii) Para todo $x \in M$, tem-se $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \eta_\lambda(x) = 1$.

Lembremos que, se M é compacta, então M pode ser coberta por uma família finita de abertos. Assim, se $V_1 \cup \ldots \cup V_m$ é uma cobertura aberta de M, então M possui uma partição da unidade $(\eta_i)_{i=1}^m$ tal que $\operatorname{supp}\eta_i \subset V_i$. Dessa forma, definimos a integral de $f : M \to \mathbb{R}$ por

$$\int_M f dA = \sum_{i=1}^m \int_M \eta_i f dA = \sum_{i=1}^m \int_{U_i} \eta_i \cdot (f \circ \mathbf{x}_i)(u_1, \ldots, u_n)\sqrt{g} du_i \ldots du_n, \tag{1.1}$$

onde $\mathbf{x}_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \to V_i \subset M$ são parametrizações locais de M.

Mostraremos agora que a integral em (1.1) não depende da partição da unidade escolhida. Sejam $W_1 \cup \ldots \cup W_s$ uma outra cobertura de M e $(\xi_j)_{j=1}^s$ uma partição da unidade associada satisfazendo $\operatorname{supp}\xi_j \subset V_j$. Assim, como $\sum_{i=1}^m \eta_i = \sum_{j=1}^s \xi_j = 1$, temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \int_M \eta_i f dA &= \sum_{i=1}^m \int_M \eta_i \sum_{j=1}^s \xi_j f dA = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^s \int_M \eta_i \xi_j f dA \\ &= \sum_{j=1}^s \int_M \sum_{i=1}^m \eta_i \xi_j f dA = \sum_{j=1}^s \int_M \xi_j f dA,\end{aligned}$$

e, portanto, a integral para variedades Riemannianas compactas está bem definida.

1.4 Geodésicas, aplicação exponencial e variedades Riemanninas completas

Definição 1.4.1. Sejam M uma variedade Riemanniana e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica se, para todo $t \in I$, $\dfrac{D}{dt}\left(\dfrac{d\gamma}{dt}\right) = 0$.

Nesse caso, se $v(t) = \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}$ é a velocidade de γ, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(v^2(t)\right) &= \frac{d}{dt}\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \\ &= 2\left\langle \frac{D}{dt}\gamma'(t), \gamma'(t) \right\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que se γ é geodésica, então o vetor velocidade de γ possui norma constante.

Dizemos que uma geodésica γ é normalizada ou que está parametrizada pelo comprimento de arco quando $|\gamma'(t)| = 1$, para todo $t \in I$.

Como uma consequência do teorema de existência e unicidade das soluções de equações diferenciais ordinárias, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.4.2. *Seja M uma variedade Riemanniana. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, existe uma única geodésica $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.*

Denotaremos por γ_v a única geodésica que no instante $t = 0$ passa por p com velocidade $v \in T_pM$

Definição 1.4.3. Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. A aplicação exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ é a aplicação diferenciável

$$\exp_p(v) = \gamma(1, p, v) = \gamma\left(|v|, p, \frac{v}{|v|}\right),$$

onde $\gamma(t) = \gamma(t, p, v)$ é a única geodésica satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Definição 1.4.4. A distância entre dois pontos p q em uma variedade Riemanniana M é definida como o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes que ligam p a q.

Definição 1.4.5. Uma variedade Riemanniana M é dita (geodesicamente) completa se, para todo $p \in M$, a aplicação $\exp_p$ está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, as geodésicas iniciando em t estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.4.6 (Teorema de Hopf-Rinow)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *M é geodesicamente completa;*

(ii) *M é um espaço métrico completo;*

(iii) $\exp_p$ *está definida sobre todo o T_pM para todo $p \in M$;*

(iv) *Os conjuntos fechados e limitados de M são compactos;*

(v) *Existe uma sequência de subconjuntos compactos $K_n \subset M$ satisfazendo $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = M$ tal que, se $q_n \notin K_n$, então $d(q_n, p) \to \infty$.*

Além disso, qualquer uma das afirmações acima implica que para qualquer $q \in M$ existe uma geodésica γ ligando p a q tal que o comprimento de γ é igual à distância de p a q em M.

Definição 1.4.7. Uma variedade Riemanniana M é dita (geodesicamente) completa se, para todo $p \in M$, a aplicação $\exp_p$ está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, as geodésicas iniciando em t estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observação 1.4.8. As demonstrações dos resultados dessa seção podem ser encontradas, por exemplo, em [5].

1.5 Curvatura

A seguir apresentaremos a definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser Euclidiana.

Definição 1.5.1. O tensor curvatura ou, simplesmente, a curvatura R de uma variedade Riemanniana M, é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Lema 1.5.2. *O tensor curvatura em uma variedade Riemanniana satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $R(X,Y)Z$ *é trilinear, isto é, linear nas variáveis* X, Y *e* Z;

(ii) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$;

(iii) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$;

(iv) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$;

(v) Satisfaz a identidade de Bianchi:

$$R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0.$$

Proposição 1.5.3. *Seja* $\sigma \subset T_pM$ *um subespaço bidimensional do espaço tangente* T_pM *e sejam* $x, y \in \sigma$ *dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K_\sigma(p) = K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}},$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Ver página 105 de [5]. □

Definição 1.5.4. Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real $K_p(\sigma) = K_p(x,y)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p.

1.6 Gradiente, divergente, Laplaciano e Hessiano

Definição 1.6.1 (Gradiente)**.** O gradiente de uma função $f \in \mathcal{D}(M)$ é o único campo de vetores $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ que satisfaz a equação

$$\langle \nabla f, X \rangle = Xf, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Sob o ponto de vista de formas diferenciais, vemos que $df(p)$ é um funcional linear para cada $p \in M$ e, portanto, existe um único vetor $\nabla f(p)$ tal que

$$df(p)(X(p)) = \langle \nabla f(p), X(p) \rangle_p.$$

Fazendo p variar sobre M, obtemos

$$df(X) = \langle \nabla f, X \rangle.$$

Proposição 1.6.2. *Se $f \in \mathcal{D}(M)$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial geodésico em M, então*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

Demonstração. Ao escrever

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i,$$

temos que

$$e_j(f) = \langle \nabla f, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, e_j \right\rangle = a_j.$$

Portanto

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

□

Proposição 1.6.3. *Se $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*

(i) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;

(ii) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$\begin{aligned}
\langle \nabla(f+g), X \rangle &= X(f+g) \\
&= X(f) + X(g) \\
&= \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla g, X \rangle \\
&= \langle \nabla f + \nabla g, X \rangle
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \nabla(fg), X\rangle &= X(fg)\\ &= gX(f) + fX(g)\\ &= \langle g\nabla f, X\rangle + \langle f\nabla g, X\rangle\\ &= \langle g\nabla f + f\nabla g, X\rangle.\end{aligned}$$

Como isto vale para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, os resultados seguem. $\square$

Definição 1.6.4. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A divergência de X é a função div $X : M \to \mathbb{R}$, dada para $p \in M$ por

$$(\mathrm{div}X)(p) = \mathrm{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_pM$ e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

Decorre diretamente da definição que, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$, então

(i) $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}\,Y$;

(ii) $\mathrm{div}(f.X) = f.\mathrm{div}X + \langle \nabla f, X\rangle$.

Definição 1.6.5. Seja $f \in \mathcal{D}(\mathrm{M})$. O Laplaciano de f é o operador $\Delta : \mathcal{D}(\mathrm{M}) \to \mathcal{D}(\mathrm{M})$ definido por

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f).$$

Usando as propriedades do gradiente e divergente, prova-se facilmente que:

(i) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$;

(ii) $\Delta(f\cdot g) = f\cdot\Delta g + g\cdot\Delta f + 2\langle\nabla f, \nabla g\rangle$, para quaisquer $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 1.6.6. Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O Hessiano de f no ponto $p \in M$ é o campo de operadores lineares $(\mathrm{Hess}f)_p : T_pM \to T_pM$, definido para $v \in T_pM$ por

$$(\mathrm{Hess}f)_p(v) = \nabla_v\nabla f.$$

Segue das propriedades de conexão Riemanniana que, se X é uma extensão local de v então $\mathrm{Hess}f_p(v) = (\nabla_X\nabla f)(p)$. Podemos considerar Hess$f$ como um tensor tal que, para cada par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\mathrm{Hess}f(X,Y) = \langle \mathrm{Hess}f(X), Y\rangle.$$

Proposição 1.6.7. *Se $f \in \mathcal{D}(M)$, então para todo $p \in M$ vale a igualdade*

$$\Delta f(p) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Hess}f_p\right).$$

Demonstração. Sejam $p \in M$ e $U \subset M$ uma vizinhança aberta de p na qual está definido um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f)_p &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\operatorname{Hess} f)_p (e_i), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle_p \\ &= \operatorname{div}(\nabla f)(p) \\ &= \Delta f(p). \end{aligned}$$

□

Integrais sobre variedades Riemannianas compactas satisfazem o

Teorema 1.6.8 (Teorema da Divergência)**.** *Se M^n é uma variedade Riemanniana orientada, compacta, com bordo e X um campo de vetores definido em M^n, então*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = -\int_{\partial M} \langle X, N \rangle ds,$$

onde N é o vetor normal unitário apontando para o interior de ∂M^n, na orientação de M^n.

Demonstração. Ver página 230 de [11]. □

Uma consequência imediata do teorema da divergência é o

Corolário 1.6.9. *Se M é uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo e $X \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = 0.$$

1.7 A segunda forma fundamental

Definição 1.7.1 (Variedades Imersas)**.** Uma aplicação $f : M^n \to \bar{M}^{n+m=k}$ entre duas variedades diferenciáveis é dita uma imersão, se sua diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\bar{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Se $\bar{M}$ possui uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M, dada por

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \qquad u, v \in T_pM.$$

Como df_p é injetiva, $\langle , \rangle_p$ é positivo definido. As demais condições da Definição 1.2.1 são facilmente verificadas. A métrica de M é chamada então a métrica induzida por f, e f é então chamada de uma imersão isométrica e o número $m = \dim \bar{M} - \dim M$ é chamado de codimensão da imersão.

Definição 1.7.2. Quando a imersão tem codimensão 1, dizemos que M é uma hipersuperfície de $\bar{M}$.

Seja $f : M^n \to \bar{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \bar{M}$ é uma subvariedade de $\bar{M}$. Isto quer dizer que existem uma vizinhança $\bar{U} \subset \bar{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \bar{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \bar{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$.

Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM, q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\bar{M}$. Usaremos tais identificações para estender, por exemplo, um campo local (isto é, definido em U) de vetores de M a um campo local (isto é, definido em $\bar{U}$) de vetores em $\bar{M}$; se U é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, como se vê facilmente usando o difeomorfismo φ.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\bar{M}$ decompõe $T_p\bar{M}$ na soma direta

$$T_p\bar{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\bar{M}$. Se $v \in T_p\bar{M}, p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM, \quad v^N \in (T_pM)^{\perp}.$$

Denominamos v^T a componente tangencial de v e v^N a componente normal de v. A conexão Riemanniana de $\bar{M}$ será indicada por $\bar{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\bar{X}, \bar{Y}$ são extensões locais a $\bar{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}\right)^T,$$

a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M.

Consideramos em $TM^{\perp}$ a métrica obtida pela restrição da métrica de $T\bar{M}$. Para $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, uma fácil verificação permite mostrar que

$$\nabla^{\perp}_{X}\eta := \left(\bar{\nabla}_X \eta\right)^{\perp},$$

onde $()^{\perp}$ denota projeção sobre $TM^{\perp}$, bem define uma conexão $\nabla^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ no fibrado normal de M. Tal conexão é compatível com a métrica de $TM^{\perp}$, uma vez que se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, então

$$X\langle \eta, \xi\rangle = \left\langle \bar{\nabla}_X \eta, \xi \right\rangle + \left\langle \eta, \bar{\nabla}_X \xi \right\rangle = \left\langle \nabla^{\perp}_X \eta, \xi \right\rangle + \left\langle \eta, \nabla^{\perp}_X \xi \right\rangle,$$

a conexão $\nabla^{\perp}$ é denominada a conexão normal da imersão.

Definição 1.7.3. Sejam $f : M \to \bar{M}$ uma imersão isométrica, $U \subset M$ uma vizinhança de $p \in M$ tal que $f(U) \subset \bar{M}$ é uma subvariedade de $\bar{M}$ e $N \in \mathfrak{X}(\bar{U})$ um campo local de $\bar{M}$, com $\bar{U} \subset \bar{M}$ aberto e $f(U) \subset \bar{U}$. O campo N diz-se normal a M, se $\bar{X}(p) = \bar{X}_p \in (T_pM)^{\perp}$, para todo $p \in U$.

Assim, segue da definição 1.7.3 que,

$$B(X,Y) := \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\bar{M}$ normal à M. Prova-se que $B(X,Y)$ está bem definida, isto é, $B(X,Y)$ não depende das extensões $\bar{X}$ e $\bar{Y}$. Indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis em U normais à $f(U) \approx U$.

Proposição 1.7.4. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então a aplicação $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, dada por*

$$B(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

está bem definida. Além disso, B é bilinear e simétrica.

