Francisco Cleone Neres de Lima

Estimando o primeiro autovalor do Laplaciano de hipersuperfícies mínimas

Maceió-AL

2021

Francisco Cleone Neres de Lima

Estimando o primeiro autovalor do Laplaciano de hipersuperfícies mínimas

Dissertação a ser defendida junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de mestre.

Universidade Federal de Alagoas-UFAL

Instituto de Matemática-IM

Programa de Pós-Graduação em Matemática-PGMAT

Orientador: Prof. Dr. Cicero Tiarlos Nogueira Cruz

Maceió-AL

2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

L732e Lima, Francisco Cleone Neres de.
Estimando o primeiro autovalor do Laplaciano de hipersuperfícies mínimas / Francisco Cleone Neres de Lima. – 2021.
45 f. : il. color.

Orientador: Cicero Tiarlos Nogueira Cruz.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 44-45.

1. Autovalores. 2. Operador Laplaciano. 3. Hipersuperfícies mínimas. 4. Curvatura de Ricci. I. Título.

CDU: 514.7

Folha de Aprovação

AUTOR: FRANCISCO CLEONE NERES DE LIMA

Estimando o primeiro autovalor do Laplaciano de hipersuperfícies mínimas

Dissertação apresentada junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de mestre.

Aprovada em 30 de MARÇO de 2021.

Banca Examinadora:

Cicero Tiarlos Nogueira Cruz

Prof. Dr. CICERO TIARLOS NOGUEIRA CRUZ - UFAL
Orientador

Prof. Dr. MÁRCIO HENRIQUE BATISTA DA SILVA - UFAL

Prof. Dr. ABDÊNAGO ALVES DE BARROS - UFC
Membro Externo

Maceió-AL
2021

Dedico este trabalho ao Professor Francisco José Bitú Feitosa. (In Memoriam)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus o dom da vida. Toda honra e glória sejam dadas a Ele.

Segundo a minha família, especialmente meus pais José Manoel de Lima e Irene Araújo Neres que sempre estão me apoiando e acreditando em mim. Também minha Tia Maria Helena Araújo Neres, pessoa que é como uma mãe sempre se fazendo presente, prestando apoio, amizade, além de um grande exemplo.

Aos meus amigos Deivid Almeida, Carlos Henrique, Manuel Vinícius, Allan Kennedy, Matheus Martins, Maria Ranilze, Pedro Henrique e demais colegas de disciplina e conhecidos do PPGMAT-UFAL.

Aos professores Rafael Lucena e Krerley Oliveira que ministraram o curso de Verão em Análise real, curso pelo qual reingressei ao PPGMAT-UFAL. Aos professores com os quais cursei matérias: Abraão Mendes, Márcio Batista, Gregório Neto, Márcio Cavalcante, Marcos Petrúcio, Wagner Ranter e de forma especial ao meu orientador Cícero Tiarlos.

Aos funcionários da secretaria do programa e em especial a Ana Mendonça. Aos demais servidores da UFAL.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES.

"Matemática não é apenas números,
e sim envolve letras e toda a capacidade
que o ser humano conseguir expressar."
(François Viète)

Resumo

No artigo *A first eigenvalue estimative for minimal hypersurfaces* [1] Choi e Wang obtiveram uma cota inferior para o primeiro autovalor do Laplaciano de uma hipersuperfície mínima compacta orientável mergulhada em uma variedade compacta orientável com curvatura de Ricci positiva. Nessa dissertação, usando argumentos de espaços de recobrimento provaremos esse mesmo resultado sem essas suposições sobre orientabilidade. Além disso, utilizaremos a *Fórmula de Reilly* que é na verdade uma versão obtida por integração da *Fórmula de Bochner*. Combinando o resultado de estimativa obtida com um teorema de Yang e Yau [2], encontramos uma cota superior para a área de uma superfície mínima mergulhada em $\mathbb{S}^3$ apenas em função da topologia, mais precisamente em função do gênero da superfície.

Palavras-chave: Primeiro autovalor; Laplaciano; Hipersuperfície mínima; Fórmula de Reilly; Fórmula de Bochner; Curvatura de Ricci.

Abstract

In the article *A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces* [1] H. Choi e A. N. Wang obtain a lower bound for the first eigenvalue of the Laplacian of a compact orientable embedded minimal hypersurface in an compact orientable manifold with Positive Ricci curvature. In this dissertation, using covering space argument we prove this result dropping the orientability assumption. Moreover, we use *Reilly's Formula* was used, which is actually a version obtained by integrating of Bochner's Formula. Combining Choi and Wang's estimate with Yang and Yaús Theorem [2], we found a upper bounds estimate for the area of an embedded minimal surface in $\mathbb{S}^3$ only depending on its topology, more precisely only in terms of the genus of the surface.

Keywords: First eigenvalue; Laplacian; Minimal hypersurface; Reilly's formula; Bochner's formula; Ricci curvature.

Sumário

Introdução

Seja M uma hipersuperfície mínima compacta orientável e mergulhada em uma variedade Riemanniana N compacta orientável com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante positiva k. Em [1], como aplicação da fórmula de Reilly, H. Choi e A. Wang obtiveram uma estimativa para o primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano $\lambda_1(M)$ de M. Mais precisamente, eles provaram que $\lambda_1(M) \geq k/2$.

Nesse contexto, provaremos uma modificação do resultado citado no qual retiramos a hipótese de orientabilidade tanto de M quanto de N. É importante salientar que a prova dada aqui é precisamente a versão costumeiramente utilizada em alguns resultados importantes de geometria diferencial como, por exemplo, na prova do Teorema de Compacidade para superfícies mínimas mergulhadas devido a Choi e Schoen [3].

Teorema 1. *Seja M uma hipersuperfície mínima compacta e mergulhada em uma variedade Riemanniana N. Suponha que a curvatura de Ricci de N é limitada inferiormente por uma constante positiva k, ou seja, $Ric \geq k > 0$. Então*

$$\lambda_1(M) \geq \frac{k}{2},$$

onde $\lambda_1(M)$ é o primeiro autovalor do Laplaciano de M.

Para essa prova procederemos em parte como no artigo original de H. Choi e A. Wang e adicionalmente usaremos argumentos de recobrimento universal para descartarmos as hipóteses sobre orientabilidade.

Apresentaremos ainda algumas aplicações, uma delas, por exemplo, que se M é uma hipersuperfície mínima mergulhada na esfera euclideana $\mathbb{S}^n$, então

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n-1}{2}. \tag{1}$$

A estimativa acima segue do fato que a curvatura de Ricci em $\mathbb{S}^n$ é constante igual a $n-1$ e que na esfera a hipersuperfície M precisa ser orientável. Nós observamos que tal resultado está intimamente relacionado com a conjectura de Yau [4], que afirma que tal autovalor seria exatamente igual a $n-1$. Assim a estimativa (1) de fato evidencia que a conjectura de Yau pode ser verdadeira.

Afim de apresentar a próxima aplicação, enunciaremos o célebre resultado de P. Yang e S.T. Yau [2] sobre autovalores do Laplaciano de superfícies compactas.

Teorema 2. *Seja M uma Superfície de Riemann orientável de gênero $g(M)$. Então $\lambda_1(M)\acute{A}rea(M) \leq 8\pi(g(M)+1)$, onde $\acute{A}rea(M)$ é a área de M.*

Combinando os Teoremas 1 e 2, temos

Teorema 3. *Seja M uma Superfície de Riemann orientável de gênero $g(M)$. Entâo*

$$Área(M) \leq \frac{8\pi(g(M)+1)}{k},$$

onde $Área(M)$ é a área de M.

Mais geralmente conseguimos provar uma estimativa envolvendo a cardinalidade do grupo fundamental de uma superfície fechada e mergulhada M em uma variedade Riemanniana N compacta com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante positiva k. Mais precisamente, temos a seguinte estimativa:

$$\text{Área}(M) \leq \frac{16\pi}{k}\left(\frac{2}{|\pi_1|} - \frac{1}{2}\chi(M)\right),$$

onde $|\pi_1|$ denota a cardinalidade do grupo fundamental de M e $\chi(M)$ a caracteristica de Euler de M.

Esta dissertação está organizada como segue. No Capítulo 1 apresentamos definições e conceitos básicos de Geometria Riemanniana, além de definiremos algumas objetos importantes como Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano. No Capítulo 2 faremos uma breve introdução ao grupo fundamental e apresentaremos alguns resultados clássicos de geometria Riemannina como os teoremas de Bonnet-Myers e de Frankel (sobre interseção de mínimas) e a fórmula de Reilly. Finalmente, no Capítulo 3 provamos o Teorema 3 e discutiremos algumas aplicações.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos de Geometria Riemanniana que serão utilizados ao longo do trabalho.

1.1 Métricas, Variedades e Conexões Riemannianas

Denotaremos por M^n uma *variedade diferenciável de dimensão n*. Quando não houver confusão relacionado à sua dimensão denotaremos simplesmente por M. Assumiremos ainda a definição de variedades diferenciáveis, assim como os conceitos de espaço tangente (veja por exemplo Capítulo 0 de [5]).

Uma *métrica ou estrutura riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ no espaço tangente T_pM que varia diferenciavelmente no sentido de que se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, ..., x_n) = q \in x(U)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, ..., 1, ...0)$, então $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}(q), \dfrac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U. Esta é uma maneira pela qual é possível medir o comprimento de vetores tangentes que varia diferenciavelmente em cada ponto.

É usual deixar de indicar o índice p em $\langle\ ,\ \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. As funções $g_{ij}(= g_{ji})$ *são chamadas expressões da métrica riemanniana* no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$.

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica riemanniana chama-se uma *Variedade Riemanniana*.

Proposição 1.1.1. *Uma variedade diferenciável M (Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica riemanniana.*

Demonstração. Veja Proposição 2.10 no Capítulo 1 de [5]. □

A seguir introduziremos o conceito de *conexão afim*, cuja importância reside no fato de que a escolha de uma métrica riemanniana em uma variedade M determina univocamente uma certa conexão afim de M. Desde modo poderemos derivar campos de vetores em M.

Em tudo o que segue M denota uma variedade riemanniana de dimensão n, $C^\infty(M)$ o conjunto de todas as funções diferenciáveis em M e $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de campos diferenciáveis de vetores tangentes definidos em M.

Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(iii) $\nabla_X(fX) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

A proposição seguinte estabelece a relação entre conexão afim à variedade M e o campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ chamado *derivada covariante* de um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \to M$.

Proposição 1.1.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:*

a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DV}{dt}$, *onde W é um campo de vetores ao longo de c;*

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{Df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ *onde f é uma função diferenciável em I;*

c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, i.e., $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$.

Demonstração. Veja a Proposição 2.2 no Capítulo 2 de [5]. □

Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado *paralelo* quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 1.1.3. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$. Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$.*

Demonstração. Veja a Proposição 2.6, Capitulo 2 de [5]. □

O campo $V(t)$ é chamado *transporte paralelo* de $V(t_0)$ ao longo de c.

Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$. Diremos que a conexão é *compatível com a métrica* quando para toda curva diferenciável c e qualquer par de campos paralelos P e P' ao longo de c, tivermos $\langle P, P' \rangle$ é constante.

A definição acima para compatibilidade entre métrica e conexão é justificada pela proposição a seguir que mostra que se ∇ é compatível com $\langle \ , \ \rangle$ então podemos diferenciar o produto interno pela regra do produto usual. A prova pode ser encontrada em [5] Proposição 3.2, Capítulo 2.

Proposição 1.1.4. *Seja M uma variedade riemanniana. Uma conexão afim ∇ em M é compatível com a métrica se, e só se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \ t \in \ I. \tag{1.1}$$

Corolário 1.1.1. *Uma conexão ∇ em uma variedade riemanniana M é compatível com a métrica se, e só se,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.2}$$

Demonstração. Veja o Corolário 3.3, Capítulo 2 de [5].

□

Dizemos que a conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é *simétrica* quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \textit{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposição 1.1.5. *(Conexão de Levi-Civita) Dada uma variedade riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

a) ∇ *é simétrica;*

b) ∇ *é compatível com a métrica.*

Demonstração. Veja o Teorema 3.6 no Capítulo 2 de [5]. □

A conexão dada pela proposição anterior é denominada *Conexão de Levi-Civita ou Riemanniana* de M.

1.2 Gradiente; Divergente; Laplaciano; Hessiano

A seguir daremos definições e propriedades de alguns objetos importantes e frequentes neste trabalho. M denotará uma variedade riemanniana de dimensão n, $C^\infty(M)$

o conjunto de todas as funções diferenciáveis em M e $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de campos diferenciáveis de vetores tangentes definidos em M.

Seja $f \in C^{\infty}(M)$. O *gradiente* de f é o único campo vetorial $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ que satisfaz a equação

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.2.1. *Seja $f \in C^{\infty}(M)$ e $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Então em U temos*

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{n} E_j(f) E_j.$$

Além disso, o segundo membro da igualdade acima independe do referencial escolhido.

Demonstração. Expressando $X \in \mathfrak{X}(U)$ na base $\{E_1, ..., E_n\}$ por $X = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$, temos que

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i(f) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i E_i, \sum_{j=1}^{n} E_j(f) E_j \right\rangle = \left\langle X, \sum_{j=1}^{n} E_j(f) E_j \right\rangle.$$

Pela definição de gradiente, segue que $\nabla f = \sum_{j=1}^{n} E_j(f) E_j$.

Por outro lado, se $\{F_1, ..., F_n\}$ for outro referencial ortonormal em U, com $F_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} E_k$, então a matriz $(a_{kj}(p))_{n \times n}$ é ortogonal em todo $p \in U$. Daí

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} F_j(f) F_j &= \left(\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} E_k(f) \right) \left(\sum_{l=1}^{n} a_{lj} E_l \right) \\ &= \sum_{k,j,l=1}^{n} a_{kj} a_{lj} E_k(f) E_l \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \delta_{kl} E_k(f) E_l \\ &= \sum_{k=1}^{n} E_k(f) E_k. \end{aligned}$$

□

Quando $M^n = \mathbb{R}^n$, podemos tomar, para $1 \leqslant i \leqslant n$, E_i como o i-ésimo campo canônico de $\mathbb{R}^n$. Desse modo,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Portanto a definição de gradiente está de acordo com a definição dada no cálculo diferencial e integral para funções diferenciáveis.

Proposição 1.2.2. *Se $f, g \in C^\infty(M)$, então*

a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

b) $\nabla(f \cdot g) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$.

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{array}{rcl} \langle \nabla(f+g), X\rangle & = & X(f+g) \\ & = & X(f) + X(g) \\ & = & \langle \nabla f, X\rangle + \langle \nabla g, X\rangle \\ & = & \langle \nabla f + \nabla g, X\rangle. \end{array}$$

Analogamente

$$\begin{array}{rcl} \langle \nabla(f \cdot g), X\rangle & = & X(f \cdot g) \\ & = & g \cdot X(f) + f \cdot X(g) \\ & = & g\langle \nabla f, X\rangle + f\langle \nabla g, X\rangle \\ & = & \langle g \cdot \nabla f, X\rangle + \langle f \cdot \nabla g, X\rangle \\ & = & \langle g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g, X\rangle. \end{array}$$

Como isto vale para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$ o resultado segue. □

Consideremos M^n uma variedade riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇.

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. A *Divergência* de X é a função diferenciável $\mathrm{div}X : M \to \mathbb{R}$ dada para $p \in M$ por

$$(\mathrm{div}X)(p) = tr\{v \to (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_pM$ e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

Dizemos que um referencial ortonormal $\{E_1, ..., E_n\}$ em uma aberto $U \subset M$ é *geodésico* em $p \in U$ se $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$ para quaisquer $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Proposição 1.2.3. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$ em U, então*

$$divX = \sum_{i=1}^{n} (E_i(a_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X\rangle). \tag{1.3}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$ então termos em p que

$$div\ X = \sum_{i=1}^{n} E_i(a_i).$$

Demonstração. Pela definição de divergência de uma campo vetorial, temos que

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle. \tag{1.4}$$

Note que $E_i(\langle X, E_i \rangle) = \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle + \langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle$. Daí,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}X &= \sum_{i=1}^{n} (E_i(\langle X, E_i \rangle) - \langle X, \nabla_{E_i} E_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (E_i(a_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle). \end{aligned}$$

Se o referencial for geodésico o resultado é imediato a partir desta ultima expressão. □

Novamente considerando o caso $M = \mathbb{R}^n$, tomamos E_i sendo o i-ésimo campo canônico de $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Como tais campos formam um referencial geodésico em cada ponto de $\mathbb{R}^n$, temos

$$div\ X = \sum_{i=1}^{n} E_i(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Logo está de acordo com a definição dada no cálculo diferencial e integral para a divergência de um capo vetorial.

Proposição 1.2.4. *Se* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f \in C^{\infty}(M)$ *então*

(a) $div\ (X + Y) = div\ X + div\ Y$;

(b) $div\ (fX) = f \cdot div\ X + \langle \nabla f, X \rangle$.

Demonstração. Considere $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança $U \subset M$. Pela definição de divergente temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\ (X + Y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} (X + Y), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X + \nabla_{E_i} Y, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} Y, E_i \rangle \\ &= \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y, \end{aligned}$$

provando (a). Quanto a (b), novamente pela definição de divergente e usando a linearidade da métrica teremos

$$\begin{aligned}
\text{div } (fX) &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}(fX), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle E_i(f)X + f\nabla_{E_i}X, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle E_i(f)X, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle f\nabla_{E_i}X, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle E_i(f)E_i, X\rangle + f\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}X, E_i\rangle \\
&= \langle \nabla f, X\rangle + f\cdot \text{div}X
\end{aligned}$$

em U. Como para todo ponto de M podemos tomar uma vizinhança que admite um referencial ortonormal, o resulto segue. □

Seja $f \in C^\infty(M)$. O *Laplaciano* de f em M é a função $\Delta f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f).$$

Variando $f \in C^\infty(M)$ temos um operador $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ chamado *Operador Laplaciano.*

Vejamos qual a expressão do Laplaciano de uma função em termos de um referencial ortonormal.

Proposição 1.2.5. *Seja $f \in C^\infty(M)$ e $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n}(E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i}E_i)f). \tag{1.5}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, então temos em p que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f)). \tag{1.6}$$

Demonstração. Pela Proposição 1.2 vale que $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i$ em U. Agora, da definição do Laplaciano de uma função e da expressão (1.3) segue que

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^{n}(E_i(E_i(f)) - \langle \nabla_{E_i}E_i, \nabla f\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i}E_i)f).
\end{aligned}$$

Se o referencial for geodésico o resultado segue de imediato desta última expressão. □

Quando $M^n = \mathbb{R}^n$ a definição acima para o Laplaciano de uma função diferenciável também concorda com a definição do cálculo diferencial e integral de uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato, neste caso podemos tomar E_i, os campos coordenados canônicos de $\mathbb{R}^n$, os quais formam um referencial geodésico em cada ponto de $\mathbb{R}^n$. Portanto, segue de (1.5) que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Proposição 1.2.6. *Sejam $f, g \in C^\infty(M)$. Então*

$$\Delta(f \cdot g) = g \cdot \Delta f + f \cdot \Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle. \tag{1.7}$$

Em particular,

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f \cdot \Delta f + |\nabla f|^2. \tag{1.8}$$

Demonstração. A primeira expressão segue da definição de Laplaciano e da Proposição 1.2.4, enquanto (1.8) segue imediatamente de (1.7).

$$\begin{aligned} \Delta(f \cdot g) &= \operatorname{div}(\nabla(f \cdot g)) = \operatorname{div}(g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g) \\ &= g \cdot \Delta f + f \cdot \Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle. \end{aligned}$$

□

Chamamos *variedade com bordo* a uma variedade cujo domínio das parametrizações é o conjunto H^n, onde $H^n := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0\}$ é o *semi-espaço* de $\mathbb{R}^n$. Um ponto $p \in M$ é chamado um *ponto de bordo* em M se, para alguma parametrização $\mathbf{x} : U \subset H^n \to M$ em torno de p, tivermos $\mathbf{x}(0, x_2, \cdots, x_n) = p$. Ademais, a definição de ponto de bordo independe da parametrização escolhida, como podemos ver em [6], pág. 78. Portanto o conjunto dos pontos de bordo de M está bem definido sendo denominado o *bordo* de M e denotado por ∂M.

