

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estabilidade de Soluções do Tipo Solitons para
a Equação Generalizada de Korteweg-de Vries

Nemuel Rocha Lima

Maceió-AL
20 de Março de 2020

Estabilidade de Soluções do Tipo Solitons para a Equação Generalizada de Korteweg-de Vries

Autor: Nemuel Rocha Lima

Orientador: Márcio Cavalcante de Melo

Maceió-AL

20 de Março de 2020

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

L732e Lima, Nemeuél Rocha.
Estabilidade de soluções do tipo solitons para a equação generalizada de Korteweg-de Vries / Nemeuél Rocha Lima. - 2020.
87 f. : il., grafs., tabs.

Orientador: Márcio Cavalcante de Melo.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 79-81.
Apêndice: f. 82-87.

1. Equações diferenciais não-lineares - Teoria assintótica. 2. Solitons. 3. Korteweg-de Vries. I. Título.

CDU: 517.957

Nemuel Rocha Lima

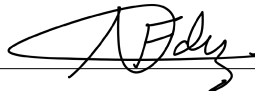
Estabilidade de Soluções do Tipo Solitons para a Equação Generalizada de Korteweg-de Vries

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 20 de março de 2020 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de mestre em Matemática.

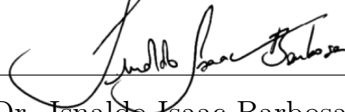
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Márcio Cavalcante de Melo (orientador)-UFAL



Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández-UFRJ



Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa-UFAL



Prof. Dr. Renan Dantas Medrado-UFAL



Prof. Dr. Roberto de Almeida Capistrano Filho-UFPE

Maceió-AL

20 de Março de 2020

*Este trabalho, é dedicado aos meus pais, minha
tia, irmã, noiva e meus avós em especial ao meu
avô.*

Agradecimentos

- Agradeço a Deus, minha maior força nos momentos de dificuldades, por me guardar com o seu infinito amor. Sem Ele, nada disso seria possível. Agradeço ao Senhor por colocar esperança, amor e fé no meu coração, abençoando o meu caminho durante a construção deste trabalho. Dedico esta dissertação ao meu Deus, todo poderoso, o maior orientador da minha vida, pois nunca me abandonou nos momentos de necessidade. Porque Dele, e por Ele, e para Ele são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém!
- Agradeço a minha família, especialmente aos meus pais, Elias da Rocha Lima e Amara Maria da Conceição Rocha, pelo amor e dedicação, fundamentais nesta caminhada. Também agradeço a minha tia Leni da Rocha Lima, a minha irmã Jully Graciely da Rocha Lima, a minha noiva Rosebeth Silva dos Santos e aos meus avós, Maria do Carmo Lima e, de uma forma mais especial, ao meu querido avô, Clóvis da Rocha Lima, que, embora não esteja mais presente, todavia eu o levo sempre em meu coração.
- Ao meu amigo e orientador Prof Dr. Márcio Cavalcante de Melo, aos meus amigos Prof Dr. Eduardo Santana, Prof Dr. Isnaldo Isaac Barbosa, Deivid Santos, Ediclaudio Lima, Diego Ramon e Marcones Oliveira. A todos os professores do IM - UFAL, em especial aos meus professores da pós-graduação, pelos ensinamentos e receptividade. Aos funcionários da secretaria, em especial a Ana Mendonça, e, finalmente, a minha turma de mestrado de 2018 a 2020.
- À capes pela ajuda financeira durante o período do mestrado.

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo, mas transformai-vos pela renovação da mente, a fim de distinguir qual é a vontade de Deus: o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito."

(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

Resumo

Neste trabalho, fazemos um estudo de estabilidade orbital das soluções especiais, chamadas solitons, com respeito ao problema de Cauchy associado à equação não-linear de Korteweg-de Vries generalizada (gKdV), para $p = 2, 3$ e 4 , definida por

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Para a prova do resultado, usamos a abordagem de Weinstein [31] que foi revisada recentemente no artigo de Muñoz [26].