Demonstração. Ver página 140 de [5]. □

Agora podemos definir a segunda forma fundamental de M em $\bar{M}$. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Defina a aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle,$$

e, pela Proposição 1.7.4, temos que H_η é bilinear e simétrica. Observe que a aplicação H_η está bem definida pois $B(X,Y)(p)$ depende apenas de X_p na primeira entrada e B é simétrica, temos que $B(X,Y)(p)$ depende apenas de X_p e Y_p.

Definição 1.7.5. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η.

Às vezes se utiliza também a expressão segunda forma fundamental para designar a aplicação B que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_pM)^{\perp}$.

Definição 1.7.6. A aplicação bilinear H_η está associada uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$, dada por

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle.$$

A aplicação A_η é denominada o operador de Weingarten ou operador de forma associado à segunda forma fundamental II_η. Quando a codimensão é 1, isto é, quando M é uma hipersuperfície de $\bar{M}$, iremos denotar esse operador apenas por A.

A proposição a seguir dá uma expressão da aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante.

Proposição 1.7.7. *Sejam $p \in M, x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de η normal à M. Então*

$$A_\eta(x) = -\left(\bar{\nabla}_x N\right)^T.$$

Demonstração. Sejam $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y respectivamente. Então $\langle N, Y\rangle = 0$, donde concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle A_\eta(x), y\rangle &= \langle B(X,Y)(p), N\rangle \\
&= \left\langle \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N\right\rangle(p) \\
&= \left\langle \bar{\nabla}_X Y, N\right\rangle(p) \\
&= -\left\langle Y, \bar{\nabla}_X N\right\rangle(p) \\
&= \left\langle -\bar{\nabla}_x N, y\right\rangle
\end{aligned}$$

para todo $y \in T_pM$. □

Sejam $f(M) \subset \bar{M}$ uma hipersuperfície, $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}, |\eta| = 1$. Como $A_\eta : T_pM \to T_pM$ é auto-adjunta, segue do Teorema Espectral que existe uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM formada por autovetores com autovalores associados $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, isto é, $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, \quad 1 \leq i \leq n$. Neste caso, denominamos os e_i de direções principais e os λ_i de curvaturas principais da imersão f.

Definição 1.7.8. Uma imersão isométrica $\varphi : M^n \to \bar{M}^{n+k}$ é umbílica em $p \in M$ se, para cada $\mu \in T_pM^{\perp}$, existe um número real λ_μ tal que

$$A_\mu = \lambda_\mu \mathrm{id}, \text{ onde } \mathrm{id} : T_pM \to T_pM.$$

A imersão é totalmente umbílica se ela é umbílica em cada $p \in M$.

A proposição a seguir relaciona os tensores curvatura de M e $\bar{M}$ por meio da segunda forma fundamental da imersão. Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada no capítulo 6 de [5].

Proposição 1.7.9. *Se $f : M^n \to \bar{M}^{n+m}$ é uma imersão isométrica, então*

(i) (Gauss) $\langle \bar{R}(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(X,Y)Z, T\rangle - \langle B(Y,T), B(X,Z)\rangle + \langle B(X,T), B(Y,Z)\rangle$;

(ii) (Codazzi) $\langle \bar{R}(X,Y)Z, \eta\rangle = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta)$,

onde $X, Y, Z, T \in TM$, $\eta \in TM^{\perp}$ *e*

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = X\langle B(Y,Z), \eta\rangle - \langle B(\nabla_X Y, Z), \eta\rangle - \langle B(Y, \nabla_X Z), \eta\rangle.$$

Corolário 1.7.10 (Gauss). *Se $f : M^n \to \bar{M}^{n+m}$ é uma imersão isométrica e $X, Y \in TM$ são campos de vetores ortonormais, então*

$$K(X,Y) = \bar{K}(X,Y) + \langle B(X,X), B(Y,Y)\rangle - |B(X,Y)|^2.$$

Corolário 1.7.11 (Codazzi). *Se $f : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ é uma imersão isométrica e $\bar{M}^{n+1}$ tem curvatura secional constante, então*

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X)$$

onde A é o operador de forma de f e $(\nabla_X A)(Y) = \nabla_X A(Y) - A(\nabla_X Y)$.

1.8 Coordenadas de Fermi

Seja M^n uma subvariedade de uma variedade Riemanniana completa $\bar{M}^{n+m}$. Como de costume, iremos identificar M com $\psi(M) \subset \bar{M}^{n+m}$. Nesta seção iremos considerar a função distância de $\bar{M}^{n+m}$ baseada em M. Os detalhes do que iremos apresentar aqui podem ser encontrados em [4], p. 138-146 (ver também a seção 4 do Capítulo X de [5]).

Definição 1.8.1. Dado, $q \in \bar{M}^{n+m}$ a função distância de q a M é

$$r(q) = d(q, M) := \inf\{d(q,p); p \in M\}$$

Lema 1.8.2. *Se M^n é uma subvariedade de uma variedade Riemanniana completa $\bar{M}^{n+m}$, então a função distância $r : \bar{M}^{n+m} \to \mathbb{R}$ dada por $r(q) = d(q, M)$ satisfaz*

(i) $|\bar{\nabla} r| = 1$;

(ii) As curvas integrais de $\bar{\nabla} r$ são geodésicas de $\bar{M}^{n+m}$ emanando de M;

(iii) Se M é compacta, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{\nabla} r$ está definida e é suave em $r^{-1}((0,\varepsilon))$. Além disso, as curvas integrais de $\bar{\nabla} r$ intersectam M ortogonalmente;

(iv) Se M é compacta e $q \in \bar{M} \backslash M$, então existe uma geodésica $\gamma : [0,1] \to \bar{M}$, ortogonal a M, tal que $\gamma(0) \in M$, $\gamma(1) = q$ e $\ell(\gamma) = d(q, M)$.

Seja exp a aplicação exponencial de $\bar{M}^{n+m}$ e considere a restrição

$$\exp^{\perp} = \exp|_{(TM)^{\perp}}$$

ao fibrado normal de M em $\bar{M}^{n+m}$. Denote ainda por $(SM)^{\perp} = \{\eta \in (TM)^{\perp}; |\eta| = 1\}$.

Definição 1.8.3. A aplicação $E : [0,\infty) \times (SM)^{\perp} \to \mathbb{R}$ dada por

$$E(t,\eta) = \exp^{\perp}(t\eta)$$

determina coordenadas radiais em $\bar{M}^{n+m}$ a partir de M, chamadas de coordenadas de Fermi associadas à função distância $r(q) = d(q, M)$.

Definição 1.8.4. Dizemos que um ponto $q \in \bar{M}^{n+m}$ é um ponto focal de M em $\bar{M}$ se p é um valor crítico de $\exp^\perp$.

Observação 1.8.5. Geometricamente, se $\mathbb{R}^{n+1}$, então dada $\alpha : I \to M$ uma curva suave, a definição de ponto focal implica que as retas normais que começam ao longo da curva $\psi \circ \alpha$ perto de $\psi(p) = \psi(\alpha(s_0))$ tendem a se concentrar em $q = \psi_s(\alpha(t_0)) = \psi_s(p)$. Veja figura 1.1.

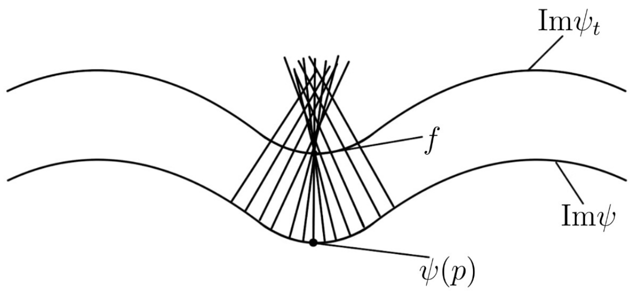

Figura 1.1: f é um ponto focal de uma hipersuperfície ψ em $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.8.6. Dados $p \in M$ e $\eta \in (S_pM)^\perp$, definimos a distância ao ponto focal mínimo de M, ao longo da geodésica γ em $\bar{M}^{n+m}$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \eta$, por

$$c_\eta(p) := \sup\{t > 0; d(M, \gamma(t)) = t.\}$$

isto é, o maior valor de t tal que a geodésica que parte de M, ortogonal a M, minimiza distância a M. Se a codimensão $m = 1$, omitiremos a menção a vetor normal e escreveremos $c(p) = c_\eta(p)$.

Sob todas essas considerações, obtemos

Proposição 1.8.7. *Se M^n é uma subvariedade de uma variedade Riemanniana completa $\bar{M}^{n+m}$ e $f : \bar{M}^{n+m} \to \mathbb{R}$ é uma função integrável, então*

$$\int_{\bar{M}} f dV = \int_M \int_{(S_pM)^\perp} \int_0^{c_\eta(p)} f(\exp^\perp(t\eta))\sqrt{\mathbf{g}}(t, \eta) dt d\mu_{m-1} dA.$$

Em particular, se a codimensão $m = 1$, então

$$\int_{\bar{M}} f dV = \int_M \int_0^{c(p)} f(\exp^\perp(t\eta))\sqrt{\mathbf{g}}(t, \eta) dt dA.$$

Aqui, $\mathbf{g}(t, \eta)$ é o determinante da matriz da métrica Riemanianna de $\bar{M}^{n+m}$ nas coordenadas de Fermi, dA é a medida Riemmaniana de M e $d\mu_{m-1}$ é a medida Riemanniana de $(S_pM)^\perp$.

1.9 Transformações de Newton

Definição 1.9.1. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita simétrica, se f é invariante por permutação de suas variáveis independentes, isto é,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f\left(x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(n)}\right),$$

para todas as bijeções $\rho : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Definição 1.9.2. Definimos a k-ésima função simétrica elementar $s_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$s_k(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \displaystyle\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} \ldots x_{i_k} & , k \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & , k > n. \end{cases}$$

As funções simétricas elementares tem as seguintes propriedades

Proposição 1.9.3. *Se $s_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a k-ésima função simétrica elementar, então*

(i) $\dfrac{\partial}{\partial x_j} s_k(x_1, \ldots, x_n) = s_{k-1}(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n)$;

(ii) $$\begin{aligned} s_k(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n) &- s_k(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n) \\ &= (x_j - x_i)\, s_{k-1}(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n); \end{aligned}$$

(iii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} s_k(x_1, \ldots, x_n) = k \cdot s_k(x_1, \ldots, x_n)$.

Aqui $\widehat{x_j}$ indica que o elemento x_j foi omitido.

Demonstração. Usando o método de indução finita, os itens (i) e (ii) decorrem diretamente da definição. A prova do item (iii) pode ser consultada em [2] . □

Definição 1.9.4. Seja $\psi : M^n \to M^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas e seja $A : T_pM \to T_pM$ o operador linear auto-adjunto associado à segunda forma fundamental da imersão ψ em cada ponto $p \in M$. Associado a A temos os n invariantes $S_r(A), 1 \le r \le n$, definidos pela igualdade

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r(A) t^{n-r},$$

onde $S_0(A) = 1$ por definição. Quando $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de T_pM formada por autovetores de A, com autovalores, respectivamente, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, vê-se que

$$S_r(A) = s_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

onde s_r é o r-ésimo polinômio simétrico elementar.

Definição 1.9.5 (Transformações de Newton)**.** Sejam $\psi : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica, A seu operador de forma e $r \in \mathbb{N}$. Definimos o r-ésimo Tensor de Newton como sendo a aplicação $P_r : T_pM \to T_pM$ dada, recursivamente, por

$$P_r(A) = S_r(A)I - AP_{r-1}(A)$$

e $P_0 = I$. Note $P_r(A) = P(A) = 0$ para todo $r \geq n$.

Observação 1.9.6. Por simplicidade, de agora em diante, denotaremos $P_r(A)$ e $S_r(A)$ por P_r e S_r, respectivamente.

Observação 1.9.7. Visto que P_r um polinômio em A para todo r, ele é também auto-adjunto e comuta com A. Assim, toda base que diagonaliza A em $p \in M^n$ também diagonaliza todos os P_r em $p \in M^n$.

Lema 1.9.8. *Seja $\psi : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedade Riemannianas e seja A o operador linear associado à segunda forma fundamental. O r-ésimo Tensor de Newton P_r associado a A, satisfaz*

(i) $\operatorname{tr}(P_r) = (n - r)S_r$;

(ii) $\operatorname{tr}(A \circ P_r) = (n - 1)S_{r+1}$.

Demonstração. Ver [3], p. 279. □

1.10 As r-ésimas curvaturas médias H_r

Sejam $\psi : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas e λ_i, $i = 1, \ldots, n$, as curvaturas principais em um ponto arbitrário de M^n. Definimos as r-ésimas curvaturas médias H_r de ψ, para $0 \leq r \leq n$, por

$$H_r = \frac{S_r}{\binom{n}{r}} = \frac{s_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\binom{n}{r}}. \tag{1.2}$$

Usando (1.2), segue que

$$H_1(p) = H(p) = \frac{\lambda_1(p) + \ldots + \lambda_n(p)}{n}$$

é a curvatura média de ψ em p, e

$$H_n(p) = \lambda_1(p) \ldots \lambda_n(p)$$

é a curvatura de Gauss-Kronecker de ψ em p. Por definição, adotamos $H_0(p) = 1$.

A seguir estabelecemos algumas desigualdades algébricas sobre as r-ésimas curvaturas médias H_r.

Denotemos por C_k, $k = 1, \ldots, n$, a componente conexa do conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n; s_k(x) > 0\}$$

contendo o vetor $a = (1, \ldots, 1)$. Note que cada vetor $(x_1, \ldots, x_n)$, com todas as suas componente maiores que zero encontra-se em cada C_k. O resultado a seguir é devido a Gärgind, ver [6].