As definições de aplicação diferenciável, espaço tangente, orientabilidade e etc para variedades com bordo são introduzidas de maneira completamente análoga às definições correspondentes para variedades diferenciáveis, com o cuidado adicional de trocar $\mathbb{R}^n$ por H^n. Se $\partial M = \emptyset$ a definição para variedade com bordo coincide com a definição de variedades diferenciáveis .

Enunciamos a seguir um resultado muito útil para as próximas seções.

Teorema 1.2.1. ***(Teorema da divergência)*** *Seja M uma variedade Riemanniana orientada, compacta, com bordo e X um campo de vetores definido em M. Então*

$$\int_M div\ X\ dM = \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle dS_M, \tag{1.9}$$

onde η é o campo normal unitário apontando para o exterior de ∂M na orientação de M, dM denota o elemento de volume de M e dS_M o elemento de área de ∂M. Se $\partial M = \emptyset$, então

$$\int_M div\ X dM = 0. \tag{1.10}$$

Demonstração. Veja o Teorema 10.41, Capítulo 10 de [7]. □

Aplicando o Teorema da divergência ao campo $X = f\nabla g$, obtemos

$$\int_M [f\Delta g + \langle \nabla f, \nabla g\rangle] dM = \int_{\partial M} f\langle \nabla g, \eta\rangle dS_M, \tag{1.11}$$

denominada *Primeira fórmula de Green*. Um caso particular importante ocorre quando $f \equiv 1$ na expressão acima que resulta

$$\int_M \Delta g\ dM = \int_{\partial M} \langle \nabla g, \eta\rangle dS_M \tag{1.12}$$

Através da primeira fórmula de Green obtemos a chamada *Segunda fórmula de Green*:

$$\int_M (f\Delta g - g\Delta f) dM = \int_{\partial M} \langle f\nabla g - g\nabla f, \eta\rangle dS_M. \tag{1.13}$$

Com o uso do Teorema anterior, podemos mostrar que operador Laplaciano Δ é auto-adjunto. Para tal, precisamos definir um produto interno em $C^\infty(M)$. Se $f, g \in C^\infty(M)$, definamos,

$$\langle f, g\rangle = \int_M fg dM. \tag{1.14}$$

Pelas propriedades de integrais em superfície é imediato que a expressão acima define um produto interno.

Proposição 1.2.7. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. O operador Laplaciano $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é linear auto-adjunto.*

Demonstração. Para verificar que Δ é linear precisamos mostrar primeiro a linearidade do gradiente. Sejam $f, g \in C^\infty(M), a \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então,

$$\langle \nabla(f + ag), X, \rangle = X(f + ag) = Xf + aXg = \langle \nabla f, X\rangle + a\langle \nabla g, X\rangle = \langle \nabla f + a\nabla g, X\rangle.$$

Pela unicidade do gradiente, segue que

$$\nabla(f + ag) = \nabla f + a\nabla g.$$

Assim, seja $\{E_1, \cdots, E_n\}$ um referencial ortonormal

$$\begin{aligned}
\Delta(f+ag) &= \operatorname{div}(\nabla(f+ag)) = \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}\nabla(f+ag), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}(\nabla f + a\nabla g), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle + a\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}\nabla g, E_i\rangle \\
&= \Delta f + a\Delta g.
\end{aligned}$$

ou seja, Δ é linear. Além disso, usando a Segunda fórmula de Green (1.13), obtemos

$$\langle\Delta f, g\rangle = \int_M g\Delta f dM = \int_M f\Delta g dM = \langle f, \Delta g\rangle.$$

Logo, Δ é auto-adjunto. □

Seja $f \in C^\infty(M)$. O *hessiano* de f é o campo de operadores lineares definido para $v \in T_pM$ por

$$\begin{aligned}
(Hessf)_p : \ T_pM &\longrightarrow T_pM \\
v &\longrightarrow \nabla_v\nabla f.
\end{aligned}$$

Das propriedades da conexão Riemanniana segue que se X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de $p \in M$, então

$$(Hessf)_p(v) = (\nabla_X\nabla f)(p).$$

Proposição 1.2.8. *Se $f \in C^\infty(M)$ e $p \in M$, então $(Hessf)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração. Sejam $v, w \in T_pM$ e V, W denotando respectivamente extensões de v e w a campos definidos em uma vizinhança de $p \in M$, então

$$\begin{aligned}
\langle(Hessf)_p(v), w\rangle &= \langle\nabla_V\nabla f, W\rangle_p \\
&= (V\langle\nabla f, W\rangle)(p) - \langle\nabla f, \nabla_V W\rangle_p \\
&= V(W(f))(p) - \langle\nabla f, \nabla_W V + [V,W]\rangle_p \\
&= W(V(f))(p) + ([V,W]f)(p) - \langle\nabla f, \nabla_W V + [V,W]\rangle_p \\
&= W(V(f))(p) - \langle\nabla f, \nabla_W V\rangle_p \\
&= \langle\nabla_W\nabla f, V\rangle_p \\
&= \langle(Hessf)_p(w), v\rangle_p.
\end{aligned}$$

□

Com isto temos a seguinte definição

A forma bilinear simétrica $Hessf : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$Hessf(X,Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f \tag{1.15}$$

é chamada a *Forma hessiana* de f.

Proposição 1.2.9. *Se $f \in C^\infty(M)$ então $\Delta f = tr(Hessf)$.*

Demonstração. Para cada $p \in M$, seja U uma vizinhança de p em M onde esteja definido $\{E_1, ..., E_n\}$ um referencial móvel. Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}f)_p &= \sum_{i=1}^{n} \langle (Hessf)_p(E_i), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle_p \\ &= \mathrm{div}(\nabla f)(p) \\ &= (\Delta f)(p), \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos a expressão para a divergência de um campo dada em (1.4). $\square$

1.3 Curvaturas

A seguir apresentamos uma definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade deixa de ser euclidiana.

A *curvatura* R de uma variedade riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.16}$$

onde ∇ é a conexão riemanniana de M.

Proposição 1.3.1. *A curvatura R de uma variedade riemanniana goza das seguintes propriedades:*

i) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1), \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2), \end{aligned}$$

onde $f, g \in C^\infty(M)$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

ii) Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é linear, isto é,

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W, \\ R(X,Y)(fZ) &= fR(X,Y)Z, \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde $f \in C^\infty(M)$ e $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Veja a Proposição 2.2 no Capítulo 4 de [5]. □

Proposição 1.3.2. *(Primeira Identidade de Bianchi). Para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vale*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0. \tag{1.18}$$

Demonstração. Veja a Proposição 2.4, Capítulo 4 de [5]. □

Denotaremos $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = (X,Y,Z,T)$.

Proposição 1.3.3. *Para quaisquer $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ vale:*

a) $(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0$;

b) $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$;

c) $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$;

d) $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$.

Demonstração. Veja a Proposição 2.5, Capítulo 4 de [5]. □

Intimamente relacionado com o operador curvatura está a *curvatura seccional.* Dado um espaço vetorial V, indicaremos $|x \wedge y|$ a expressão $\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$, que representa a área do paralelogramo bidimensional gerado pelo par de vetores $x, y \in V$.

Proposição 1.3.4. *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional de espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2} \tag{1.19}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Ver a Proposição 3.1 no Capítulo 4 de [5]. □

Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado *Curvatura Seccional* de σ em p.

Definamos uma aplicação $\mathrm{Ric} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ por

$$\mathrm{Ric}(x, y) = tr\{z \to R(x, z)y\}. \tag{1.20}$$

Segue da Proposição 1.3.1 que Ric é bilinear.

Escolhendo x unitário e uma base ortonormal $\{z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n = x\}$ para T_pM temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(x, y) &= \sum_i \langle R(x, z_i)y, z_i\rangle \\ &= \sum_i \langle R(y, z_i)x, z_i\rangle = \mathrm{Ric}(y, x) \end{aligned} \tag{1.21}$$

isto é, Ric é simétrica. A forma bilinear Ric é às vezes chamada de *Tensor de Ricci.*

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM, $\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\}$ uma base ortonormal do hiperplano de T_pM ortogonal a x e consideremos a seguinte soma

$$Ric_p(x) := \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i\rangle,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n - 1. \tag{1.22}$$

Tal expressão é denominada *Curvatura de Ricci* na direção x.

Note que vale $Ric_p(x) = \mathrm{Ric}(x, x)$ e fica demonstrado que $Ric_p(x)$ está intrinsecamente definida, já que o traço de um operador linear não depende da base ortonormal escolhida.

Da definição acima segue que $Ric_p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} K(x, z_i)$, onde $K(x, z_i)$ é a curvatura seccional do plano gerado pelos vetores $\{x, z_i\}$ em p.

1.4 Imersões Isométricas e Segunda Forma Fundamental

Uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ entre variedades M^m e N^n variedades é uma *imersão* se $df_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, f é um homeomorfismo sobre $f(M) \subset N$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que f é um *mergulho*. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma *subvariedade* de N. Se $f : M^m \to N^n$ é uma imersão então $m \leq n$; a diferença $n - m$ é chamada a *codimensão* da imersão f.

Dizemos ainda que um difeomorfismo $f : M \to N$ entre variedades riemannianas é chamado uma *isometria* se

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)} \tag{1.23}$$

para todo $p \in M$, $u, v \in T_pM$. Dizemos que $f : M \to N$ é uma *isometria local* em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : M \to f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo a expressão (1.23).

Seja M^n uma variedade imersa em N^{n+k}. Se N tem uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M por (1.23). Daí a métrica de M é chamada então a métrica *induzida* por f, e f é uma *imersão isométrica*. Além disso, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Para simplificar a notação identificamos $U \approx f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$ com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. O produto interno em $T_p\overline{M}$ o decompõe na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}, \tag{1.24}$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_pM$, $p \in M$, podemos escrever $v = v^T + v^N$, $v^T \in T_pM$, $v^N \in (T_pM)^{\perp}$. v^T é a componente tangencial e v^N a componente normal de v. Tal decomposição é diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por $(p, v) \to (p, v^T)$ e $(p, v) \to (p, v^N)$ são diferenciáveis.