Palavras-chave: Estabilidade, Solitons, Korteweg-de Vries

Abstract

In this work, we study the orbital stability of the solitons solutions, with respect to flow of the Cauchy problem associated to generalized Korteweg-de Vries (gKdV), for $p = 2, 3$ and 4, given by

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

In order to prove this result, we use the approach of Weinstein [31], that was recently revisited by Muñoz [26].

Keywords: Stability, Solitons, Korteweg-de Vries

Sumário

1	Introdução	5
1.1	Conceitos Básicos sobre Ondas	5
1.2	Conceitos Matemáticos	6
1.3	A Descoberta das Ondas Solitárias	7
1.4	A Importância dos Solitons	9
1.5	Objetivo do Trabalho	11
2	Preliminares	12
2.1	Definição e Propriedades dos Espaços L^p	12
2.2	Resultados Básicos de Teoria da Medida	17
2.3	Espaços de Sobolev	18
2.4	O Espaço de Schwartz	22
2.5	Transformada de Fourier	26
2.6	Distribuições Temperadas	29
2.7	Espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$	30
3	Noções de Operadores Lineares Limitados e Não-Limitados	34
3.1	Resultados Básicos	34
3.2	Adjunta para Operador Limitado	36
3.3	Teoria Espectral	38
4	A Equação de KdV Generalizada	45
4.1	O Princípio de Duhamel	45
4.2	Boa Colocação	47
4.3	Leis de Conservação	48
4.4	Solução Tipo Onda Solitária	52

5 Estabilidade de Solitons	57
5.1 Propriedades da solução tipo Soliton	57
5.2 Resultados Principais	61
5.3 Prova do Teorema 28: Resultado de Estabilidade	70
Referências Bibliográficas	79
Apêndice A A necessidade de introduzir uma função corretora $\rho(t)$ na definição de estabilidade	82

Capítulo 1

Introdução

Diariamente convivemos intensivamente com movimentos de ondas, como no tráfego de veículos, marés, propagação da luz e som. Casualmente podemos nos deparar com notícias de tsunamis e danos causados por ondas sônicas. De fato, o assunto é intensivamente estudado em quase todos os ramos da ciência, devido à grande gama de aspectos naturais na qual se encontra e pelos fenômenos que o envolvem, como difração, refração, reflexão e ressonância. As ondas podem significar grandes catástrofes e, ao mesmo tempo, contribuir para a tecnologia de forma grandiosa.

Não sendo diferente, na matemática, há um rico desenvolvimento dos conceitos e técnicas sobre o estudo das ondas. Nosso objetivo, é fazer um estudo teórico da equação de Korteweg-De Vries (ou simplesmente KdV), na sua forma generalizada, sendo essa equação uma maneira de descrever ondas em um canal de águas rasas. A origem desse modelo foi por volta de 1834 com John Scott Russel, mais tarde também estudada por George Airy, George Stokes e Joseph Boussinesq. Baseados nos trabalhos de Boussinesq, no final do século XIX, os matemáticos holandeses Diederik Korteweg e Gustav de Vries apresentaram a equação que hoje chamamos de KdV e nos dias atuais tem sido objetivo de muitas pesquisas na área de análise e equações diferenciais.

1.1 Conceitos Básicos sobre Ondas

Não é uma tarefa fácil determinar uma definição simples para "onda". Diremos apenas que uma onda é uma perturbação que se propaga através do tempo e do espaço. Dessa forma, fica mais simples englobar fenômenos como sendo uma onda. Um fato muito interessante e motivador é que uma onda pode se propagar transportando energia de um ponto até outro sem deslocar as partículas do meio, ou seja, sem nenhum ou baixo transporte de massa.