Lema 1.10.1 (Gärdind). *São válidas as seguintes afirmações:*

(i) *Se* $k \leq r$, *então* $C_k \supset C_r$;

(ii) *Se* $x \in C_k$, *então*

$$s_k^{(k-1)/k}(x) \leq s_{k-1}(x),\ k = 1, \ldots, r;$$

Além disso, se $k \geq 2$, *a igualdade é válida se, e somente se,* x *for proporcional ao vetor* $a = (1, 1, \ldots, 1)$.

(iii) *Se* $x \in C_r$, *então*

$$s_r^{1/r} \leq s_1(x),\ x \in C_r.$$

Além disso, se $k \geq 2$, *a igualdade é válida se, e somente se,* x *for proporcional ao vetor* $a = (1, 1, \ldots, 1)$.

Como consequência, obtemos

Lema 1.10.2. *Seja* $\psi : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas, onde* M^n *é conexa. Suponhamos que existe um ponto de* M^n *onde todas as curvaturas principais* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *são positivas. Se* H_r *é maior que zero em todo ponto em* M^n, *então o mesmo vale para* H_k, $k = 1, \ldots, r-1$. *Além disso*

$$H_k^{(k-1)/k} \leq H_{k-1} \ \text{e}\ H_k^{1/k} \leq H,\ k = 1, \ldots, r. \tag{1.3}$$

Se $k \geq 2$, *então a igualdade em* (1.3) *ocorre apenas em pontos umbílicos.*

1.11 O operador L_r

Associado a cada P_r temos o operador diferencial linear de segunda ordem $L_r : \mathcal{D}(M) \to \mathcal{D}(M)$, que introduzimos a seguir.

Definição 1.11.1. Dada uma função diferenciável $f : M^n \to \mathbb{R}$ definimos o operador diferencial de segunda ordem L_r em M^n por:

$$L_r(f)(p) = \mathrm{tr}(P_r \circ \mathrm{Hess} f)(p).$$

Aqui, $r \in \mathbb{N}$ com $0 \leq r \leq n-1$.

Observação 1.11.2. Note que para $r = 0$, $L_0(f) = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f)) = \Delta f$ é o Laplaciano.

Lema 1.11.3. *Se $f, g \in \mathcal{D}(M)$, então*

$$L_r(fg) = fL_r g + gL_r f + 2\langle P_r(\nabla f), \nabla g\rangle. \tag{1.4}$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal de M^n. Temos

$$\begin{aligned}
L_r(fg) &= \operatorname{tr}(P_r \circ \operatorname{Hess}(fg)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla(fg), P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(f\nabla g + g\nabla f), P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i(f)\nabla g + f\nabla_{e_i}\nabla g + e_i(g)\nabla f + g\nabla_{e_i}\nabla f, P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\langle \nabla g, P_r(e_i(f)e_i)\rangle + f\langle \nabla_{e_i}\nabla g, P_r(e_i)] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} [\langle \nabla f, P_r(e_i(g)e_i)\rangle + g\langle \nabla_{e_i}\nabla f, P_r(e_i)] \\
&= \langle \nabla g, P_r(\nabla f)\rangle + f\operatorname{tr}(P_r \circ \operatorname{Hess}(g)) + \langle \nabla f, P_r(\nabla g)\rangle + g\operatorname{tr}(P_r \circ \operatorname{Hess}(f)) \\
&= fL_r g + gL_r f + 2\langle P_r(\nabla f), \nabla g\rangle,
\end{aligned}$$

pois P_r é auto-adjunta. $\square$

O objetivo agora é demonstrar que, para imersões em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ ou $\mathbb{H}^{n+1}$, operador L_r pode ser escrito da forma

$$L_r(f) = \operatorname{div}(P_r(\nabla f)).$$

Isso será provado nas proposições a seguir.

Proposição 1.11.4. *Sejam $\Sigma^n \in \bar{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana e $T : T\Sigma \to T\Sigma$ um operador linear auto-adjunto. Defina o operador*

$$L(f) = \operatorname{tr}(T \circ \operatorname{Hess} f).$$

Então

$$L(f) = \operatorname{div}(T(\nabla f))$$

se, e somente se,

$$\operatorname{tr}(X \mapsto T(\nabla_X Y)) = \operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X(TY)), \forall Y \in T\Sigma.$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal de $T\Sigma$. Assim,

$$\begin{aligned} L(f) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} T(\nabla f), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle T \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, T e_i \rangle. \end{aligned}$$

Como

$$e_i \langle \nabla f, T e_i \rangle = \langle \nabla_{e_i} \nabla f, T e_i \rangle + \langle \nabla f, \nabla_{e_i} T e_i \rangle,$$

temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_i} \nabla f, T e_i \rangle &= e_i \langle \nabla f, T e_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} T e_i \rangle \\ &= e_i \langle T \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} T e_i \rangle, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} L(f) &= \sum_{i=1}^{n} \left[e_i \langle T \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} T e_i \rangle \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\langle \nabla_{e_i} (T \nabla f), e_i \rangle + \langle T \nabla f, \nabla_{e_i} e_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} T e_i \rangle \right] \\ &= \operatorname{div}(T \nabla f) + \langle \nabla f, \sum_{i=1}^{n} \left(T(\nabla_{e_i} e_i) - \nabla_{e_i} T e_i \right) \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(X \mapsto T(\nabla_X Y) \right) &= \sum_{i=1}^{n} \langle T(\nabla_{e_i} Y), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} Y, T e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i \langle Y, T e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle Y, \nabla_{e_i} T e_i \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(X \mapsto \nabla_X (TY) \right) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} TY, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i \langle Y, T e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle Y, T(\nabla_{e_i} e_i) \rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{tr}\left(X \mapsto T(\nabla_X Y) \right) = \operatorname{tr}\left(X \mapsto \nabla_X (TY) \right), \forall Y \in T\Sigma$$

se, e somente se,

$$-\langle Y, \nabla_{e_i} T e_i \rangle = -\langle Y, T(\nabla_{e_i} e_i) \rangle,$$

isto é,

$$\langle Y, T(\nabla_{e_i} e_i) - \nabla_{e_i} T e_i \rangle = 0, \ \ \forall Y \in T\Sigma.$$

Portanto
$$T(\nabla_{e_i}e_i) = \nabla_{e_i}Te_i.$$
□

Proposição 1.11.5. *Seja* $\Sigma^n \subset \bar{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície. Se* $\bar{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ *ou* $\mathbb{S}^{n+1}$, *então*
$$L_r(f) = \mathrm{div}(P_r\nabla f).$$

Demonstração. Seja $\{e_i, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em $T\Sigma$ e geodésico em $p \in \Sigma$. Vamos mostrar, usando o método de indução finita, que

$$\mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X P_r Y)) = \mathrm{tr}\,(X \mapsto P_r(\nabla_X Y))\,, \forall Y \in T\Sigma.$$

Inicialmente, vamos verificar para $r = 0$. Como $P_0 = I$, temos que

$$\nabla_X IY = \nabla_X Y = I\nabla_X Y.$$

Usando a Proposição 1.11.4, segue o resultado. Suponhamos que vale para $(r-1)$, vamos mostrar que vale também para r. Note que

$$\mathrm{tr}\,(X \mapsto P_r(\nabla_X e_j)) = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i}e_j), e_i\rangle = 0,$$

pois o referencial é geodésico. Como

$$P_r(A) = S_r(A)I - AP_{r-1}(A),$$

vamos mostrar que
$$\mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X P_r e_j)) = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X P_r e_j)) &= \mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X(S_r(A)I - AP_{r-1}(A))) \\ &= \mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X(S_r(A)I)(e_j)) - \mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X(AP_{r-1}(A))(\,e_j)).\end{aligned}$$

Como
$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X(S_r(e_j)) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}(S_r(e_j), e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle e_i(S_r)e_j + S_r\nabla_{e_i}e_j, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\langle e_i(S_r)e_j, e_i\rangle + S_r\langle\nabla_{e_i}e_j, e_i\rangle\right].\end{aligned}$$

Visto que o referencial é geodésico, obtemos

$$\mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X(S_r(e_j)) = \sum_{i=1}^{n}\langle e_i(S_r)e_j, e_i\rangle = e_j(S_r).$$

Portanto,

$$\mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X P_r e_j)) = e_j(S_r) - \mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X(AP_{r-1}(A))(\,e_j)).$$

Agora, devemos mostrar que

$$\mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X(AP_{r-1}(A))(\,e_j)) = e_j(S_r).$$

Usando a hipótese de indução, temos que

$$\mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X P_{r-1}Ae_j)) = \mathrm{tr}\,(X \mapsto P_{r-1}(\nabla_X Ae_j)) = \sum_{i=1}^{n}\langle P_{r-1}\nabla_{e_i}Ae_j, e_i\rangle.$$

Visto que o referencial é geodésico, temos

$$(\nabla_{e_j}A)(e_i) = (\nabla_{e_i}Ae_j) - A(\nabla_{e_j}e_i) = \nabla_{e_i}Ae_j.$$

Usando a equação de Codazzi (ver Corolário 1.7.11, p.20), obtemos

$$\nabla_{e_i}Ae_j = \nabla_{e_j}Ae_i.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(X \mapsto \nabla_X P_{r-1}Ae_j)) &= \sum_{i=1}^{n}\langle P_{r-1}\nabla_{e_i}Ae_j, e_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle P_{r-1}\nabla_{e_j}Ae_i, e_i\rangle.\end{aligned}$$

Considere agora uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ que diagonaliza A. Temos

$$Av_i = \lambda_i v_i \qquad \text{e} \qquad P_{r-1}v_i = S_{r-1}(\lambda_i)v_i,$$

onde

$$S_{r-1}(\lambda_i) = S_{r-1} - \lambda_i S_{r-2}(\lambda_i) = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{r-1}} \lambda_{i_1}\cdot\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_{r-1}}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(P_{r-1}\nabla_{e_j}A) &= \sum_{i=1}^{n}\langle (P_{r-1}\nabla_{e_j}A)v_i, v_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle P_{r-1}(v_i), \nabla_{e_j}Av_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle (S_{r-1}(\lambda_i)v_i, \nabla_{e_j}(Av_i) - A(\nabla_{e_j}v_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(\lambda_i)\left[\langle v_i, \nabla_{e_j}(Av_i)\rangle - \langle \lambda_i v_i, \nabla_{e_j}v_i\rangle\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(\lambda_i)\left[\langle v_i, e_j(\lambda_i)v_i + \lambda_i\nabla_{e_j}v_i - \lambda_i\nabla_{e_j}v_i\rangle\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(\lambda_i)\langle v_i, e_j(\lambda_i)v_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(\lambda_i)e_j(\lambda_i).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
e_j(S_r) &= e_j\left(\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r}\lambda_{i_1}\cdot\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_r}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_j(\lambda_i)\left(\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{r-1}}\lambda_{i_1}\cdot\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_{r-1}}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_j(\lambda_i)S_{r-1}(\lambda_i).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathrm{tr}\,(X\mapsto \nabla_X(P_{r-1}A)(e_j)) = e_j(S_r),$$

e, portanto,

$$\mathrm{tr}\,(X\mapsto \nabla_X P_{r-1}e_j) = 0.$$

Para concluir a prova, basta observar que para qualquer operador,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,(X\mapsto \nabla_X TY) &= \sum_{i=1}^{n}\langle e_i, \nabla_{e_i}TY\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\langle e_i, \nabla_{e_i}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j Te_j\right)\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle e_i, e_i(y_j)Te_j + y_j\nabla_{e_i}Te_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left[\langle e_i, e_i(y_j)Te_j\rangle + \langle e_i, y_j\nabla_{e_i}Te_j\rangle\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\langle \nabla y_i, Te_j\rangle + y_j\mathrm{tr}\,(X\mapsto \nabla_X Te_j)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(X \mapsto T(\nabla_X Y)) &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, T(\nabla_{e_i} Y)\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_i, e_i(y_j)Te_j + y_j T(\nabla_{e_i} e_j)\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\langle e_i, e_i(y_j)Te_j\rangle + \langle e_i, y_j T(\nabla_{e_i} e_j)\rangle\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla y_i, Te_j\rangle + y_j \operatorname{tr}(X \mapsto T(\nabla_X e_j)) .
\end{aligned}$$

Assim, se $\operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X Te_j) = \operatorname{tr}(X \mapsto T(\nabla_X e_j))$, para todo j, então

$$\operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X TY) = \operatorname{tr}(X \mapsto T(\nabla_X Y)),$$

para todo $y \in T\Sigma$. Usando a Proposição 1.11.4, concluímos que

$$L_r(f) = \operatorname{div}(P_r \nabla f).$$

□

Proposição 1.11.6. *Se $\psi : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície imersa em uma variedade Riemanniana M^{n+1} de curvatura seccional $c \in \{-1, 0, 1\}$ e N é um campo normal unitário de vetores sobre M^n, então*

$$L_r\langle \psi, a\rangle = \frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}\left(H_{r+1}\langle N, a\rangle - cH_r\langle \psi, a\rangle\right),$$

para $r = 0, \dots, n-1$.