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T. \tag{1.25}$$

É possível provar que esta é a conexão riemanniana relativa à métrica induzida de M.

Para definir a segunda forma fundamental da imersão $f : M \to \overline{M}$ convém definir o campo local em $\overline{M}$ normal a M

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y, \tag{1.26}$$

onde X, Y são campos locais em M e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ as extensões locais correspondentes em $\overline{M}$. $B(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.

A seguir indicamos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em U normais a $f(U) \approx U$.

Proposição 1.4.1. *Se X, $Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ dada por $B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.*

Demonstração. Veja a Proposição 2.1, Capítulo 6 de [5]. □

Segue que a aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta\rangle, \;\; x, y \in T_pM$$

é uma forma bilinear e simétrica para quaisquer $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$.

A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x) \tag{1.27}$$

é chamada a *segunda forma fundamental* de f em p segundo o vetor normal η.

Às vezes utiliza-se o termo segunda forma fundamental para designar a aplicação B. À aplicação bilinear H_η fica associada um único operador linear auto-adjunto $S_\eta : T_pM \to T_pM$ conhecido como *operador de Weingartein* dado por

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta\rangle \tag{1.28}$$

Proposição 1.4.2. *Sejam $p \in M$, $x \in T_pM$, $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ e N uma extensão local de η normal a M. Então,*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Veja a Proposição 2.3 no capítulo 6 de [5]. □

Definição 1.4.1. *Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é **mínima** se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ tem-se que traço $S_\eta = 0$.*

Escolhendo um referencial ortonormal $E_1, ..., E_m$ de vetores em $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$, onde U é uma vizinhança de p na qual f é um mergulho, podemos escrever em p,

$$B(x, y) = \sum_i H_i(x, y)E_i, \;\; x, y \in T_pM \;\;, i = 1, ..., m,$$

onde $H_i = H_{E_i}$. Neste caso temos que o vetor normal dado por

$$\vec{H} = \sum_i (\text{traço } S_i)E_i,$$

onde $S_i = S_{E_i}$ não depende do referencial escolhido. O vetor $\vec{H}$ é chamado vetor curvatura média de f. Note que f é mínima se, e só se, $\vec{H}(p) = 0$, para todo $p \in M$. A razão da palavra mínima neste contexto é que tais imersões minimizam o volume da métrica induzida.

Consideremos o caso particular em que a codimensão é 1, isto é, $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$; $f(M) \subset \overline{M}$ é denominada uma *hipersuperfície*. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$; $|\eta| = 1$. Como $S_\eta : T_pM \to T_pM$ é auto-ajunta, pelo teorema espectral, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM com autovalores reais correspondentes $\lambda_1, ..., \lambda_n$, isto é, $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Se M e $\overline{M}$ são ambas orientáveis e orientadas então o vetor η fica univocamente determinado, se exigirmos que, sendo $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base na orientação de M, $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de $\overline{M}$. Neste caso, denominamos os $e_i's$ *direções principais* e os $\lambda_i's := k_i's$ *curvaturas principais* de M em $\overline{M}$ no ponto p.

As expressões

$$det(S_\eta) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n \tag{1.29}$$

e

$$(\lambda_1 + ... + \lambda_n) \tag{1.30}$$

são denominadas *curvatura de Gauss-Kronecker* e *curvatura média* de M em $\overline{M}$ no ponto p respectivamente.

Teorema 1.4.1. *(Gauss).Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então,*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2. \tag{1.31}$$

Demonstração. Veja o Teorema 2.5 no Capítulo 6 de [5]. □

No caso de uma hipersuperfície $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ a fórmula de Gauss admite uma expressão mais simples. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, $|\eta| = 1$. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para o qual $S_\eta = S$ é diagonal, isto é, $S(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, ..., n$, onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os autovalores de S. Então, $H_\eta(e_i, e_i) = \langle S(e_i), e_i\rangle = \lambda_i$ e $H_\eta(e_i, e_j) = \langle S(e_i), e_j\rangle = 0$ se $i \neq j$. Portanto, (1.31) se escreve

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j \tag{1.32}$$

Agora fixando um campo normal unitário η sobre M, a *curvatura média* de f na direção de η é a função suave $H : M \to \mathbb{R}$ tal que $-H\eta$ é o vetor curvatura média de f.

Exemplo 1.4.1. *(Curvatura de $\mathbb{S}^n$) Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Oriente $\mathbb{S}^n$ pelo campo normal unitário $N(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|x| = 1$. A aplicação normal de Gauss é dada então por $-id_{\mathbb{S}^n}$. Decorre daí que a aplicação auto-adjunta associada a H_N tem todos os seus autovalores iguais a 1. Isto significa que para todo $p \in \mathbb{S}^n$, todo vetor $v \in T_p\mathbb{S}^n$ é um autovetor. Donde segue de (1.32) que a curvatura seccional de $\mathbb{S}^n$ é igual a 1.*

2 Resultados Auxiliares

Neste capítulo trataremos sobre os Teoremas de Bonnet-Myers e Frankel e a Fórmula de Reilly.

2.1 Grupo Fundamental e Teorema de Bonnet-Myers

Aqui introduziremos as noções de homotopia, grupo fundamental e recobrimento. Para mais detalhes veja [8]. Tais definições serão empregadas no teorema de Bonnet-Myers e seu Corolário.

Sejam X e Y espaços topológicos. Duas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ dizem-se *homotópicas* quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \to Y, \quad I = [0,1]$, tal que

- $H(x, 0) = f(x)$;
- $H(x, 1) = g(x)$,

para todo $x \in X$. A aplicação H chama-se uma *homotopia* entre f e g. Denota-se $H : f \simeq g$ ou simplesmente $f \simeq g$.

Seja $A \subset X$ um subespaço topológico. Diz-se que f *é homotópica a* g *relativamente ao subespaço* A e escreve-se $f \simeq g \quad (\mathrm{rel.}A)$ quando existe uma homotopia $H : f \simeq g$ tal que $H(x,t) = f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Diremos que (X, A) é um par de espaços topológicos quando A for subespaço de X. Dados pares (X, A) e (Y, B), uma aplicação contínua $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação contínua $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$.

Dadas aplicações contínuas $f, g : (X, A) \to (Y, B)$, uma *homotopia de pares* entre f e g é uma aplicação contínua

$$H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Um caso particular importante ocorre quando $A = \partial I$ e $B = y_0 \in Y$. Neste caso y_0 é chamado *ponto base* de Y.

Seja M uma variedade, em particular sabemos que M é um espaço topológico. Consideremos os pares (M, p) com $p \in M$. Os caminhos fechados $a : (I, \partial I) \to (M, p)$ serão chamados caminhos fechados com base no ponto p.

Definição 2.1.1. *O subconjunto $\pi_1(M, p)$ formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com base em p, munido com a operação produto de classes, constitui um grupo chamado o grupo fundamental do espaço M com ponto base em p.*

Proposição 2.1.1. *Se p_1 e p_2 pertencem à mesma componente conexa por caminhos de M então $\pi_1(M, p_1)$ e $\pi_1(M, p_2)$ são isomorfos. Mais precisamente, cada classe de homotopia γ de caminhos que ligam p_1 a p_2 induz um isomorfismo $\overline{\gamma} : \pi_1(M, p_1) \to \pi_1(M, p_2)$, dado por $\overline{\gamma}(\alpha) : \gamma\alpha\gamma^{-1}$.*

Demonstração. Veja Proposição 2.4, Capítulo 2 de [8]. □

Corolário 2.1.1. *Se M é conexa por caminhos então, para quaisquer pontos bases $p_1, p_2 \in M$, os grupos fundamentais $\pi_1(M, p_1)$ e $\pi_1(M, p_2)$ são isomorfos.*

Visto isso, é claro que $\pi_1(M, p)$ depende apenas da componente conexa por caminhos do ponto p no espaço M. Por isso é natural, ao estudar o grupo fundamental, considerar apenas espaços conexos por caminhos. Nesta situação omite-se o ponto base e denotamos o grupo fundamental por $\pi_1(M)$. Diremos que o grupo $\pi_1(M)$ é finito se o conjunto $\pi_1(M)$ é finito. A cardinalidade $|\pi_1(M)|$ é a ordem do grupo.

Sejam $\tilde{X}$ e X espaços topológicos (inclusive variedades) uma aplicação $p : \tilde{X} \to X$ chama-se uma aplicação de recobrimento (ou simplesmente recobrimento) quando cada ponto $x \in X$ pertence a um aberto $V \subset X$ tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ é uma reunião de abertos U_α, dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por p homeomorficamente sobre V. Cada aberto V desse tipo chama-se uma vizinhança distinguida. O espaço $\tilde{X}$ chama-se um espaço de recobrimento de X e, para cada $x \in X$ o conjunto $p^{-1}(x)$ chama-se a fibra sobre x.

Um recobrimento $p : \tilde{X} \to X$ com $\tilde{X}$ simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos chama-se um recobrimento universal. Nesta situação $\tilde{X}$ recobre qualquer outro recobrimento $\tilde{Y}$ do espaço X.

Agora, enunciamos o *Teorema de Bonnet-Myers* cujo corolário é importante pra nós.

Teorema 2.1.1. *(Bonnet-Myers) Seja M^n uma variedade Riemanniana completa. Suponhamos que a curvatura de Ricci de M satisfaz*

$$Ric_p(v) \geqslant \frac{1}{r^2} > 0, \tag{2.1}$$

para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM$, $|v| = 1$. Então M é compacta e o diâmetro $diam(M) \leqslant \pi r$.

Demonstração. Veja o Teorema 3. 1, Capítulo 9 de [5]. □

Corolário 2.1.2. *Seja M uma variedade Riemanniana completa com $Ric_p(v) \geqslant \delta > 0$, para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM$. Então, o recobrimento universal de M é compacto. Em particular, o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é finito.*

Demonstração. Veja o Corolário 3.2, Capítulo 9 de [5]. □

2.2 Teorema de Frankel sobre Interseção de Mínimas

A seguir provaremos a primeira e segunda variação de comprimento. Iniciamos com a definição de variação.