Agora veremos alguns conceitos físicos básicos sobre ondas

- **Amplitude** (A) de uma onda é a medida de um distúrbio em um meio durante um ciclo de onda. Por exemplo, em uma corda, a amplitude seria a distância que a corda se desloca de sua posição de repouso. A amplitude pode ser constante ou pode variar com o tempo.
- **Período** (T) é chamado o tempo (em segundos) de um ciclo completo de uma oscilação da onda.
- **Frequência** (F) expressa quantas vezes (em hertz) por um segundo a onda completou um ciclo ou especificamente

$$F = \frac{1}{T}.$$

- A **frequência angular** (ω) é uma medida (em radianos) relacionada à frequência, ou ao período, dada por

$$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}.$$

- O **comprimento de onda** (λ) é a distância (em metros) que uma forma inteira da onda leva pra completar um ciclo. Sendo v a velocidade com que a onda viaja, o comprimento é dado por

$$\lambda = \frac{v}{F}.$$

1.2 Conceitos Matemáticos

Em Whitham [32], as ondas são distinguidas em duas classes principais. A primeira é descrita por equações diferenciais parciais hiperbólicas, diremos **ondas hiperbólicas**. A segunda não pode ser caracterizada com a mesma simplicidade e, por ser motivada pelos casos mais simples de ondas dispersivas em problemas lineares, iremos chamar essa classe de **ondas dispersivas**. Vale citar que alguns movimentos ondulatórios podem ser caracterizados pelas duas classes e em raras exceções por nenhuma delas.

O mais simples protótipo para ondas hiperbólicas é dado pela equação do transporte

$$u_t + au_x = 0,$$

um bom modelo (unidimensional) para ondas hiperbólicas pode ser dado pela equação da onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

No entanto, quando falamos em ondas dispersivas, nos baseamos no tipo de solução ao invés de um tipo de equação. Chamamos de sistema oscilatório um sistema que admita soluções da forma

$$u = a \cos(kx - \omega t), \quad (1.1)$$

onde a frequência ω é uma função real (determinada pelo sistema) da constante k chamada **número de onda**. A **velocidade de fase** é dada por $\omega(k)/k$. Diremos que uma onda é dispersiva se a velocidade de fase for real e não é constante com respeito a k . Chamaremos assim, pois uma solução geral seria composta da superposição de várias ondas dessa forma com diferentes valores de k . Se a velocidade de fase $\omega(k)/k$ não for a mesma para cada k , ou seja, $\omega \neq c_0 k$ (onde c_0 é alguma constante), as ondas com números k diferentes se propagarão a velocidades diferentes e vão se dispersar. É conveniente modificar a definição e dizer que um sistema linear oscilatório é dispersivo se $\omega'(k)$ não é constante, isto é, $\omega''(k) \neq 0$.

Note que (1.1) é tanto uma solução da equação do transporte com $\omega(k) = ak$ quanto da equação da onda com $\omega(k) = ck$. Mas esses casos são excluídos da classificação dispersiva já que $\omega''(k) = 0$

1.3 A Descoberta das Ondas Solitárias

A mais antiga citação documentada sobre ondas solitárias foi feita em 1834 pelo cientista e engenheiro escocês John Scott Russel, acerca de sua observação do movimento de uma balsa no canal de Edinburgh, em Glasgow. A balsa era puxada por dois cavalos, um em cada margem do estreito canal, quando parou bruscamente. Segundo suas próprias palavras, "*a massa de água que se acumulava na frente da balsa em movimento, em um estado de violenta agitação, seguiu em alta velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, uma montanha de água, lisa e bem definida, que continuou seu curso ao longo do canal, aparentemente sem mudar sua forma ou diminuir sua velocidade*" ([28]). Russell a seguiu a cavalo, por mais de 3km, correndo a uma velocidade de aproximadamente 15km/h.

Russell teve a oportunidade de observar a onda que, no início chamou de onda de translação "e, posteriormente, onda solitária". E não foi por acaso, Russel trabalhava em um estudo sobre desenho de cascos para barcaças e, a essa altura, já havia realizado experimentos em outros canais, lagos e rios.

O curioso é que essa onda não se deformava por uma boa distância, assim Russell realizou uma série de experimentos e descobriu como reproduzi-la; construindo um canal raso contendo

um anteparo em uma de suas extremidades permitindo acumular água. Retirando o anteparo bruscamente, a massa de água era liberada, fazendo com que uma onda solitária se deslocasse na direção da extremidade oposta. A partir de experimentos dessa forma, foi possível deduzir uma primeira fórmula: $c^2 = g(h_0 + a)$ onde c é a velocidade da onda, a é sua altura em relação ao nível da água em repouso, h_0 a profundidade e g é a constante gravitacional. Mas a fórmula provocou polêmica, pois entrava em contradição com a equação de Airy, que era dada puramente por argumentos teóricos. Russel tentou de diversas formas modelar matematicamente a onda solitária. Desenvolveu teoria para ondas solitárias formadas por ar e éter e utilizou para calcular a espessura da atmosfera, obtendo sucesso para tal fato, mas sem sucesso, tentou calcular o tamanho do universo.