Demonstração. Sejam $\bar{\nabla}_{e_i} e_j$ conexão de $\mathbb{R}_1^{n+2}$ (ver discussão no próximo capítulo), $p \in M^n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico local em p. Como $\{N(p), \psi(p), e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}_1^{n+2}$, podemos escrever

$$\bar{\nabla}_{e_i} e_j = c\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, \psi(p)\rangle \psi(p) + \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N(p)\rangle N(p) + \sum_{k=1}^{n} \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, e_k(p)\right\rangle e_k(p).$$

Além disso, como o referencial é geodésico, temos $\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, e_k\rangle = \langle \nabla_{e_i} e_j, e_k\rangle = 0$ e, portanto,

$$\bar{\nabla}_{e_i} e_j = c\langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, \psi(p)\rangle \psi(p) + \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_j, N(p)\rangle N(p).$$

Usando a definição de L_r, temos

$$
\begin{aligned}
L_r\langle\psi,a\rangle &= \operatorname{tr}(P_r \circ \operatorname{Hess}\langle\psi,a\rangle)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}\nabla\langle\psi,a\rangle, P_r(e_i)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}\nabla\langle\psi,a\rangle, \sum_{j=1}^{n}\langle P_r(e_i),e_j\rangle e_j\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}\nabla\langle\psi,a\rangle, e_j\rangle\langle P_r(e_i),e_j\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}\nabla\langle\psi,a\rangle, e_j\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_i\langle\nabla\langle\psi,a\rangle, e_j\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_i\langle e_j\langle\psi,a\rangle e_j, e_j\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_i e_j\langle\psi,a\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_i\left(\langle\bar{\nabla}_{e_j}\psi,a\rangle\right)\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_i\langle e_j,a\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}e_j,a\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle\left(\langle\bar{\nabla}_{e_i}e_j,N\rangle N + c\langle\bar{\nabla}_{e_i}e_j,\psi\rangle\psi\right),a\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}e_j,N\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\langle N,a\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}e_j,\psi\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle c\langle\psi,a\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} -\langle e_j,\bar{\nabla}_{e_i}N\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\langle N,a\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}e_j,\psi\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle c\langle\psi,a\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} -\langle e_j,\left(\bar{\nabla}_{e_i}N\right)^{T} + \left(\bar{\nabla}_{e_i}N\right)^{N}\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\langle N,a\rangle\\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}e_j,\psi\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle c\langle\psi,a\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n} -\langle e_j,\left(\bar{\nabla}_{e_i}N\right)^{T}\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\langle N,a\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}e_j,\psi\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle c\langle\psi,a\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle e_j,-\left(\bar{\nabla}_{e_i}N\right)^{T}\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\langle N,a\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}e_j,\psi\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle c\langle\psi,a\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle e_j,A(e_i)\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\langle N,a\rangle + \sum_{i,j=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_i}e_j,\psi\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle c\langle\psi,a\rangle.
\end{aligned}
$$

Visto que, usando o Lema 1.9.8, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \langle A(e_i), e_j\rangle\langle e_j, P_r(e_i)\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle A(e_i), P_r(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle A\circ P_r(e_i), e_i\rangle \\
&= \mathrm{tr}\,(A\circ P_r) \\
&= (n+1)S_{r+1},
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
0 &= e_i\langle\psi, e_j\rangle \\
&= \langle\bar{\nabla}_{e_i}\psi, e_j\rangle + \langle\psi, \bar{\nabla}_{e_i}e_j\rangle \\
&= \langle e_i, e_j\rangle + \langle\psi, \bar{\nabla}_{e_i}e_j\rangle \\
&= \delta_{ij} + \langle\psi, \bar{\nabla}_{e_i}e_j\rangle,
\end{aligned}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
L_r\langle\psi, a\rangle &= (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle + c\sum_{i,j=1}^{n}(-\delta_{ij})\langle e_j, P_r(e_i)\rangle\langle\psi, a\rangle \\
&= (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle - c\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, P_r(e_i)\rangle\langle\psi, a\rangle \\
&= (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle - c(n-r)S_r\langle\psi, a\rangle,
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

pois, usando novamente o Lema 1.9.8,

$$
\sum_{i=1}^{n}\langle e_i, P_r(e_i)\rangle = \mathrm{tr}(P_r) = (n-r)S_r.
$$

Por outro lado, visto que

$$
S_r = \binom{n}{r}H_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}H_r \quad \text{e} \quad S_{r+1} = \binom{n}{r+1}H_{r+1} = \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}H_{r+1},
$$

temos

$$
\begin{aligned}
(n-r)S_r &= (n-r)\frac{n!}{r!\,(n-r)!}H_r \\
&= (n-r)\frac{n!}{r!\,(n-r)(n-r-1)!}H_r, \\
&= \frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}H_r
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}(r+1)S_{r+1} &= (r+1)\frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}H_{r+1}\\ &= (n+1)(r+1)\frac{n!}{(r+1)r!\,(n-r-1)!}H_{r+1}\\ &= \frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}H_{r+1}.\end{aligned}$$

Substituindo os valores de $(n-r)S_r$ e $(r+1)S_{r+1}$ em (1.5), obtemos

$$\begin{aligned}L_r\langle\psi, a\rangle &= (r+1)S_{r+1}\langle N, a\rangle - c(n-r)S_r\langle\psi, a\rangle\\ &= \frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}H_{r+1}\langle N, a\rangle - c\frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}H_r\langle\psi, a\rangle\\ &= \frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}\left(H_{r+1}\langle N, a\rangle - cH_r\langle\psi, a\rangle\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$L_r\langle\psi, a\rangle = \frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}\left(H_{r+1}\langle N, a\rangle - cH_r\langle\psi, a\rangle\right). \tag{1.6}$$

□

Proposição 1.11.7 (Fórmula de Minkowski). *Se $\psi : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta e imersa, onde $\bar{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{S}^{n+1}(c)$, $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ são as formas espaciais de curvatura secional $c \in \mathbb{R}$, então*

$$\int_M \left(H_{r+1}\langle N, a\rangle - cH_r\langle\psi, a\rangle\right) dA = 0, \tag{1.7}$$

para cada $r = 0, \ldots, n-1$, e $a \in \mathbb{R}^{n+2}_1$, arbitrário.

Demonstração. Usando a Proposição 1.11.5, obtemos

$$L_r\langle\psi, a\rangle = \operatorname{div}(P_r(\nabla\langle\psi, a\rangle))$$

para imersões em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}(c)$ e $\mathbb{H}^{n+1}(c)$. Integrando (1.6) e usando o teorema da divergência, temos

$$\begin{aligned}0 &= \int_M \operatorname{div}(P_r(\nabla\langle\psi, a\rangle))dA\\ &= \int_M \frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}\left(H_{r+1}\langle N, a\rangle - cH_r\langle\psi, a\rangle\right) dA.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_M \left(H_{r+1}\langle N, a\rangle - cH_r\langle\psi, a\rangle\right) dA = 0.$$

□

Capítulo 2

Os resultados de Montiel e Ros

O objetivo deste capítulo é provar os teoremas de Montiel e Ros mencionados na introdução e que generalizam o teorema clássico de Alexandrov.

2.1 Caso Euclidiano

Seja $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e mergulhada. Uma hipersuperfície paralela $\psi_t : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é a hipersuperfície construída pela translação de cada ponto $\psi(p)$ de $\psi(M^n)$ de uma distância fixa t ao longo da reta normal a $\psi(M^n)$ em $\psi(p)$. Vemos que

$$\psi_t(p) = \exp_{\psi(p)}(tN(p)) = \psi(p) + tN(p) \tag{2.1}$$

onde exp é a aplicação exponencial de $\mathbb{R}^{n+1}$. Observe que

$$\left\langle \frac{d}{dt}\psi_t(p), \frac{d}{dt}\psi_t(p) \right\rangle = 1.$$

Proposição 2.1.1. *Se $p \in M^n$ e $\{e_1(p) = e_1, \ldots, e_n(p) = e_n\} \subset T_pM$ é uma base ortonormal que diagonaliza o operador A, então*

$$d\psi_t(p)e_i = (1 - t\lambda_i)\, e_i, \tag{2.2}$$

onde λ_i, $i = 1, \ldots, n$, são as curvaturas principais de M.

Demonstração. Sejam $\alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$, $i = 1, \ldots, n$, curvas suaves tais que $\alpha_i(0) = p$ e $\alpha_i'(0) = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Assim,

$$\begin{aligned} d\psi_t(p)e_i &= \frac{d}{ds}\psi_t(\alpha_i(s))\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}\Big(\alpha_i(s) + tN(\alpha_i(s))\Big)\Big|_{s=0} \\ &= \alpha_i'(0) + \frac{d}{ds}\Big(N(\alpha_i(s))\Big)\Big|_{s=0} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e_i + t\bar{\nabla}_{e_i} N \\
&= e_i - tA(e_i) \\
&= e_i - t\lambda e_i \\
&= (1 - t\lambda_i)e_i,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$d\psi_t(p)e_i = (1 - t\lambda_i)e_i, \; i = 1 \ldots, n. \tag{2.3}$$

□

Se M é uma superfície compacta e mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$, então M é a fronteira de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Usando a Proposição 2.1.1, temos

$$\langle d\psi_t(p)e_i, d\psi_t(p)e_j \rangle = (1 - t\lambda_i)(1 - t\lambda_j)\delta_{ij}. \tag{2.4}$$

Além disso,

$$\left\langle \frac{d}{dt}\psi_t(p), d\psi_t(p)e_i \right\rangle = 0.$$

Portanto, a matriz da métrica de $\mathbb{R}^{n+1}$ nas coordenadas de Fermi é

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1 - t\lambda_1)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1 - t\lambda_n)^2 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, o elemento de volume dV de $\mathbb{R}^{n+1}$, nas coordenadas de Fermi, é dado por

$$dV = \sqrt{\det \sigma} dt dA = (1 - t\lambda_1) \cdots (1 - t\lambda_n) dt dA.$$

Usando a Proposição 1.8.7, p. 21, podemos escrever a integral de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ da forma

$$\int_\Omega f dV = \int_M \int_0^{c(p)} f\left(\exp_p(tN(p))\right)(1 - t\lambda_1(p)) \cdots (1 - t\lambda_n(p)) dt dA, \tag{2.5}$$

onde $c(p)$ é a distância ao ponto focal mínimo de $p \in M$.

Lema 2.1.2. *Se $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície e $\psi_t : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície paralela, então os pontos focais de ψ ao longo de ψ_t são da forma $\psi_t\left(\frac{1}{\lambda_i(p)}\right)$, onde os $\lambda_i(p)$ são as curvaturas principais de ψ em $p \in M^n$.*

Demonstração. Um ponto $q = \psi_t(p)$ é um ponto focal de ψ ao longo de ψ_t se, e somente se, $d\psi_t(v) = 0$ para algum $v \in T_pM$, $|v| = 1$. Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$ uma curva suave tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Temos

$$\begin{aligned} 0 = d\psi_t(p)v &= \frac{d}{ds}\Big(\psi_t(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\Big(\psi(p) + tN(p)\Big)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}\Big(\psi(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} + t\frac{d}{ds}\Big(N(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} \\ &= v + t\bar{\nabla}_v N = v - tA(v), \end{aligned}$$

onde aqui estamos identificando M com $\phi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Portanto, $d\psi_t(v) = 0$ se, e somente se,

$$A(v) = \frac{1}{t}v.$$

Observe que t não pode ser zero, pois $d\psi(v) \neq 0$. Portanto, $q = \psi_t(p)$ é ponto focal de ψ ao longo de ψ_t se, somente se, $\frac{1}{t}$ é autovalor de A, ou seja, se, e somente se, $\frac{1}{t}$ é uma curvatura principal de ψ em p. □

A seguir, apresentaremos algumas igualdades integrais que são essenciais para a demonstração do resultado principal deste capítulo.

Proposição 2.1.3 (Fórmula de Minkwoski)**.** *Se $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão de uma hipersuperfície compacta M^n no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$ e N um campo de vetores normal unitário sobre M^n, então*

$$\int_M (H_r + H_{r+1}\langle\psi, N\rangle)dA = 0,$$

para $r = 0, \dots, n-1$.