Definição 2.2.1. *Seja $c : [0, l] \to M$ uma curva diferenciável por partes em uma variedade M. Uma variação de c é uma aplicação contínua $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, l] \to M$ tal que:*

a) $V(0, t) = c(t), \quad t \in [0, l]$,

b) Existe uma subdivisão de $[0, l]$ por pontos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k+1} = l$, tal que a restrição de V a cada $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \cdots, k$ é diferenciável.

Se V é diferenciável, a variação diz-se diferenciável.

Para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a curva parametrizada $V_s : [0, l] \to M$ dada por $V_s(t) = V(s, t)$ é chamada uma *curva da variação* e para cada t fixado a curva parametrizada diferenciável $V_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ dada por $V_t(s, t)$ chamamos de *curva transversal da variação*. O vetor velocidade de uma curva transversal em $s = 0$, ou seja, $E(t) = \frac{\partial V}{\partial s}(0, t)$ é um campo variacional diferenciável por partes ao longo de $c(t)$ e é chamado *campo variacional de V*.

Proposição 2.2.1. *Seja $c : [0, l] \to M$ uma geodésica de velocidade unitária e $V(s, t)$ uma variação de c com a propriedade que $V(0, t) = c(t)$ e o campo variacional $\frac{\partial V}{\partial s}(0, t) = E(t)$ é um campo normal, unitário e paralelo ao longo de c, então para o funcional comprimento de arco*

$$L(s) = \int_0^l \left| \frac{\partial V}{\partial t}(s, t) \right| dt$$

temos

$$\frac{dL}{ds}(0) = 0,$$

$$\frac{d^2 L}{ds^2}(0) = -\int_0^l K\left(E, \frac{dc}{dt}\right) dt + \left\langle \frac{dc}{dt}, \left(\nabla_{\frac{\partial V}{\partial s}} \frac{\partial V}{\partial s}\right)(0, t) \right\rangle \Big|_0^l$$

Demonstração. Derivando sob o sinal de integral e usando a simetria da conexão riemanniana, temos

$$\begin{aligned}\frac{dL}{ds}(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^l \left\langle \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^l \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle dt \\ &= \int_0^l \left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle \left\langle \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^l \left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle \left\langle \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle^{-\frac{1}{2}} dt\end{aligned}$$

Em $s = 0$,

$$\frac{dL}{ds}(0) = \int_0^l \left\langle \frac{D}{dt}E(t), \frac{dc}{dt}\right\rangle \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right\rangle^{-\frac{1}{2}} dt = 0,$$

já que $E(t)$ é paralelo a c.

Derivamos novamente $\frac{dL}{ds}(s)$ para obter

$$\begin{aligned}\frac{d^2L}{ds^2}(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^l \left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle \left\langle \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^l \frac{d}{ds}\left(\left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle \left\langle \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle^{-\frac{1}{2}}\right) dt \\ &= \int_0^l \frac{d}{ds}\left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle \left\langle \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle^{-\frac{1}{2}} dt \\ &+ \int_0^l \left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle \frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle^{-\frac{1}{2}} dt.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Em $s = 0$, temos

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = \int_0^l \frac{d}{ds}\left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}(0,t), \frac{\partial V}{\partial t}(0,t)\right\rangle dt. \tag{2.3}$$

Agora, omitindo-se $(0, t)$, observe que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle &= \left\langle \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{D}{ds}\frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle - \left\langle \frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle + \left\langle \frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle \\ &= \left\langle -R\left(\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle + \frac{d}{dt}\left\langle \frac{D}{ds}\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right\rangle.\end{aligned}$$

Onde na terceira igualdade usamos

$$\frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial V}{\partial s} + R\left(\frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{\partial V}{\partial s},$$

e o fato que c é uma geodésica normalizada. O resultado segue. □

Foi provado em [9] que uma superfície completa com curvatura de Ricci positiva, toda geodésica precisa se interceptar, mais tarde tal resultado foi provado pra dimensões maiores por Frankel [10] (veja também [11]) com a ajuda da fórmula da segunda variação do comprimento de curvas.

Teorema 2.2.1. *(Frankel) Seja M^{n+1} uma variedade Riemanniana completa, conexa de curvatura de Ricci positiva. Se N_1 e N_2 são duas hipersuperfícies mínimas imersas de N^{n+1}, cada imersão como subconjunto fechado, e seja N_1 compacta. Então N_1 e N_2 devem se intersectar.*

Demonstração. Suponha que $N_1, N_2 \subset M$ são duas hipersuperfícies mínimas e que $p_i \in M_i$, $i = 1, 2$ são pontos nestas hipersuperfícies que estão mais próximos um do outro. Se $p_1 \neq p_2$, escolha uma geodésica de velocidade constante unitária $c : [0, l] \to M$ de p_1 a p_2. Em seguida tome um referêncial ortonormal de campos paralelos $E_1, ..., E_n$ ao longo de c com $E_n = \frac{dc}{dt}$ e de modo que os pontos finais de $E_1, ..., E_{n-1}$ sejam tangentes às hipersuperfícies. Agora tome variações $V_1, ..., V_{n-1}$ com a propriedade que $V_j(s, 0) \in N_1$, $V_j(s, l) \in N_2$ para s pequeno e $\frac{\partial V_j}{\partial s}(0, t) = E_j$.

Tomando somatório para as $n - 1$ variações

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2 L_j}{ds^2}(0) = \sum_{j=1}^{n-1} -\int_0^l K\left(E_j, \frac{dc}{dt}\right) dt + \sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \frac{dc}{dt}, \left(\nabla_{\frac{\partial V_j}{\partial s}} \frac{\partial V_j}{\partial s}\right)(0, t) \right\rangle \Big|_0^l.$$

Agora, note que

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \frac{dc}{dt}, \left(\nabla_{\frac{\partial V_j}{\partial s}} \frac{\partial V_j}{\partial s}\right)(0, 0) \right\rangle \quad , \quad \sum_{j=1}^{n-1} \left\langle \frac{dc}{dt}, \left(\nabla_{\frac{\partial V_j}{\partial s}} \frac{\partial V_j}{\partial s}\right)(0, l) \right\rangle$$

são as curvaturas médias de N_1 em p_1 e N_2 em p_2 respectivamente. Portanto, suas contribuições são nulas e obtemos uma contradição com o fato de que c é uma geodésica minimizante.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2 L_j}{ds^2}(0) &= \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^l K\left(E_j, \frac{dc}{dt}\right) dt \\ &= -\int_0^l R\left(E_j, \frac{dc}{dt}\right) dt < 0. \end{aligned}$$

□

Temos o seguinte corolário.

Corolário 2.2.1. *Uma hipersuperfície mínima compacta mergulhada em uma variedade Riemanniana completa e conexa de curvatura de Ricci estritamente positiva é conexa.*

2.3 Fórmula de Reilly

Seja M^n uma Variedade Riemanniana com bordo suave ∂M. Seja f uma função definida sobre M a qual é suave até ∂M. Denotemos $z = f|_{\partial M}$ e $u = (\partial f/\partial \eta)|_{\partial M}$ onde $\partial f/\partial \eta$ é a derivada de f na direção da normal apontando para fora de M. $\overline{\Delta} f$ e $\overline{\nabla} f$ denotam o Laplaciano e o Gradiente de f com respeito a métrica Riemanniana de M, enquanto que Δf e ∇f denotam o Laplaciano e o Gradiente de f (definido sobre ∂M) com respeito a métrica Riemanniana induzida sobre ∂M. Para cálculos locais nesta seção, $\{E_1, \cdots, E_{n-1}, E_n = \eta\}$ é um referencial ortonormal para M tal que, em um ponto $q \in \partial M$ $E_1, \cdots, E_{n-1}$ são tangentes a ∂M e $E_n = \eta$ é o vetor normal apontando para fora de M. Vamos denotar $f_{ij} = \overline{Hess} f(E_i, E_j)$, $|\overline{Hess} f|^2 = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2$. Seja $j : \partial M \to M$ a imersão do bordo ∂M em M pela inclusão então $II_\eta(v, w) = -\langle \overline{\nabla}_v \eta, w\rangle$ é a segunda forma fundamental da imersão. H é curvatura média de M e o sinal é escolhido tal que a esfera no espaço Euclidiano tenha curvatura média positiva.

Para o teorema a seguir se $T : V \to V$ é um operador linear auto-adjunto em um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno, denotamos $|T|^2 = \text{traço}(T^2)$, o quadrado da norma de Hilbert-Schmidt de T. Assim, sendo $\{E_1, ..., E_n\}$ uma base ortonormal de V, segue que

$$|T|^2 = \sum_{i=1}^n \langle T^2(E_i), E_i\rangle = \sum_{i=1}^n |T(E_i)|^2 \tag{2.4}$$

Teorema 2.3.1. ***(Fórmula de Bochner)*** *Se M^n é uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$, então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \Delta(\nabla f)\rangle + |Hess f|^2 \tag{2.5}$$

Demonstração. Fixe $p \in M$ e seja $\{E_1, \cdots, E_n\}$ um referencial móvel em uma vizinhança $U \subset M$ de p, geodésico em p. Então usando (1.3) e as propriedades de conexão temos sucessivamente em p

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Big((Hess|\nabla f|^2)(E_i), E_i\Big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n E_i(E_i\langle \nabla f, \nabla f\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} E_i \langle \nabla f, \nabla f\rangle + E_i(2\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle)) \\
&= \sum_{i=1}^n E_i\langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n (\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle + \langle \nabla_{E_i}\nabla f, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, \nabla f\rangle + |\text{Hess} f|^2,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

onde na última igualdade usamos (2.4). Agora seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, da definição de curvatura

$$\sum_{i=1}^{n}\langle R(X,E_i)\nabla f, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\nabla_X\nabla f - \nabla_X\nabla_{E_i}\nabla f + \nabla_{[X,E_i]}\nabla f, E_i\rangle. \tag{2.7}$$

Como o referencial é geodésico em p temos que $(\nabla_X E_i)(p) = 0$. Usando isto e da Proposição 1.2.9 temos em p

$$\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X\nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle = X\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_i\rangle\right) = X(\Delta f) = \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle. \tag{2.8}$$

Usando agora, além do fato de referencial ser geodésico em p, que o operador Hess$f$ é auto-adjunto e lembrando que ∇ denota a conexão de Levi-Civita , obtemos sucessivamente em p,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\nabla_X\nabla f + \nabla_{[X,E_i]}\nabla f, E_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\langle \nabla_{E_i}\nabla_X\nabla f, E_i\rangle + \langle \nabla_{[X,E_i]}\nabla f, E_i\rangle\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(E_i\langle \nabla_X\nabla f, E_i\rangle + \langle \nabla_{[X,E_i]}\nabla f, E_i\rangle\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(E_i\langle (\mathrm{Hess}f)(X), E_i\rangle + \langle (\mathrm{Hess}f)([X,E_i]), E_i\rangle\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(E_i\langle X, (\mathrm{Hess}f)(E_i)\rangle + \langle [X,E_i], (\mathrm{Hess}f)(E_i)\rangle\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(E_i\langle X, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle + \langle \nabla_X E_i - \nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(E_i\langle X, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle - \langle \nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}\nabla f\rangle\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle X, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f\rangle.
\end{aligned}\tag{2.9}$$

Substituindo (2.8) e (2.9) em (2.7) obtemos

$$\sum_{i=1}^{n}\langle R(X,E_i)\nabla f, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, X\rangle - \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle,$$

donde,

$$\sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\nabla f, X\rangle = \mathrm{Ric}(X,\nabla f) + \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle. \tag{2.10}$$

Substituindo esta última expressão (2.10) em (2.6) e tomando $X = \nabla f$, obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \mathrm{Ric}(\nabla f,\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |\mathrm{Hess}f|^2.$$

□

Usando a fórmula de Bochner, provamos a seguinte versão da Fórmula de Reilly [12]:

Teorema 2.3.2. ***(Fórmula de Reilly)***

$$\begin{aligned}\int_M (\overline{\Delta} f)^2 - |\overline{Hess} f|^2 \, dM &= \int_M Ric(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) \, dM \\ &+ \int_{\partial M} (\Delta z - Hu)u - \langle \nabla z, \nabla u \rangle - II_\eta(\nabla z, \nabla z) \, dS_M.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Demonstração. Na prova deste teorema omitiremos o elemento de volume de M e o elemento de área de ∂M. Integrando a Fórmula de Bochner, temos

$$\int_M \frac{1}{2}\overline{\Delta}|\overline{\nabla} f|^2 - \sum_{i=1}^n f_i(\overline{\Delta} f)_i = \int_M |\overline{Hess} f|^2 + Ric(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f). \tag{2.12}$$

Usando as fórmulas (1.12) e (1.11) respectivamente, temos

$$\begin{aligned}\int_M \frac{1}{2}\overline{\Delta}|\overline{\nabla} f|^2 &= \int_{\partial M} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}(|\overline{\nabla} f|^2) = \int_{\partial M} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}(\langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f \rangle) = \int_{\partial M} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sum_{i=1}^n f_i f_i\right) \\ &= \int_{\partial M} \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n f_{i\eta} f_i + \sum_{i=1}^n f_i f_{i\eta}\right) = \int_{\partial M}\left(\sum_{i=1}^n f_i f_{i\eta}\right)\end{aligned} \tag{2.13}$$

e

$$\int_M \sum_{i=1}^n f_i(\overline{\Delta} f)_i = -\int_M (\overline{\Delta} f)^2 + \int_{\partial M} \overline{\Delta} f \frac{\partial f}{\partial \eta} = -\int_M (\overline{\Delta} f)^2 + \int_{\partial M} f_\eta \sum_{i=1}^n f_{ii} \tag{2.14}$$

Reescrevendo o primeiro membro de (2.12) substituindo as expressões (2.13) e (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}\int_M \frac{1}{2}\overline{\Delta}|\overline{\nabla} f|^2 - \sum_{i=1}^n f_i(\overline{\Delta} f)_i &= \int_{\partial M} \sum_{i=1}^n f_i f_{i\eta} - f_\eta \sum_{i=1}^n f_{ii} + \int_M (\overline{\Delta} f)^2 \\ &= \int_{\partial M} \sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{i\eta} - f_\eta \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} + \int_M (\overline{\Delta} f)^2,\end{aligned} \tag{2.15}$$

onde a última igualdade segue de

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} \sum_{i=1}^n f_i f_{i\eta} - f_\eta \sum_{i=1}^n f_{ii} &= \int_{\partial M} \sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{i\eta} + f_n f_{n\eta} - f_\eta \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} - f_\eta f_{nn} \\ &= \int_{\partial M} \sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{i\eta} - f_n \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii},\end{aligned}$$

pois $f_n = \langle \overline{\nabla} f, E_n \rangle = \langle \overline{\nabla} f, \eta \rangle = f_\eta$ e $f_{nn} = \overline{Hess} f(E_n, E_n) = f_{\eta\eta}$.

No bordo ∂M, se $i \neq n$ temos que

$$f_{i\eta} = (\overline{Hess} f)(E_i, E_n) = E_i(E_n(f)) - (\overline{\nabla}_{E_i} E_n) f = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij} z_j, \tag{2.16}$$

pois, $E_n(f) = \frac{\partial f}{\partial \eta} = u \;\Rightarrow\; E_i(E_n(f)) = u_i$ e, escrevendo $\overline{\nabla}_{E_i} E_n$ na base $\{E_1, \cdots, E_{n-1}\}$, para cada i fixado temos

$$\overline{\nabla}_{E_i} E_n = \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij} E_j \Rightarrow h_{ij} = \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_n, E_j \rangle = -II_\eta(E_i, E_j).$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} &= \sum_{i=1}^{n-1} \overline{Hess} f(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n-1} [E_i(E_i(f)) - (\overline{\nabla}_{E_i} E_i)(f)] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i} E_i)(f) - [\overline{\nabla}_{E_i} E_i - \nabla_{E_i} E_i](f)] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} [E_i(E_i(f)) - (\nabla_{E_i} E_i)(f) - B(E_i, E_i)(f)] \\
&= \Delta z - \eta H(f) \\
&= \Delta z - Hu
\end{aligned} \tag{2.17}$$

onde, $\nabla_{E_i} E_i = (\overline{\nabla}_{E_i} E_i)^T$.

Substituindo (2.16) e (2.17) em (2.15), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} \sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{i\eta} - f_\eta \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} + \int_M (\overline{\Delta} f)^2 &= \int_{\partial M} \sum_{i=1}^{n-1} f_i \left(u_i - \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij} z_j \right) - f_\eta (\Delta z - Hu) \\
&+ \int_M (\overline{\Delta} f)^2 \\
&= \int_{\partial M} \langle \nabla z, \nabla u \rangle + II_\eta(\nabla z, \nabla z) - (\Delta z - Hu) u \\
&+ \int_M (\overline{\Delta} f)^2.
\end{aligned}$$

Por fim, substituindo esta última expressão em (2.12), obtemos a Fórmula de Reilly.

□

3 Teorema principal e Aplicações

3.1 Problema de Autovalor

A seguir faremos uma breve discussão sobre problema de autovalores do Laplaciano em variedades Riemannianas compactas.

Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo (possivelmente vazio) e $\Delta : C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$ o operador Laplaciano sobre M. Um número real λ é chamado *autovalor* de Δ se existe uma função suave u sobre M, não identicamente nula, tal que

$$\Delta u + \lambda u = 0. \tag{3.1}$$

A função u é chamada uma *autofunção* correspondente ao autovalor λ.

A expressão (3.1) acima é também conhecida como *Problema Fechado de Autovalor*. Quando $\partial M \neq \emptyset$, temos interesse nos seguintes problemas de autovalor.

Problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u, & \text{em} \quad M, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial M. \end{cases} \tag{3.2}$$

Problema de Neumann:

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u, & \text{em} \quad M, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{sobre} \quad \partial M. \end{cases} \tag{3.3}$$

onde η é o vetor normal sobre ∂M apontando para o interior.

Se $u \in C^{\infty}(M)$ é uma solução não trivial de um destes problemas então o autovalor correspondente λ é um número real não negativo. Com efeito, tomando $f = g = u$ na expressão (1.11), temos

$$\begin{aligned} \int_M [u\Delta u + \langle \nabla u, \nabla u\rangle] dM &= \int_{\partial M} u\langle \nabla u, \eta\rangle dS_M = 0 \\ &\Rightarrow \int_M |\nabla u|^2 dM = \lambda \int_M u^2 dM. \end{aligned}$$

A existência de autovalores para o operador Laplaciano é dada pelo teorema a seguir, cuja prova pode ser encontrada em [13].

Teorema 3.1.1. *(Teorema Espectral). Seja M uma variedade riemanniana compacta. Então valem as seguintes propriedades:*

i) O conjunto dos autovalores do operador Laplaciano $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ consiste de uma sequência infinita

$$(0 \leqslant) \quad \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant +\infty;$$

ii) Cada autovalor λ_i tem multiplicidade finita e os auto-espaços correspondentes a autovalores distintos são ortogonais no sentido de $L_1^2(M)$, onde $L_1^2(M)$ é o complemento de $C^\infty(M)$ com respeito à norma

$$||\varphi||^2 = \int_M \varphi^2 dM + \int_M |\nabla\varphi|^2 dM.$$

iii) A soma direta dos auto-espaços correspondentes é densa em $L^2(M)$ na topologia da norma e densa em $C^k(M)$ na topologia da convergência uniforme, $k = 1, 2, \cdots$

A seguir exibiremos o *Princípio do Min-Max*, cujos detalhes podem ser vistos no Capítulo 3 de [14].

Teorema 3.1.2. *(Princípio do Min-Max) Sejam M uma variedade riemanniana completa e f_i as autofunções do Laplaciano Δ correspondente aos autovalores λ_i, isto é,*

$$\Delta f_i = -\lambda_i f_i.$$

Para os problemas fechado de autovalor (3.1), Direchlet (3.2) e Neumann (3.3), definamos

$$\mathscr{H} = \left\{ f \in L_1^2(M); \int_M f = 0 \right\}, \tag{3.4}$$

então Δ é um operador auto-adjunto sobre $\mathscr{H}$ e podemos determinar uma base ortonormal $\{f_i\}$, $f_i \in C^\infty(M) \cap \mathscr{H}$ para estes problemas tal que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= inf \left\{ \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2}; f \in \mathscr{H} \right\} \qquad (3.5) \\ \lambda_i &= inf \left\{ \frac{\int_M |\nabla f|^2}{\int_M f^2}; f \in \mathscr{H}, \int_M f f_j = 0, j = 1, \cdots i-1 \right\} \end{aligned}$$

Em particular, também temos a *Desigualdade de Poincaré*

$$\int_M |\nabla f|^2 \geqslant \lambda_1 \int_M f^2, \ \forall f \in \mathscr{H}. \tag{3.6}$$

Agora relembraremos um resultado importante da teoria dos operadores lineares de segunda ordem elípticos, que é a existência de soluções para o problema de contorno com condições de fronteira de Dirichlet.