Demonstração. Seja $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Usando o Lema 1.11.3, temos

$$\begin{aligned} L_r|\psi|^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} L_r\langle\psi, E_i\rangle^2 \\ &= 2\sum_{i=1}^{n+1}\langle\psi, E_i\rangle L_r\langle\psi, E_i\rangle + 2\sum_{i=1}^{n+1}\langle P_r(\nabla\langle\psi, E_i\rangle), \nabla\langle\psi, E_i\rangle\rangle\,. \end{aligned}$$

Visto que, para $\{e_1, \dots, e_n\}$ referencial ortonormal de M^n,

$$\begin{aligned} \nabla\langle\psi, E_i\rangle &= \sum_{j=1}^{n} e_j\langle\psi, E_i\rangle e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\langle\bar{\nabla}_{e_j}\psi, E_i\rangle e_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\langle e_j, E_i\rangle e_j, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\langle P_r(\nabla\langle\psi,E_i\rangle),\nabla\langle\psi,E_i\rangle\rangle &= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j,k=1}^{n}\langle P_r(\langle e_j,E_i\rangle e_j),\langle e_k,E_i\rangle e_k\rangle\\ &= \sum_{j,k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n=1}\langle e_j,E_i\rangle\langle E_i,e_k\rangle\langle P_r(e_j),e_k\rangle\\ &= \sum_{j,k=1}^{n}\langle e_j,e_k\rangle\langle P_r(e_j),e_k\rangle\\ &= \sum_{j,k=1}^{n}\delta_{jk}\langle P_r(e_j),e_k\rangle\\ &= \sum_{j=1}^{n}\langle P_r(e_j),e_j\rangle\\ &= \operatorname{tr}(P_r).\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.9.8 e a definição de S_r, obtemos

$$\operatorname{tr}(P_r) = (n-r)S_r = \frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}H_r.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n+1}\langle P_r(\nabla\langle\psi,E_i\rangle),\nabla\langle\psi,E_i\rangle\rangle = \frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}H_r.$$

Visto que, usando a Proposição 1.11.6, para o caso $c=0$, vale

$$L_r\langle\psi,E_i\rangle = \frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}H_{r+1}\langle N,E_i\rangle,$$

temos

$$\begin{aligned}L_r|\psi|^2 &= 2\sum_{i=1}^{n+1}\langle\psi,E_i\rangle\left(\frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}H_{r+1}\langle N,E_i\rangle\right)+2\frac{n!}{r!\,(n-r-1)!}H_r\\ &= \frac{2n!}{r!\,(n-r-1)!}\left[H_r+H_{r+1}\langle\psi,N\rangle\right].\end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.11.5, obtemos

$$\operatorname{div}(P_r(\nabla|\psi|^2)) = \frac{2n!}{r!\,(n-r-1)!}\left[H_r+H_{r+1}\langle\psi,N\rangle\right].$$

Integrando e usando o Teorema da divergência, temos

$$\int_M [H_r+H_{r+1}\langle\psi,N\rangle]dA = 0.$$

□

Lema 2.1.4. *Se $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta, mergulhada, Ω é um* *domínio compacto em $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\partial\Omega = M^n$ e N é o campo normal unitário relativo a Ω apontando para dentro, então*

$$-\int_M \langle \psi, N \rangle dA = (n+1)V(\Omega). \tag{2.6}$$

Demonstração. Se x denota o vetor posição em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\bar{\Delta}$ é o Laplaciano Euclidiano, temos

$$\bar{\Delta}|x|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial^2 |x|^2}{\partial x_i^2} = 2(n+1).$$

Assim, usando o teorema da divergência, obtemos

$$\begin{aligned} -\int_M \langle \psi, N \rangle dA &= \frac{1}{2}\int_M \langle 2\psi, -N \rangle dA \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}|x|^2\right) dV \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \bar{\Delta}|x|^2 dV \\ &= (n+1)V(\Omega). \end{aligned}$$

□

Iremos provar a seguir uma desigualdade integral para hipersuperfícies compactas mergulhadas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, onde a igualdade caracteriza as esferas.

Proposição 2.1.5 (Desigualdade de Montiel e Ros, (1991))**.** *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície mergulhada e compacta no espaço Euclidiano. Se a curvatura média H de ψ, relativo à normal interna N, é positiva em todo ponto sobre M^n, então*

$$\int_M \frac{1}{H} dA \geq (n+1)V(\Omega),$$

onde $V(\Omega)$ é a medida de Lebesgue do domínio compacto determinado por M^n. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n é uma esfera.

Demonstração. Escolhendo a função $f(p) = 1$ para todo ponto $p \in \Omega$ na identidade (2.5), temos

$$V(\Omega) = \int_\Omega 1 dV = \int_M \int_0^{c(p)} (1 - \lambda_1 t) \dots (1 - \lambda_n t)\, dt dA. \tag{2.7}$$

Para $p \in M^n$, o primeiro ponto focal da geodésica normal $\exp_p(tN(p))$ começando em p é encontrado à distância $\dfrac{1}{\lambda_{max}}$, onde λ_{max} é a maior das curvaturas principais em p (ver Lema 2.1.4). Além disso, observe que os pontos focais nunca acontecem antes de um ponto mínimo, tendo em vista que após os pontos focais as geodésicas não minimizam mais as distâncias a M. Assim,

$$c(p) \leq \frac{1}{\lambda_{\max}} \leq \frac{1}{H(p)}. \tag{2.8}$$

Dessa forma, $t \in [0, c(p))$, então

$$1 - t\lambda_i \geq 1 - tc(p) \geq 1 - \lambda_{\max}\lambda_1 \geq 0, \ i = 1, \ldots, n.$$

Portanto,

$$[(1 - t\lambda_1) \ldots (1 - t\lambda_n)]^{1/n} \leq \frac{(1 - t\lambda_1) + \ldots + (1 - t\lambda_n)}{n}.$$

Isto implica

$$\begin{aligned}
(1 - t\lambda_1) \ldots (1 - t\lambda_n) &\leq \left[\frac{(1 - t\lambda_1) + \ldots + (1 - t\lambda_n)}{n}\right]^n \\
&= \left[\frac{n - t\,(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)}{n}\right]^n \\
&= \left[1 - \frac{t\,(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)}{n}\right]^n = (1 - tH)^n.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Observe que a igualdade em (2.9) é verificada se, e somente se,

$$(1 - t\lambda_1) = (1 - t\lambda_2) = \ldots = (1 - t\lambda_n)$$

isto é, se, e somente e, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$, ou seja, se, e somente se, os pontos são umbílicos. Substituindo (2.8), (2.9) em (2.7), obtemos

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \int_M \int_0^{c(p)} (1 - t\lambda_1) \ldots (1 - t\lambda_n)\, dtdA \leq \int_M \int_0^{1/H(p)} (1 - tH)^n dtdA \\
&= \int_M \left[\frac{-(1 - tH)^{n+1}}{(n+1)H}\right]_0^{1/H} dA = \int_M \frac{-1}{(n+1)H} \left[(1 - tH)^{n+1}\right]_0^{1/H} dA \\
&= \frac{1}{n+1} \int_M \frac{1}{H} dA,
\end{aligned}$$

isto é,

$$V(\Omega)(n+1) \leq \int_M \frac{1}{H} dA, \tag{2.10}$$

e vale a igualdade se, e somente se, a hipersuperfície é totalmente umbílica. □

Com os resultados expostos, estamos em condições de obter o principal resultado desta seção, a saber,

Teorema 2.1.6 (Montiel e Ros, (1991))**.** *Seja M^n uma hipersuperfície mergulhada, compacta e sem fronteira no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Se H_r é constante para algum $r = 1, \ldots, n$, então M^n é uma esfera.*

Demonstração. Visto que, por hipótese, M^n é compacta, existe um ponto elíptico $p \in M^n$ isto é, um ponto tal que todas as curvaturas principais relativas à normal interna são positivas em p:

$$\lambda_1(p) > 0, \ldots, \lambda_n(p) > 0.$$

Portanto, H_r é uma constante positiva e usando o Lema 1.10.2, p. 24, obtemos $0 < H_r^{1/r} \leq H$, isto é, a curvatura média é positiva. Usando a Proposição 2.1.5, temos

$$\begin{aligned} V(\Omega)(n+1) &\leq \int_M \frac{1}{H} dA \leq \int_M \frac{1}{H_r^{1/r}} dA \\ &= \frac{1}{H_r^{1/r}} \int_M 1 dA = \frac{1}{H_r^{1/r}} A. \end{aligned}$$

Assim

$$(n+1) H_r^{1/r} V(\Omega) \leq A, \tag{2.11}$$

onde A é a medida Riemanniana de M^n e a igualdade ocorre se, e somete se, M^n é umbílica. O Lema 1.10.2 fornece

$$H_{r-1} \geq H_r^{(r-1)/r},$$

o que, junto com a Proposição 2.1.3, implica

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M (H_{r-1} + H_r \langle \psi, N \rangle) dA \\ &\geq \int_M (H_r^{(r-1)/r} + H_r \langle \psi, N \rangle) dA \\ &= \int_M (H_r^{(r-1)/r} + H_r^{(r-1)/r} H_r^{1/r} \langle \psi, N \rangle) dA \\ &= H_r^{(r-1)/r} \int_M (1 + H_r^{1/r} \langle \psi, N \rangle) dA. \end{aligned}$$

Como H_r é uma constante positiva, usando o Lema 2.1.4, temos

$$A - (n+1) H_r^{1/r} V(\Omega) = \int_M (1 + H_r^{1/r} \langle \psi, N \rangle) dA \leq 0$$

isto é,

$$(n+1) H_r^{1/r} V(\Omega) \geq A. \tag{2.12}$$

De (2.11) e (2.12) segue que

$$(n+1) H_r^{1/r} V(\Omega) = A,$$

de onde M^n é totalmente umbílica e, portanto, uma esfera.

□

2.2 Caso esférico

Seja $\mathbb{R}^{n+2}$ o espaço Euclidiano $(n+1)$-dimensional e considere a esfera unitária $(n+1)$-dimensional de $\mathbb{R}^{n+2}$, com a métrica Riemanniana induzida da métrica canônica de $\mathbb{R}^{n+2}$:

$$\mathbb{S}^{n+1} = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+2}; |x|^2 = 1\right\}.$$

Seja $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão de uma hiperfuperfície compacta orientável na esfera unitária. Podemos ver ψ como uma aplicação $\psi : M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$ com $|\psi|^2 = 1$. Da mesma forma, um campo normal unitário correspondendo a ψ pode ser considerado como uma aplicação $N : M^n \to \mathbb{R}^{n+2}$, com $|N|^2 = 1$ e $\langle \psi, N\rangle = 0$, $\forall p \in M^n$.

Lema 2.2.1. *Todas as geodésicas de $\mathbb{S}^{n+1}$ são da forma*

$$\gamma(t) = (\cos(t))\gamma(0) + (\operatorname{sen}(t))\gamma'(0).$$

Além disso, $\gamma(0)\perp\gamma'(0)$ em $\mathbb{R}^{n+2}$.

Demonstração. Ver Teorema 2.1.4 e 2.1.5, pp. 37-38 de [14]. □

Uma hipersuperfície paralela $\psi_t : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é a hipersuperfície construída pela translação de cada ponto $\psi(p)$ de $\psi(M^n)$ de uma distância fixa t ao longo da geodésica normal a $\psi(M^n)$ em $\psi(p)$. Usando o Lema 2.2.1, vemos que

$$\psi_t(p) = \exp_{\psi(p)}(tN(p)) = \cos(t)\psi(p) + \operatorname{sen}(t)N(p). \tag{2.13}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt}\psi_t(p), \frac{d}{dt}\psi_t(p)\right\rangle &= \langle -\operatorname{sen}(t)\psi(p) + \cos(t)N(p), -\operatorname{sen}(t)\psi(p) + \cos(t)N(p)\rangle \\ &= \operatorname{sen}^2(t)|\psi(p)|^2 - 2\operatorname{sen}(t)\cos(t)\langle\psi(p), N(p)\rangle + \cos^2(t)|N(p)|^2 \\ &= \operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1.\end{aligned}$$

Proposição 2.2.2. *Se $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície imersa, $p \in M^n$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM que diagonaliza o operador A, então*

$$d\psi_t(p)e_i = (\cos(t) - \lambda_i \operatorname{sen}(t))\, e_i. \tag{2.14}$$

Demonstração. Seja $\alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$ uma curva suave, tal que, $\alpha_i(0) = p$ e $\alpha_i'(0) = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Temos

$$
\begin{aligned}
d\psi_t(p)e_i &= \frac{d}{ds}\psi_t(\alpha_i(s))\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\big(\cos(t)\psi(\alpha_i(s)) + \operatorname{sen}(t)\cdot N(\alpha_i(s))\big)\Big|_{s=0} \\
&= \cos(t)\alpha_i'(0) + \operatorname{sen}(t)\frac{d}{ds}N(\alpha_i(s))\Big|_{s=0} \\
&= \cos(t)e_i + \operatorname{sen}(t)\bar{\nabla}_{\alpha'(0)}N = \cos(t)e_i - \operatorname{sen}(t)A(e_i) \\
&= (\cos(t) - \lambda_i \operatorname{sen}(t))e_i,
\end{aligned}
$$

onde aqui identificamos M com $\psi(M) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ e λ_i são as curvaturas principais de ψ, $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Usando a Proposição 2.2.2, obtemos,

$$\langle d\psi_t(p)e_i, d\psi_t(p)e_j\rangle = (\cos(t) - \lambda_i \operatorname{sen}(t))(\cos(t) - \lambda_j \operatorname{sen}(t))\delta_{ij}. \tag{2.15}$$

Observe ainda que

$$\left\langle \frac{d}{dt}\psi_t(p), d\psi_t(p)e_i \right\rangle = 0.$$

Se $\psi : M \to \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta e mergulhada, então M é a fronteira de um domínio compacto $\Omega \subset \mathbb{S}^{n+1}$. Escrevendo a métrica de $\mathbb{S}^{n+1}$ nas coordenadas de Fermi, obtemos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\cos(t) - \lambda_1 \operatorname{sen}(t))^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\cos(t) - \lambda_n \operatorname{sen}(t))^2 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, o elemento de volume dV de $\mathbb{S}^{n+1}$ é dado por

$$dV = \sqrt{\det \sigma}\, dt dA = (\cos(t) - \lambda_1 \operatorname{sen}(t)) \ldots (\cos(t) - \lambda_n \operatorname{sen}(t))\, dt dA.$$

Além disso, usando a Proposição 1.8.7, p.21, a integral de qualquer função integrável $f : \Omega \subset \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita da forma

$$\int_\Omega f dV = \int_M \int_0^{c(p)} f\left(\exp_p(tN(p))\right)(\cos(t) - \lambda_1(p)\operatorname{sen}(t)) \ldots (\cos(t) - \lambda_n(p)\operatorname{sen}(t)) dt dA, \tag{2.16}$$

onde $c(p)$ é a distância ao ponto focal mínimo de $p \in M$.

Lema 2.2.3. *Se $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície, $p \in M^n$ e $\psi_t : M \to \mathbb{S}^{n+1}$ é sua família de hipersuperfícies paralelas, então os pontos focais de ψ ao longo de ψ_t são da forma $\psi_t(\operatorname{arc}\cot(\lambda_i(p)))$, onde os $\lambda_i(p)$ são as curvaturas principais de ψ em p.*

Demonstração. Um ponto $q = \psi_{t_0}(p)$ é um ponto focal de ψ ao longo de ψ_{t_0} se, e somente se $d\psi_{t_0}(v) = 0$ para algum $v \in T_qM^n$, $v \neq 0$.

Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$ uma curva suave tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Temos

$$\begin{aligned}
0 = d\psi_t(p)v &= \frac{d}{ds}\Big(\psi_t(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\Big(\cos(t)\psi(\alpha(s)) + \operatorname{sen}(t)N(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\Big((\cos(t))\psi(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} + \frac{d}{ds}\Big((\operatorname{sen}(t))N(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} \\
&= (\cos(t))\frac{d}{ds}\Big(\psi(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} + (\operatorname{sen}(t))\frac{d}{ds}\Big(N(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} \\
&= (\cos(t))\alpha'(0) + (\operatorname{sen}(t))\bar{\nabla}_{\alpha'(0)}N \\
&= (\cos(t))v - (\operatorname{sen}(t))A(v),
\end{aligned}$$

onde estamos identificando M com $\psi(M) \subset \mathbb{S}^{n+1}$. Portanto, $d\psi_t(v) = 0$ se, e somente se

$$A(v) = (\cot(t))v.$$

Como M^n é suave, $\cot(t)$ está bem definida. Logo $q = \psi_t(p)$ é ponto focal de ψ se, e somente se, $\cot(t)$ é um autovalor de A, isto é,

$$t = \operatorname{arc}\cot(\lambda_i), \quad \text{para algum} \quad i.$$

□

A seguir, apresentaremos algumas igualdades integrais que são análogas às fórmulas de Minkowski para o caso Euclidiano.

Lema 2.2.4. *Se $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta, mergulhada, Ω é um domínio compacto em $\mathbb{S}^{n+1}$ tal que $\partial\Omega = M^n$, e N é o campo normal unitário interno relativo a Ω, então*

$$\int_M \langle N, a\rangle dA = \int_M \int_0^{c(p)} (n+1)\langle \cos(t)\psi(p) + \operatorname{sen}(t)N(p), a\rangle \prod_{i=1}^{n}(\cos(t) - \lambda_i \operatorname{sen}(t))dtdA. \tag{2.17}$$

Demonstração. Se x é o vetor posição dos pontos de $\mathbb{S}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$, $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ e $\bar{\Delta}$ o Laplaciano de $\mathbb{S}^{n+1}$, então

$$\bar{\Delta}\langle x, a\rangle = (n+1)\langle x, a\rangle. \tag{2.18}$$

Integrando (2.18) em Ω e usando o teorema da divergência, temos

$$\int_M \langle N, a\rangle dA = \int_\Omega (n+1)\langle x, a\rangle dV, \tag{2.19}$$

onde N é escolhido para ser o normal interno em relação a Ω. Usando (2.16), obtemos

$$\begin{aligned}(n+1)\int_M \langle x, a\rangle dV = \int_M \int_0^{c(p)} &(n+1)\langle \cos(t)\psi(p) + \operatorname{sen}(t)N(p), a\rangle \times \\ &\times \prod_{i=1}^{n}(\cos(t) - \lambda_i \operatorname{sen}(t))dtdA.\end{aligned}$$

Usando (2.19), obtemos

$$\int_M \langle N, a\rangle dA = \int_M \int_0^{c(p)} (n+1)\langle \cos(t)p + \operatorname{sen}(t)N(p), a\rangle \prod_{i=1}^{n}(\cos(t) - \lambda_i \operatorname{sen}(t))dtdA. \quad (2.20)$$

□

Na Proposição a seguir provaremos uma desigualdade integral para hipersuperfícies mergulhadas na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ com a igualdade caracterizando as hipersuperfícies umbílicas, mas antes precisaremos de um lema técnico.

Lema 2.2.5. *Se $x \in (0, \pi/2)$ então*

$$\cos(\operatorname{arc}\cot(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad e \quad \operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cot(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Demonstração. De fato, tome

$$\cot(y) = x,$$

então

$$\operatorname{arc}\cot(x) = y.$$

Vamos escrever $\cos(x)$ em termos de y. Visto que

$$1 + \frac{1}{\cot^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y},$$

e $x \in (0, \pi/2)$ obtemos

$$\cos(y) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

isto é

$$\cos(\operatorname{arc}\cot x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Isso implica que

$$\operatorname{sen}(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

isto é,

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cot x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

□

Denotemos, a função positiva $\rho : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\rho(u) = \int_0^{\operatorname{arc}\cot(u)} (\cos(t) - u\operatorname{sen}(t))^n \cos(t)dt. \tag{2.21}$$

Proposição 2.2.6. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta mergulhada na esfera unitária, contida no hemisfério aberto com centro $a \in \mathbb{S}^{n+1}$. Se a r-ésima curvatura média H_r, para algum $r = 1, \dots, n$ com relação ao normal interior N satisfaz $H_r > 0$ em todos os pontos de M^n, então*

$$\int_M (\langle \psi, a\rangle + H_r^{1/r}\langle N, a\rangle)\rho(H_r^{1/r})dA \geq 0.$$

A igualdade vale se, e somente se, M^n é uma hiperesfera geodésica.

Demonstração. Visto que, M^n é compacta e está no hemisfério aberto, existe um ponto $p \in M^n$ onde todas as curvaturas principais são positivas. Como, por hipótese, $H_r > 0$ em M^n, para algum $r = 1, \dots, n$, pelo Lema 1.10.2, temos

$$0 < H_r^{1/r} < H.$$

Usando o Lema 2.2.3, vemos que o primeiro ponto focal sobre a geodésica normal $\exp_p(tN(p))$ de $\mathbb{S}^{n+1}$ começando em p ocorre à distância $\operatorname{arc}\cot((\lambda_{\max}(p))$, onde $\lambda_{\max}$ é a maior das curvaturas principais. Além disso, observe que os pontos focais nunca acontecem antes de um ponto mínimos, tendo em vista que após os pontos focais as geodésicas não minimizam mais as distâncias a M. Dessa forma,

$$c(p) \leq \operatorname{arc}\cot\lambda_{\max}(p) \leq \operatorname{arc}\cot H(p) \leq \operatorname{arc}\cot H_r^{1/r}(p). \tag{2.22}$$

Note que, se $t \in (0, c(p))$, então

$$\lambda_i \leq \lambda_{\max} \leq \cot c(p) \leq \cot t,$$

isto é, $\cos(t) - \lambda_i \operatorname{sen}(t) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$. Assim, usando a desigualdade entre as média aritmética e geométrica, temos

$$
\begin{aligned}
(\cos(t) - \lambda_1 \operatorname{sen}(t)) \ldots &(\cos(t) - \lambda_n \operatorname{sen}(t)) \\
&\leq \left[\frac{(\cos(t) - \lambda_1 \operatorname{sen}(t)) + \ldots + (\cos(t) - \lambda_n \operatorname{sen}(t))}{n} \right]^n \\
&= \left[\frac{n \cos(t) - (\lambda_1 \operatorname{sen}(t)) + \ldots + \lambda_n \operatorname{sen}(t))}{n} \right]^n \\
&= \left[(\cos(t) - \operatorname{sen}(t)) \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)}{n} \right]^n \\
&= (\cos(t) - H \operatorname{sen}(t))^n \\
&\leq (\cos(t) - H_r^{1/r} \operatorname{sen}(t))^n.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Além disso, a igualdade é alcançada apenas nos pontos umbílicos, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$, e $H_r^{1/r} = \lambda$.

Visto que o domínio Ω determinado por M^n está contido no hemisfério aberto e, além disso, $\partial\Omega = M^n$, temos $\langle \cos(t)\psi(p) + \operatorname{sen}(t)N(p), a \rangle \geq 0$. Combinando (2.20), (2.22) e (2.23), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_M \langle N, a \rangle dA &= \int_M \int_0^{c(p)} (n+1) \langle \cos(t)\psi(p) + \operatorname{sen}(t)N(p), a \rangle \prod_{i=1}^n (\cos(t) - k_i \operatorname{sen}(t)) dt dA \\
&\leq \int_M \int_0^{\operatorname{arc\,cot}(H_r^{1/r}(p))} (n+1) \langle \cos(t)\psi(p) + \operatorname{sen}(t)N(p), a \rangle \times \\
&\quad \times (\cos(t) - H_r^{1/r} \operatorname{sen}(t))^n dt dA,
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, M^n for totalmente umbílica, isto é, uma hiperresfera geodésica. Além disso, nesse caso, temos

$$
c(p) = \operatorname{arc\,cot}(t)(H_r^{1/r}(p)) \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^n (\cos(t) - \lambda_i \operatorname{sen}(t)) dt dA = (\cos(t) - H_r^{1/r} \operatorname{sen}(t))^n.
$$

Agora observe que para cada $p \in M^n$, temos

$$
\int_0^{\operatorname{arc\,cot}(H_r^{1/r})} (n+1)(\cos(t) - H_r^{1/r} \operatorname{sen}(t))^n (\operatorname{sen}(t) + H_r^{1/r} \cos(t)) dt = 1.
$$

De fato, fazendo uma mudança de variável $w = \cos(t) - H_r^{1/r} \operatorname{sen}(t)$, temos $dw = -(\operatorname{sen}(t) +$

$H_r^{1/r}\cos(t))dt$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r})} &(n+1)(\cos(t)-H_r^{1/r}\operatorname{sen}(t))^n(\operatorname{sen}(t)+H_r^{1/r}\cos(t))dt \\
&= \int_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r})} -(n+1)(w)^n dw \\
&= -(w^{n+1})\Big|_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r})} \\
&= -(\cos(t)-H_r^{1/r}\operatorname{sen}(t))^{n+1}\Big|_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r})}.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.2.5, obtemos

$$\begin{aligned}
-(\cos(t)-H_r^{1/r}\operatorname{sen}(t))^{n+1}\Big|_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r})} &= -[\cos(\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r}))-H_r^{1/r}\operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r}))] \\
&\quad + [\cosh(0)-\operatorname{senh}(0)] = 1.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r}(n+1))}(\cos(t)-H_r^{1/r}\operatorname{sen}(t))^n(\operatorname{sen}(t)+H_r^{1/r}\cos(t))dt = 1. \tag{2.25}$$

Multiplicando (2.25) por $\langle N, a\rangle$ e integrando sobre M^n, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_M \langle N, a\rangle dA = \int_M \int_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r})} &(n+1)(\cos(t)-H_r^{1/r}\operatorname{sen}(t))^n \times \\
&\times (\operatorname{sen}(t)+H_r^{1/r}\cos(t))\langle N, a\rangle dtdA.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 2.32 e a desigualdade (2.24), obtemos

$$\int_M \int_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r})}(n+1)(\cos(t)-H_r^{1/r}\operatorname{sen}(t))^n(\operatorname{sen}(t)+H_r^{1/r}\cos(t))\langle N, a\rangle dtdA.$$

$$\begin{aligned}
&= \int_M \int_0^{c(p)} \langle N, a\rangle dA \\
&\leq \int_M \int_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r}(p))}(n+1)\langle \cos(t)\psi(p)+\operatorname{sen}(t)N(p), a\rangle(\cos(t)-H_r^{1/r}\operatorname{sen}(t))^n dtdA.
\end{aligned}$$

Isso implica

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_M \int_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r}(p))} (n+1)(\cos(t) - H_r^{1/r}\operatorname{sen}(t))^n[\cos(t)\langle\psi(p), a\rangle + \operatorname{sen}(t)\langle N, a\rangle \\
&\quad - \operatorname{sen}(t)\langle N, a\rangle + H_r^{1/r}\cos(t)\langle N, a\rangle] dt dA \\
&= \int_M \int_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r}(p))} (n+1)(\cos(t) - H_r^{1/r}\operatorname{sen}(t))^n[\cos(t)\langle\psi(p), a\rangle + H_r^{1/r}\cos(t)\langle N, a\rangle] dt dA \\
&= \int_M (n+1)[(\langle\psi(p), a\rangle + H_r^{1/r}\langle N, a\rangle) \int_0^{\operatorname{arc}\cot(H_r^{1/r}(p))} (\cos(t) - H_r^{1/r}\operatorname{sen}(t))^n \cos(t) dt] dA,
\end{aligned}
$$

pela definição de ρ, temos

$$
\int_M (\langle\psi(p), a\rangle + H_r^{1/r}\langle N, a\rangle)\rho(H_r^{1/r}) dA \geq 0.
$$

□

Com os resultados expostos, estamos em condições de obter o principal resultado desta seção, a saber:

Teorema 2.2.7. *Seja M^n uma hipersuperfície compacta mergulhada no hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$. Se H_r é constante para algum $r = 1, \ldots, n$, então M^n é uma hiperesfera geodésica.*

Demonstração. Como M^n é compacta, existe um ponto $p \in M^n$ tal que

$$
\lambda_1(p) > 0, \ldots, \lambda_n(p) > 0.
$$

Uma vez que $H_r > 0$ é constante e positiva, pela definição de ρ, vemos que $\rho(H_r^{1/r})$, é uma constante positiva. Assim, da Proposição 2.2.6, temos

$$
\int_M (\langle\psi(p), a\rangle - H_r^{1/r}\langle N, a\rangle) dA \geq 0, \tag{2.26}
$$

onde $a \in \mathbb{S}^{n+1}$ é o centro do hemisfério abeto que contém M^n. A igualdade ocorre se, e somente se, M^n é totalmente umbílica.