Teorema 3.1.3. *Seja M^n uma variedade Riemanniana e $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ o operador Laplaciano sobre M. Se $\Omega \in M$ é um domínio limitado com bordo suave e $z \in C^0(\partial\Omega)$ então o Problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta f = 0, & em \quad \Omega, \\ f = z, & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

tem uma única solução $f \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$. Além disso, se $z \in C^\infty(\Omega)$, então $f \in C^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Veja Teorema 6.13 de [15]. □

3.2 Teorema Principal

Para a prova do principal resultado dessa seção, precisamos dar condições para que uma hipersuperfície divida uma variedade em dois pedaços, em inglês diz-se que tal hipersuperfície é "two-sided". Diferentemente de orientabilidade, esta não é uma propriedade intrinseca e depende do ambiente. Por exemplo: $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ é orientável e divide $\mathbb{S}^3$ em dois pedaços; $\mathbb{R}P^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{S}^1$ é não-orientável e divide o ambiente em dois pedaços e $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{S}^1$ é orientável e não divide o ambiente em dois lados.

Lema 3.2.1. *Seja N uma variedade $(n+1)$-dimensional simplesmente conexa. Se M é uma hipersuperfície compacta conexa e mergulhada em N. Então M divide N em dois pedaços.*

Demonstração. De fato, suponha que M não divide N em dois. Daí tome um arco α transversal a M em um único ponto. Como M é conexa e só tem um "pedaço", existe outro arco β em N disjunto de M que fica em sua vizinhança regular e tal que forma um disco quando conectamos com os pontos iniciais e finais de α união com o seu interior. Denotamos por $\gamma = \alpha \cup \beta$ o bordo desse disco que intersecta M transversalmente em apenas um ponto. Iremos supor que γ é suave. Como N é simplesmente conexa, então existiria uma função $f : D \to N$ é tal que a restrição $f : \mathbb{S}^1 = \partial D \to N$ é homeomorfa a γ. Como f pode ser tomado transversa a M, o Teorema de bordo da Seção 4 do Capítulo de 2 de [16] diz que o número de interseção *mod 2* de f com M é zero, e portanto a interseção $\partial D \cap M$ teria que ser par, donde chegamos a uma contradição. □

Observe ainda da prova acima que M é orientável. De fato, como N é simplesmente conexo, N é orientável (Veja, por exemplo o Corolário 6.7.1 do capítulo 6 de [8]). Daí M é orientável se, e somente se, M divide N em dois pedaços.

Mostraremos a seguir uma estimativa para o primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano de uma hipersuperfície mergulhada M em uma variedade Riemanniana N compacta com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante positiva k.

Como comentado anteriormente, será uma modificação do resultado em [1] pois retiramos a hipótese de orientabilidade tanto de M quanto de N.

Teorema 3.2.1. ***(Teorema Principal)*** *Seja M uma hipersuperfície mínima compacta mergulhada em uma variedade Riemanniana N^n compacta. Suponha que a curvatura de Ricci de N é limitada inferiormente por uma constante positiva k. Então $\lambda_1(M) \geqslant k/2$, onde $\lambda_1(M)$ é o primeiro autovalor do Laplaciano de M.*

Demonstração. Pelo Teorema de Hopf-Rinow (veja por exemplo Teorema 2.8 do Capítulo 7 de [5]) N é completa. Daí, como também a curvatura de Ricci de N cumpre $Ric_p(v) \geqslant k > 0$ para quaisquer $p \in N$ e $v \in T_pN, |v| = 1$, o Corolário 2.1.2 implica que N tem grupo fundamental finito. Assumamos inicialmente que N é simplesmente conexa. Como M é conexa pelo Corolário 2.2.1 e, sendo mergulhada em N, segue pelo Lema 3.2.1 que M é orientável e divide N duas componentes. Assim, temos $N \setminus M = \Omega_1 \cup \Omega_2$ onde Ω_1 e Ω_2 são componentes conexas limitadas tais que $\partial\Omega_1 = M = \partial\Omega_2$.

Seja z a primeira autofunção do Laplaciano de M, isto é, $\Delta z + \lambda_1 z = 0$, onde $\lambda_1 = \lambda_1(M)$. Pelo Teorema 3.1.3, seja f solução do problema de Dirichlet tal que

$$\begin{cases} \overline{\Delta} f = 0, & \text{em} \quad \Omega_1, \\ f = z, & \text{sobre} \quad \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, sabemos que

$$(\overline{\Delta} f)^2 = (\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot f_{ii})^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} 1^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (f_{ii})^2 = n \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{ii}^2 \leqslant n \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 = n \cdot |\overline{Hess} f|^2.$$

Isso mostra que vale $(\overline{\Delta} f)^2 \leqslant n|\overline{Hess} f|^2$. Daí, segue que

$$\int_{\Omega_1} \frac{n-1}{n} (\overline{\Delta} f)^2 d\Omega_1 \geqslant \int_{\Omega_1} (\overline{\Delta} f)^2 - |\overline{Hess} f|^2 d\Omega_1. \tag{3.8}$$

Dado um ponto $p \in \Omega_1$ qualquer e consideremos o campo $X = \frac{\overline{\nabla} f}{|\overline{\nabla} f|}$ tal que $X(p) = v$. Da limitação inferior da curvatura de Ricci $Ric_p(v) \geqslant k > 0$ onde v é normal e unitário em $T_p\Omega_1$, temos

$$Ric_p(v) = Ric\left(\frac{\overline{\nabla} f}{|\overline{\nabla} f|}, \frac{\overline{\nabla} f}{|\overline{\nabla} f|}\right) = \frac{1}{|\overline{\nabla} f|^2} Ric\left(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\right) \geqslant k.$$

Daí,

$$Ric\left(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\right) \geqslant k \cdot |\overline{\nabla} f|^2. \tag{3.9}$$

Além disso, sabemos que $H = 0$ onde H é a curvatura média de M, em particular, vale também para $\Omega_1 \subset M$. Feita essas considerações e aplicando-as à Fórmula de Reilly (2.11), obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \frac{n-1}{n} (\overline{\Delta} f)^2 d\Omega_1 \quad &\geqslant \quad \int_{\Omega_1} k \cdot |\overline{\nabla} f|^2 d\Omega_1 \\ &+ \quad \int_{\partial\Omega_1} (\Delta z) u - \langle \nabla z, \nabla u \rangle - II_\eta(\nabla z, \nabla z)\, dS_{\Omega_1}, \end{aligned}$$

onde $z = f|_{\partial\Omega_1}$ e $u = (\partial f/\partial\eta)|_{\partial\Omega_1}$ em que $\partial f/\partial\eta$ é a derivada de f na direção da normal apontando para fora de Ω_1.

Agora, de $\Delta z + \lambda_1 z = 0$ e da primeira fórmula de Green (1.11), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_1} \langle\nabla z, \nabla u\rangle dS_{\Omega_1} &= -\int_{\partial\Omega_1} u\Delta z dS_{\Omega_1} + \int_{\partial(\partial\Omega_1)} u\langle\nabla f, \eta\rangle dS_{\partial\Omega_1} \\ &= -\int_{\partial\Omega_1} u\Delta z\, dS_{\Omega_1} \\ &= \int_{\partial\Omega_1} \lambda_1 zu\, dS_{\Omega_1}. \end{aligned}$$

Como $\overline{\Delta} f = 0$ em Ω_1 então vale que

$$0 \geqslant \int_{\Omega_1} k \cdot |\overline{\nabla} f|^2\, d\Omega_1 + \int_{\partial\Omega_1} -2\lambda_1 zu\, dS_{\Omega_1} - \int_{\partial\Omega_1} II_\eta(\nabla z, \nabla z)\, dS_{\Omega_1}.$$

Podemos assumir que $-\int_{\partial\Omega_1} II_\eta(\nabla z, \nabla z)\, dS_{\Omega_1} \geqslant 0$, trocando a componente Ω_1 por Ω_2 se necessário, uma vez que

$$\int_{\partial\Omega_1} II_\eta(\nabla z, \nabla z)\, dS_{\Omega_1} = -\int_{\partial\Omega_2} II_{-\eta}(\nabla z, \nabla z)\, dS_{\Omega_2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2\, d\Omega_1 &= -\int_{\Omega_1} f\overline{\Delta} f\, d\Omega_1 + \int_{\partial\Omega_1} f\langle\nabla f, \eta\rangle\, dS_{\Omega_1} \\ &= \int_{\partial\Omega_1} f\langle\nabla f, \eta\rangle\, dS_{\Omega_1} \\ &= \int_{\partial\Omega_1} zu\, dS_{\Omega_1}. \end{aligned}$$

Daí, teremos

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \int_{\Omega_1} k \cdot |\overline{\nabla} f|^2\, d\Omega_1 - 2\lambda_1 \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2\, d\Omega_1 \\ &= (k - 2\lambda_1) \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} f|^2\, d\Omega_1. \end{aligned}$$

Desde que f é uma função não constante teremos que $k - 2\lambda_1 \leqslant 0$. Logo, concluímos que $\lambda_1 \geqslant \dfrac{k}{2}$.

Se N não é simplesmente conexa, consideramos o recobrimento universal $\tilde{N}$ de N o qual é finito com $|\pi_1(N)|$-folhas e simplesmente conexo. Introduziremos no recobrimento $\tilde{N}$ a métrica tal que $\pi : \tilde{N} \to N$ uma isometria local.

Seja $j : M \to N$ a imersão. Tomemos o levantamento $\tilde{j}$ de j , isto é, $\tilde{j} : M \to \tilde{N}$ tal que $j := \pi \circ \tilde{j}$. Como o tensor de curvatura é invariante por isometrias então $\tilde{N}$ tem curvatura de Ricci tal que $\tilde{Ric} \geqslant k > 0$. Note que o levantamento $\tilde{M}$ de M é também uma hipersuperfície mínima mergulhada e compacta. Usamos novamente o Colorário 2.2.1 agora para concluir que $\tilde{M}$ é conexa. Como $\tilde{N}$ é simplesmente conexa, a hipersupefície mergulhada e fechada $\tilde{M}$ é orientável e portanto divide $\tilde{N}$ em duas componentes. Procedemos então de maneira análoga ao caso anterior donde concluiremos que o primeiro autovalor do Laplaciano $\tilde{\Delta}$ sobre $\tilde{M}$ satisfaz $\lambda_1(\tilde{M}) \geqslant \frac{k}{2}$. Observando que o levantamento da primeira autofunção de N é ainda uma autofunção de $\tilde{N}$ teremos $\lambda_1(M) \geqslant \lambda_1(\tilde{M}) \geqslant \frac{k}{2}$.

□

Corolário 3.2.1. *Seja M uma hipersuperfície mínima compacta mergulhada de $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Então $\lambda_1(M) \geqslant (n-1)/2$.*

Demonstração. Como uma hipersuperfície compacta mergulhada em $\mathbb{S}^n$ é sempre orientável, este corolário segue do teorema anterior, pois a Curvatura de Ricci de $\mathbb{S}^n$ é $n-1$. De fato pelo Exemplo 1.4.1 a curvatura seccional de $\mathbb{S}^n$ é constante igual a 1 então temos:

$$Ric_p(v) = \sum_{i=1}^{n-1} K(v, z_i) = n - 1,$$

onde v é unitário e $\{z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n = v\}$ é uma base ortonormal para $T_p\mathbb{S}^n$. Então, basta tomar $k = n - 1$ no teorema anterior. □

Um resultado similar ao do corolário anterior fora obtido por A. Barros e G. P. Bessa em [17]. Mais precisamente eles mostraram que

$$\lambda_1(M) \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2}\rho,$$

onde $0 < \rho \leq 1$ é uma constante dependendo da solução do problema de Dirichlet associado.

3.3 Aplicações

Em [4] foi proposto o que ficou conhecido na literatura como *Conjectura de Yau*, a saber:

É verdade que o primeiro autovalor para o operador de Laplace-Beltrami em uma hipersuperfície mínima mergulhada de $\mathbb{S}^{n+1}$ é n?

Conforme o Corolário 3.2.1, vemos que tal resultado está relativamente próximo da Conjectura de Yau e pode ser considerado como uma evidência que tal conjectura seja verdadeira. Não se tem uma resposta a conjectura nem mesmo para $n = 2$. Uma resposta afirmativa implicaria que a área de superfícies mínimas mergulhadas em $\mathbb{S}^3$ poderia ter uma limitação superior dependendo apenas do gênero. Esta é uma consequência do teorema de Yang-Yau que veremos a seguir.

Em [2] foi determinado uma cota superior para a área de uma superfície mínima mergulhada em $\mathbb{S}^3$ apenas em termo do gênero, mais especificamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.1. *Seja M uma Superfície de Riemann orientável de gênero $g(M)$ e área Área(M). Então*

$$\lambda_1(M)\textit{Área}(M) \leqslant 8\pi(g(M)+1).$$

Combinando-se o resultado de estimativa (3.2.1) com o teorema anterior, obtemos:

Proposição 3.3.1. *Seja M uma superfície mínima compacta mergulhada em uma variedade Riemanniana N compacta com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante positiva k. Então Área$(M) \leqslant 16\pi(g(M)+1)/k$.*

Demonstração. De fato, temos que

$$\frac{k}{2}\cdot \text{Área}(M) \;\leqslant\; \lambda_1(M)\cdot \text{Área}(M) \;\leqslant\; 8\pi(g(M)+1).$$

Donde obtemos

$$\text{Área}(M) \;\leqslant\; \frac{16\pi(g(M)+1)}{k}.$$

□

Corolário 3.3.1. *Seja M uma superfície mínima compacta mergulhada de $\mathbb{S}^3$. Então, Área$(M) \leqslant 8\pi(g(M)+1)$.*

Mais geralmente, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.3.2. *Seja N^3 uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci positiva limitada inferiormente por uma constante positiva k. Seja também M^2 uma hipersuperfície fechada e mergulhada de M. Então*

$$\textit{Área}(M) \leqslant \frac{16\pi}{k}\left(\frac{2}{|\pi_1(N)|} - \frac{1}{2}\chi(M)\right), \tag{3.10}$$

onde $|\pi_1(N)|$ denota a cardinalidade do grupo fundamental de N e $\chi(M)$ a característica de Euler de M.

Demonstração. Primeiramente, recorde da seguinte relação

$$g(M) = \frac{2-\chi(M)}{2}. \tag{3.11}$$

Então,

$$g(M)+1 = \frac{4-\chi(M)}{2} = 2 - \frac{1}{2}\chi(M). \tag{3.12}$$

Seja $\tilde{N}$ a variedade simplesmente conexa associada ao recobrimento universal de N. Pelo Corolário 2.1.2 o grupo fundamental $\pi_1(N)$ é finito e o seu recobrimento tem $|\pi_1(N)|$-folhas. Seja $\tilde{M}$ o levantamento de M pelo recobrimento. Assim como no Teorema 3.2.1 a hipersuperfície M é orientável e consequentemente seu levantamento $\tilde{M}$ também o é. Daí $\lambda_1(\tilde{M}) \geq k/2$. Argumentando como Teorema 3.3.1 e usando (3.12), temos

$$\text{Área}(\tilde{M}) \leqslant \frac{16\pi}{k}\left(2 - \frac{1}{2}\chi(\tilde{M})\right). \tag{3.13}$$

Como $\text{Área}(\tilde{M}) = |\pi_1(N)| \cdot \text{Área}(M)$ e $\chi(\tilde{M}) = |\pi_1(N)| \cdot \chi(M)$ (pois a característica de Euler é aditiva sobre a união disjunta), obtemos:

$$|\pi_1(N)| \cdot \text{Área}(M) \leqslant \frac{16\pi}{k}\left(2 - \frac{1}{2}|\pi_1(N)| \cdot \chi(M)\right). \tag{3.14}$$

Dividimos ambos os lados da inequação por $|\pi_1(N)|$ para obtermos o resultado desejado. $\square$

Talvez a maior utilidade do Teorema 3.2.1 (exatamente na versão que estamos apresentando aqui) seja na prova do Teorema de Compacidade para superfícies mínimas mergulhadas devido a H.I. Choi e R. Schoen [3], uma vez que essa prova depende de estimativas dos autovalores e da área de tais superfícies. O Teorema de Choi e Schoen afirma que o espaço das superfícies mínimas fechadas de gênero fixo mergulhadas em uma variedade diferenciável N^3 com curvatura de Ricci positiva é compacto na topologia (suave) diferenciável. Para mais detalhes veja, por exemplo, [18].

Referências

[1] Choi, Hyeong In e Ai Nung Wang: *A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces*. J. Differential Geom., 18(3):559–562, 1983. https://doi.org/10.4310/jdg/1214437788. Citado 4 vezes nas páginas 7, 8, 9 e 39.

[2] Yang, Paul C e Yau, Shing Tung: *Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 7(1):55–63, 1980. Citado 4 vezes nas páginas 7, 8, 9 e 41.

[3] Choi, Hyeong In e Richard Schoen: *The space of minimal embeddings of a surface into a three-dimensional manifold of positive Ricci curvature*. Inventiones mathematicae, 81(3):387–394, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 43.

[4] Yau, Shing Tung: *Seminar on differential geometry*. Annals of Mathematics Studies, (102), 1982. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 41.

[5] Carmo, Manfredo Perdigao do: *Geometria Riemanniana*. IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 5ª edição, 2011. Citado 9 vezes nas páginas 11, 12, 13, 22, 24, 25, 26, 28 e 39.

[6] Do Carmo, Manfredo Perdigao: *Formas diferenciais e aplicações*. SBM (Coleção Fronteiras da Matemática), Rio de Janeiro, 1ª edição, 2015. Citado na página 18.

[7] Lee, John M: *Smooth manifolds*. Em *Introduction to Smooth Manifolds*, páginas 1–31. Springer, New York, 2013. Citado na página 19.

[8] Lima, Elon Lages: *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada do CNPq., Rio de Janeiro, 5ª edição, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 38.

[9] Hadamard, Jacques: *Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique*. Gauthier-Villars, 1897. Citado na página 31.

[10] Frankel, Theodore: *On the fundamental group of a compact minimal submanifold*. Annals of Mathematics, páginas 68–73, 1966. Citado na página 31.

[11] Petersen, Peter e Wilhelm, Frederick: *On Frankel's Theorem*. Canadian Mathematical Bulletin, 1(1):130–139, 2003. Citado na página 31.

[12] Reilly, Robert C: *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*. Indiana University Mathematics Journal, 26(3):459–472, 1977. Citado na página 34.

[13] Bérard, Pierre H: *Lectures on spectral geometry*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1985. Citado na página 36.

[14] Schoen, R. e S.T. Yau: *Lectures on Differential Geometry*. Conference proceedings and lecture notes in geometry and topology. International, 1997. https://books.google.com.br/books?id=_gFqcgAACAAJ. Citado na página 37.

[15] Gilbarg, D. e N.S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2001, ISBN 9783540411604. https://books.google.com.br/books?id=eoiGTf4cmhwC. Citado na página 38.

[16] Guillemin, V. e A. Pollack: *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing. AMS Chelsea Pub., 2010, ISBN 9780821851937. https://books.google.com.br/books?id=FdRhAQAAQBAJ. Citado na página 38.

[17] Barros, Abdenago e G Pacelli Bessa: *Estimates of the first eigenvalue of minimal hypersurfaces of* $\mathbb{S}^{n+1}$. arXiv Mathematics e-prints, páginas math–0410493, 2004. Citado na página 41.

[18] Colding, Tobias H e William P Minicozzi: *A course in minimal surfaces*, volume 121. American Mathematical Soc., 2011. Citado na página 43.