Por outro lado, o Lema 1.10.2 garante que $H_{r-1} \geq H_r^{1/r}$. Note ainda que $\langle p, a\rangle > 0$, para todo $p \in M^n$, pois M^n está no hemisfério aberto e $\mathbb{S}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante $c = 1$. Além disso, a Proposição 1.11.7, implica

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_M (H_{r-1}\langle\psi(p), a\rangle - H_r\langle N, a\rangle) dA \\
&\geq \int_M (H_r^{(r-1)/r}\langle\psi(p), a\rangle - H_r\langle N, a\rangle) dA
\end{aligned}
$$

$$= \int_M (H_r^{(r-1)/r}\langle\psi(p), a\rangle - H_r^{(r-1)/r} H_r^{1/r}\langle N, a\rangle) dA$$
$$= H_r^{(r-1)/r} \int_M (\langle\psi(p), a\rangle - H_r^{1/r}\langle N, a\rangle) dA.$$

Como H_r é constante positiva, segue que

$$\int_M (\langle\psi(p), a\rangle - H_r^{1/r}\langle N, a\rangle dA \leq 0. \tag{2.27}$$

De (2.26) e (2.27), temos que

$$\int_M (\langle\psi(p), a\rangle - H_r^{1/r}\langle N, a\rangle) dA = 0,$$

ou seja, vale a igualdade em (2.26) e, portanto, M^n é uma hiperesfera geodésica. □

2.3 Caso hiperbólico

Sejam $\mathbb{R}^{n+2}$ o espaço Euclidiano $(n+2)$-dimensional e $x \in \mathbb{R}^{n+2}$ dado por $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$. Se $x, y \in \mathbb{R}^{n+2}$, vamos tomar o produto interno de Lorentz

$$\langle x, y\rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n + x_{n+1} y_{n+1}.$$

O espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+2}$ munido deste produto interno será denotado por $\mathbb{R}_1^{n+2}$, onde o produto interno de Lorentz induz uma métrica definida não positiva sobre $\mathbb{R}^{n+2}$.

O espaço hiperbólico de dimensão $n+1$ e curvatura seccional $c = -1$ pode ser visto como uma hipersurperfície de $\mathbb{R}_1^{n+2}$, definida por

$$\mathbb{H}^{n+1} = \left\{x = (x_0, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+2}; |x|^2 = -1, x_0 \geqslant 1\right\},$$

com a métrica induzida pela métrica de Lorentz de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Seja $\psi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma imersão de uma hiperfuperfície compacta orientável no espaço hiperbólico. Podemos ver ψ como uma aplicação $\psi : M^n \to \mathbb{R}_1^{n+2}$ com $|\psi|^2 = -1$ e $\psi_0 \geqslant 1$. Da mesma forma, um campo normal unitário correspondendo a ψ pode ser considerado como uma aplicação $N : M^n \to \mathbb{R}_1^{n+2}$ com $|N|^2 = 1$ e $\langle\psi, N\rangle = 0$, $\forall p \in M^n$.

Lema 2.3.1. *Todas as geodésicas de $\mathbb{H}^{n+1}$ com o modelo do hiperboloide são da forma*

$$\gamma(t) = (\cosh(t))\gamma(0) + (\operatorname{senh}(t))\gamma'(0).$$

Além disso, $\gamma(0) \perp \gamma'(0)$ em $\mathbb{R}_1^{n+2}$.

Demonstração. Ver Teorema 3.2.4 e 3.2.5, pp. 63-64 de [14]. □

Uma hipersuperfície paralela $\psi_t : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ é a hipersuperfície construída pela translação de cada ponto $\psi(p)$ de $\psi(M^n)$ de uma distância fixa t ao longo da geodésica normal a $\psi(M^n)$ em $\psi(p)$. Usando o Lema 2.3.1, vemos que

$$\psi_t(p) = \exp_{\psi(p)}(tN(p)) = \cosh(t)\psi(p) + \operatorname{senh}(t)N(p). \tag{2.28}$$

observe que

$$\begin{aligned}\langle \frac{d}{dt}\psi_t(p), \frac{d}{dt}\psi_t(p)\rangle &= \langle \operatorname{senh}(t)\psi(p) + \cosh(t)N(p), \operatorname{senh}(t)\psi(p) + \cosh(t)N(p)\rangle \\ &= \operatorname{senh}^2(t)|\psi(p)|^2 + 2\operatorname{senh}(t)\cosh(t)\langle\psi(p), N(p)\rangle + \cosh^2(t)|N(p)|^2 \\ &= -\operatorname{senh}^2(t) + \cosh^2(t) = 1.\end{aligned}$$

Proposição 2.3.2. *Se $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície imersa, $p \in M^n$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM que diagonaliza o operador A, então*

$$d\psi_t(p)e_i = (\cosh(t) - \lambda_i \operatorname{senh}(t))\, e_i. \tag{2.29}$$

Demonstração. Seja $\alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$ uma curva suave, tal que, $\alpha_i(0) = p$ e $\alpha_i'(0) = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Temos

$$\begin{aligned}d\psi_t(p)e_i &= \frac{d}{ds}\psi_t(\alpha_i(s))\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\big(\cosh(t)\psi(\alpha_i(s)) + \operatorname{senh}(t)N(\alpha_i(s))\big)\Big|_{s=0} \\ &= \cosh(t)\alpha_i'(0) + \operatorname{senh}(t)\frac{d}{ds}N(\alpha_i(s))\Big|_{s=0} \\ &= \cosh(t)e_i + \operatorname{senh}(t)\bar{\nabla}_{\alpha'(0)}N = \cosh(t)e_i - \operatorname{senh}(t)A(e_i) \\ &= (\cosh(t) - \lambda_i\operatorname{senh}(t))e_i,\end{aligned}$$

onde λ_i são as curvaturas principais de ψ, $i = 1, \ldots, n$, e identificamos M com $\psi(M) \subset \mathbb{H}^{n+1}$. □

Usando a Proposição 2.3.2, temos

$$\langle d\psi_t(p)e_i, d\psi_t(p)e_j\rangle = (\cosh(t) - \lambda_i\operatorname{senh}(t))(\cosh(t) - \lambda_j\operatorname{senh}(t))\delta_{ij}. \tag{2.30}$$

Observe ainda que

$$\left\langle \frac{d}{dt}\psi_t(p), d\psi_t(p)e_i \right\rangle = 0.$$

Se $\psi : M \to \mathbb{H}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta e mergulhada, então M é a fronteira de um domínio compacto $\Omega \subset \mathbb{H}^{n+1}$. A matriz da métrica de $\mathbb{H}^{n+1}$ nas coordenadas de

Fermi é

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\cosh(t) - \lambda_1 \operatorname{senh}(t))^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\cosh(t) - \lambda_n \operatorname{senh}(t))^2 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, o elemento de volume dV de $\mathbb{H}^{n+1}$ nas coordenadas de Fermi é dado por

$$dV = \sqrt{\det \sigma} dtdA = (\cosh(t) - \lambda_1 \operatorname{senh}(t)) \cdots (\cosh(t) - \lambda_n \operatorname{senh}(t))\, dtdA.$$

Além disso, usando a Proposição 1.8.7, p.21, a integral de qualquer função integrável $f : \Omega \subset \mathbb{H}^{n+1} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita da forma

$$\int_\Omega f dV = \int_M \int_0^{c(p)} f\left(\exp_p(tN(p))\right) (\cosh(t) - \lambda_1(p) \operatorname{senh}(t)) \cdots (\cosh(t) - \lambda_n(p) \operatorname{senh}(t)) dtdA, \tag{2.31}$$

onde $c(p)$ é a distância ao ponto focal mínimo de $p \in M$.

Lema 2.3.3. *Se $\psi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ é uma hipersuperfície, $p \in M^n$ e $\psi_t : M \to \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície paralela, então os pontos focais de ψ ao longo de ψ_t são da forma $\psi_t(\operatorname{arc}\coth(\lambda_i(p)))$, onde os $\lambda_i(p)$ são as curvaturas principais de ψ em p.*

Demonstração. Um ponto $q = \psi_{t_0}(p)$ é um ponto focal de ψ ao longo de ψ_{t_0} se, e somente se $d\psi_{t_0}(v) = 0$ para algum $v \in T_qM^n$, $v \neq 0$.

Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$ uma curva suave tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Temos

$$\begin{aligned} 0 = d\psi_t(p)v &= \frac{d}{ds}\Big(\psi_t(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}\Big(\cosh(t)\psi(\alpha(s)) + \operatorname{senh}(t)N(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds}\Big((\cosh(t))\psi(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} + \frac{d}{ds}\Big((\operatorname{senh}(t))N(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} \\ &= (\cosh(t))\frac{d}{ds}\Big(\psi(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} + (\operatorname{senh}(t))\frac{d}{ds}\Big(N(\alpha(s))\Big)\Big|_{s=0} \\ &= (\cosh(t))\alpha'(0) + (\operatorname{senh}(t))\bar{\nabla}_{\alpha'(0)}N \\ &= (\cosh(t))v - (\operatorname{senh}(t))A(v). \end{aligned}$$

Portanto, $d\psi_t(v) = 0$ se, e somente se

$$A(v) = (\coth(t))v.$$

Como M^n é suave, $\coth(t)$ está bem definida. Logo $q = \psi_t(p)$ é ponto focal de ψ se, e somente se, $\coth(t)$ é um autovalor de A, isto é,

$$t = \operatorname{arc}\coth(\lambda_i), \quad \text{para algum} \quad i.$$

$\square$

A seguir, apresentaremos algumas igualdades integrais que são análogas ás fórmulas de Minkowski para o caso Euclidiano.

Lema 2.3.4. *Se $\psi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta e mergulhada, Ω é um domínio compacto em $\mathbb{H}^{n+1}$, tal que $\partial\Omega = M^n$ e N o campo normal unitário interno relativo a Ω, então*

$$-\int_M \langle N, a\rangle dA = \int_M \int_0^{c(p)} (n+1)\langle \cosh(t)p + \operatorname{senh}(t)N(p), a\rangle \prod_{i=1}^{n} (\cosh(t) - \lambda_i \operatorname{senh}(t))dtdA. \tag{2.32}$$

Demonstração. Se x é o vetor posição dos pontos de $\mathbb{H}^{n+1}$ em $\mathbb{R}_1^{n+2}$, $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ e $\bar{\Delta}$ o Laplaciano de $\mathbb{H}^{n+1}$, então vale

$$\bar{\Delta}\langle x, a\rangle = (n+1)\langle x, a\rangle. \tag{2.33}$$

Integrando (2.33) em Ω e usando o Teorema do Divergência, temos

$$-\int_M \langle N, a\rangle dA = \int_\Omega (n+1)\langle x, a\rangle dV, \tag{2.34}$$

onde N é escolhido para ser o normal interno relativo a Ω. Usando a equação (2.31) obtemos

$$(n+1)\int_M \langle x, a\rangle dV = \int_M \int_0^{c(p)} (n+1)\langle \cosh(t)p + \operatorname{senh}(t)N(p), a\rangle \times \\ \times \prod_{i=1}^{n} (\cosh(t) - \lambda_i \operatorname{senh}(t))dtdA.$$

Usando (2.34), obtemos

$$-\int_M \langle N, a\rangle dA = \int_M \int_0^{c(p)} (n+1)\langle \cosh(t)p + \operatorname{senh}(t)N(p), a\rangle \prod_{i=1}^{n} (\cosh(t) - \lambda_i \operatorname{senh}(t))dtdA. \tag{2.35}$$

$\square$

A seguir iremos desenvolver algumas desigualdades integrais para hipersuperfícies imersas em $\mathbb{H}^{n+1}$ cujas igualdades caracterizam as hiperesferas geodésicas, mas antes iremos precisar de um lema técnico.

Lema 2.3.5. *Se $x > 1$, então*

$$\cosh(\operatorname{arc\,coth}(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad e \quad \operatorname{senh}(\operatorname{arc\,coth}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Demonstração. Se $y = \operatorname{arc\,coth}(x)$ então $x = \coth(y)$. Dividindo a identidade $\cosh^2(y) - \operatorname{senh}^2(y) = 1$ por $\operatorname{senh}^2(y)$, obtemos

$$\coth^2(y) - 1 = \frac{1}{\operatorname{senh}^2(y)},$$

isto é,

$$\operatorname{senh}(y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

o que implica que

$$\cosh(y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

□

Seja $\rho : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função positiva dada por

$$\rho(u) = \int_0^{\operatorname{arc\,coth}(u)} (\cosh(t) - u\operatorname{senh}(t))^n \cosh(t)dt. \tag{2.36}$$

Proposição 2.3.6. *Seja $\psi : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço hiperbólico. Se a r-ésima curvatura média H_r, para algum r=1,...,n, com relação ao normal interior N, satisfaz $H_r > 1$ em todos os pontos de M^n, então*

$$\int_M (\langle \psi, a\rangle + H_r^{1/r}\langle N, a\rangle)\rho(H_r^{1/r})dA \geq 0,$$

para $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}_1^{n+2}$ com $|a|^2 = -1$ e $a_0 \leq -1$. Além disso, igualdade vale se, e somente se, M^n é uma hiperesfera geodésica.

Demonstração. No ponto de M^n em que a função distância geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$ atinge o seu máximo, todas as curvaturas principais são positivas, de fato, são todas maiores que 1, isto é

$$\lambda_1 > 1, \ldots, \lambda_n > 1.$$

Com efeito, nesse ponto, a hipersuperfície M^n é tangente à esfera geodésica que realiza essa distância e está contida localmente dentro dessa esfera. Dessa forma, as curvaturas principais de M^n são todas maiores ou iguais às curvaturas geodésicas dessa esfera geodésicas. Por outro lado, visto que as esferas geodésicas são totalmente umbílicas, pela equação de Gauss, temos

$$\bar{\lambda}^2 = 1 + K(X, Y) > 1,$$

onde X, Y são vetores ortonormais tangentes à esfera geodésica, $\bar{K} = -1$ é a curvatura seccional do espaço hiperbólico, $AX = \bar{\lambda}X$ é o operador de forma da esfera geodésica e $K > 0$ é a curvatura seccional da esfera. Assim, as curvaturas principais das esferas geodésicas são todas maiores que 1, o que implica que as curvaturas principais de M^n nesse ponto são maiores que 1. Visto que, por hipótese, $H_r > 1$, usando o Lema 1.10.2 obtemos

$$1 < H_r^{1/r} < H.$$

Usando o Lema 2.3.3, vemos que o primeiro ponto focal sobre a geodésica normal $\exp_p(tN(p))$ de $\mathbb{H}^{n+1}$ começando em p ocorre à distância $\operatorname{arc\,coth}((\lambda_{\max}(p))$, onde $\lambda_{\max}$ é a maior das curvaturas principais. Além disso, observe que os pontos focais nunca acontecem antes de um ponto mínimo, tendo em vista que após os pontos focais as geodésicas não minimizam mais as distâncias a M. Dessa forma,

$$c(p) \leq \operatorname{arc\,coth} \lambda_{\max} \leq \operatorname{arc\,coth} H(p) \leq \operatorname{arc\,coth} H_r^{1/r}(p). \tag{2.37}$$

Se $t \in (0, c(p))$, então

$$\coth t \geq \coth c(p) \geq \lambda_{\max} \geq \lambda_i,$$

o que implica que $\cosh(t) - \lambda_i \operatorname{senh}(t) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$\begin{aligned}
(\cosh(t) - \lambda_1 \operatorname{senh}(t)) \cdots (\cosh(t) - \lambda_n \operatorname{senh}(t)) \\
&\leq \left[\frac{(\cosh(t) - \lambda_1 \operatorname{senh}(t)) + \ldots + (\cosh(t) - \lambda_n \operatorname{senh}(t))}{n}\right]^n \\
&= \left[\frac{n\cosh(t) - (\lambda_1 \operatorname{senh}(t)) + \ldots + \lambda_n \operatorname{senh}(t))}{n}\right]^n \\
&= \left[\cosh(t) - \operatorname{senh}(t)\frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)}{n}\right]^n \\
&= (\cosh(t) - H \operatorname{senh}(t))^n \\
&\leq (\cosh(t) - H_r^{1/r} \operatorname{senh}(t))^n.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Além disso, a igualdade é alcançada apenas nos pontos umbílicos, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$, e $H_r^{1/r} = \lambda$.

Seja Ω o domínio compacto em $\mathbb{H}^{n+1}$ tal que $\partial\Omega = M$. Temos que $\langle x, a\rangle \geq 1$ para todo $x \in \Omega = \partial M$, pois $x, a \in \mathbb{R}_1^{n++2}$ com $\| x \|^2 = \| a \|^2 = -1$, $x_0 \geq 1$ e $a_0 \leq -1$. Combinando

(2.35), (2.37) e (2.38), temos

$$
\begin{aligned}
-\int_M \langle N, a\rangle dA &= \int_M \int_0^{c(p)} (n+1)\langle \cosh(t)\psi(p) + \operatorname{senh}(t)N(p), a\rangle \times \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{n} (\cosh(t) - \lambda_i \operatorname{senh}(t)) dt dA \\
&\leq \int_M \int_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r}(p))} (n+1)\langle \cosh(t)\psi(p) + \operatorname{senh}(t)N(p), a\rangle \times \\
&\quad \times (\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^n dt dA,
\end{aligned}
$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, M^n for totalmente umbílica. Além disso, nesse caso,

$$
c(p) = \operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r}(p)) \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^{n} (\cosh(t) - \lambda_i \operatorname{senh}(t)) dt dA = (\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^n.
$$

Vamos mostrar que para cada $p \in M^n$, temos

$$
\int_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r})} (n+1)(\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^n (\operatorname{senh}(t) - H_r^{1/r}\cosh(t)) dt = -1.
$$

De fato, fazendo uma mudança de variável $w = \cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t)$, temos que $dw = (\operatorname{senh}(t) - H_r^{1/r}\cosh(t))dt$. Isso implica

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\operatorname{arccoth}(H_r^{1/r})} & (n+1)(\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^n (\operatorname{senh}(t) - H_r^{1/r}\cosh(t)) dt \\
&= \int_0^{\operatorname{arccoth}(H_r^{1/r})} (n+1)(w)^n dw \\
&= (w^{n+1})\Big|_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r})} \\
&= (\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^{n+1}\Big|_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r})}.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 2.3.5, obtemos

$$
\begin{aligned}
(\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^{n+1}\Big|_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r})} &= [\cosh(\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r})) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r}))] \\
&\quad - [\cosh(0) - \operatorname{senh}(0)] = -1.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\int_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r}(n+1))} (\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^n (\operatorname{senh}(t) - H_r^{1/r}\cosh(t)) dt = -1. \tag{2.39}
$$

Multiplicando (2.39) por $\langle N, a\rangle$ e integrando sobre M^n, obtemos

$$\begin{aligned}-\int_M \langle N, a\rangle dA = \int_M \int_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r})} & (n+1)(\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^n(\operatorname{senh}(t) \\ & - H_r^{1/r}\cosh(t))\langle N, a\rangle dt dA.\end{aligned}$$

Usando (2.35), temos

$$\begin{aligned}&\int_M \int_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r})} (\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^n(\operatorname{senh}(t) - H_r^{1/r}\cosh(t))\langle N, a\rangle dt dA \\ &\quad = \int_M \int_0^{c(p)} \langle \cosh(t)\psi(p) + \operatorname{senh}(t)N(p), a\rangle \prod_{i=1}^n (\cosh(t) - \lambda_i \operatorname{senh}(t)) dt dA \\ &\quad \leq \int_M \int_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r}(p))} \langle \cosh(t)\psi(p) + \operatorname{senh}(t)N(p), a\rangle (\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^n dt dA.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_M \int_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r}(p))} (\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^n \times \\ &\quad \times [\cosh(t)\langle\psi(p), a\rangle + \operatorname{senh}(t)\langle N, a\rangle - \operatorname{senh}(t)\langle N, a\rangle + H_r^{1/r}\cosh(t)\langle N, a\rangle] dt dA \\ &= \int_M \int_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r}(p))} (\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^n \times \\ &\quad \times [\cosh(t)\langle\psi(p), a\rangle + H_r^{1/r}\cosh(t)\langle N, a\rangle] dt dA \\ &= \int_M [(\langle\psi(p), a\rangle + H_r^{1/r}\langle N, a\rangle) \int_0^{\operatorname{arc\,coth}(H_r^{1/r}(p))} (\cosh(t) - H_r^{1/r}\operatorname{senh}(t))^n \cosh(t) dt] dA.\end{aligned}$$

Portanto, usando a definição de $\rho(u)$, obtemos

$$\int_M (\langle\psi(p), a\rangle + H_r^{1/r}\langle N, a\rangle)\rho(H_r^{1/r}) dA \geq 0.$$

□

Com os resultados expostos, estamos em condições de obter o principal resultado desta seção, a saber,

Teorema 2.3.7. *Seja M^n uma hipersuperfície compacta mergulhada no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Se H_r é constante para algum $r = 1, \ldots, n$, então M^n é uma hiperesfera geodésica.*

Demonstração. Como foi observado na demonstração da Proposição 2.3.6, existe um ponto $p \in M^n$ tal que

$$\lambda_1(p) > 1, \ldots, \lambda_n(p) > 1.$$

Visto que, por hipótese, H_r é contante, obtemos $H_r > 1$. Pela definição de ρ, temos que $\rho(H_r^{1/r}) > 0$ é uma constante positiva. Assim, da Proposição 2.3.6 temos

$$\int_M (\langle \psi(p), a\rangle + H_r^{1/r}\langle N, a\rangle) dA \geq 0, \tag{2.40}$$

para $a \in \mathbb{R}_1^{n+2}$, $\| a \|^2 = -1$ e $a_0 \leq -1$. Além disso, a igualdade vale se, e somente se, M^n é uma hiperesfera geodésica.

O Lema 1.10.2 garante que $H_{r-1} \geq H_r^{1/r}$. Como $\langle \psi(p), a\rangle \geq 1$, para todo $p \in M^n$ e $\mathbb{H}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante $c = -1$, portanto a Proposição 1.11.7, implica

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M (H_{r-1}\langle \psi(p), a\rangle + H_r\langle N, a\rangle) dA \\
&\geq \int_M (H_r^{(r-1)/r}\langle \psi(p), a\rangle + H_r\langle N, a\rangle) dA \\
&= \int_M (H_r^{(r-1)/r}\langle \psi(p), a\rangle + H_r^{(r-1)/r} H_r^{1/r}\langle N, a\rangle) dA \\
&= H_r^{(r-1)/r}\int_M (\langle \psi(p), a\rangle + H_r^{1/r}\langle N, a\rangle) dA.
\end{aligned}$$

Por hipótese, H_r é uma constante positiva, de onde segue que

$$\int_M (\langle \psi(p), a\rangle + H_r^{1/r}\langle N, a\rangle) dA \leq 0. \tag{2.41}$$

De (2.40) e (2.41), temos que

$$\int_M (\langle \psi(p), a\rangle + H_r^{1/r}\langle N, a\rangle) dA = 0,$$

ou seja, a igualdade ocorre em (2.40) e, portanto, M^n é uma hiperesfera geodésica. □

Referências Bibliográficas

[1] A. D. Aleksandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large. I*, Vestnik Leningrad. Univ. **11** (1956), no. 19, 5–17. MR 0086338

[2] C. P Aquino, *Uma caracterização de hipersuperfícies na esfera com curvatura escalar constante*, 2013, Dissertação (Mestrado interinstitucional UFC em Matemática) Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Interinstitucional em Matemática UFC, Universidade Federal do Ceará, p. 70.

[3] João Lucas Marques Barbosa and Antônio Gervasio Colares, *Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature*, Ann. Global Anal. Geom. **15** (1997), no. 3, 277–297. MR 1456513

[4] Isaac Chavel, *Riemannian geometry*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, A modern introduction. MR 2229062

[5] Manfredo P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides. [Euclid Project], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2015, Fifth edition, second printing of [MR0651516]. MR 3791495

[6] Lars Gårding, *An inequality for hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech. **8** (1959), 957–965. MR 0113978

[7] Heinz Hopf, *Differential geometry in the large*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1000, Springer-Verlag, Berlin, 1983, Notes taken by Peter Lax and John Gray, With a preface by S. S. Chern. MR 707850

[8] Wu-yi Hsiang, Zhen Huan Teng, and Wen Ci Yu, *New examples of constant mean curvature immersions of $(2k-1)$-spheres into Euclidean $2k$-space*, Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 3, 609–625. MR 701257

[9] Chuan-Chih Hsiung, *Some integral formulas for closed hypersurfaces*, Math. Scand. **2** (1954), 286–294. MR 68236

[10] Nicolaos Kapouleas, *Constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **17** (1987), no. 2, 318–320. MR 903742

[11] Serge Lang, *Introduction to differentiable manifolds*, second ed., Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002. MR 1931083

[12] Heinrich Liebmann, *Eine neue eigenschaft der kugel*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse **1899** (1899), 44–55.

[13] Sebastián Montiel and Antonio Ros, *Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures*, Differential geometry, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., vol. 52, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991, pp. 279–296. MR 1173047

[14] John G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 149, Springer, Cham, [2019] ©2019. MR 4221225

[15] Robert C. Reilly, *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), no. 3, 459–472. MR 474149

[16] Antonio Ros, *Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem*, J. Differential Geom. **27** (1988), no. 2, 215–223, With an appendix by Nicholas J. Korevaar. MR 925120

[17] W. Süss, *Über Kennzeichnungen der Kugeln und Affinsphären durch Herrn K.-P. Grotemeyer*, Arch. Math. (Basel) **3** (1952), 311–313. MR 53548

[18] Henry C. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math. **121** (1986), no. 1, 193–243. MR 815044