Russel faleceu em 1882 sem ter obtido uma fórmula matemática que descrevesse a onda solitária. Mas, em 1895, os matemáticos holandeses, Diederik Korteweg e Gustav de Vries, deduziram a equação para a propagação de ondas em águas rasas. A partir dessa equação, hoje conhecida como equação KdV, é possível determinar a fórmula para o perfil das ondas solitárias.

Com efeito, seja um referencial que se move em um canal de profundidade h , a equação da KdV na sua forma original, presente no artigo de Korteweg-de Vries [20], é

$$\eta_t = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \left[\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} \alpha \eta + \frac{1}{3} \beta \eta_{xx} \right]_x,$$

onde $\eta(x, t)$ representa a elevação da água com relação ao nível de equilíbrio no momento $t > 0$ da posição espacial $x \in \mathbb{R}$ do canal. O coeficiente $\alpha > 0$ é a constante de propulsão linear, $g > 0$ é a constante gravitacional e $\beta = \frac{h^3}{3} - \frac{Th}{g\rho}$ é a constante relacionada às forças capilares do tensor T com densidade $\rho > 0$.

Do ponto de vista da análise matemática, os coeficientes na KdV não representam um papel fundamental. Dessa forma, podemos escolhê-los, de modo conveniente, por meio de mudanças de variáveis, para facilitar o cálculo ou as demonstrações.

Note que, eliminando as constantes físicas por meio das mudanças de variáveis

$$u \longrightarrow -\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{3}\alpha, \quad x \longrightarrow -\frac{x}{\beta} \quad \text{e} \quad t \longrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h\beta}} t,$$

obtemos

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Essa equação, acima obtida, é dita equação KdV padrão, onde a variável redimensionada "u", está relacionada à amplitude e comprimento de onda. Resumindo a equação KdV é

um modelo matemático que descreve a propagação de ondas ao longo de um canal de seção transversal retangular de águas rasas com pequena amplitude, ou seja, pouca profundidade.

Muitas definições rigorosas podem ser formuladas, no entanto definiremos uma solução do tipo onda solitária como uma solução particular da equação não linear $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$, chamada de KdV, isto é, uma solução satisfazendo as seguintes condições:

- Representa uma onda de forma permanente, ou seja, é da forma $u(x, t) = Q_c(x - x_0 - ct)$, onde $c > 0$ é uma constante real, que representa a velocidade e x_0 um parâmetro;
- $Q_c(s) \rightarrow 0$, assim como todas suas derivadas, quando $s \rightarrow \pm\infty$, com $s = x - x_0 - ct$;
- Mantém sua identidade mesmo após interação com outros solitons (e, neste sentido tem um comportamento de partícula, como sugere seu nome).

1.3.1 Solitons

A palavra "soliton" surgiu em 1965 a partir dos trabalhos de Zabuski e Kruskal. Eles observaram uma propriedade notável: o fato de que ondas solitárias da KdV de diferentes amplitudes (e, portanto, de diferentes velocidades), ao se encontrarem, não se destroem e também não se dispersam, como seria de se esperar. Ao contrário, eles constataram que uma passa pela outra sem mudar de forma e com somente uma pequena alteração em suas fases. Esta é uma propriedade importante, porque mostra que a energia pode se propagar em pacotes localizados sem se dispersar. Como a KdV é uma equação não linear, estas soluções são excepcionais e, por isso, decidiram chamá-las de solitons. O sufixo "on" (que em grego significa partícula), ilustra, neste caso, o comportamento tipo partícula dessas ondas.

Este fenômeno não é uma exclusividade da KdV. Além das ondas de águas rasas em um canal, muitos outros solitons podem ser observados na natureza (como a Pororoca no Amazonas), ou produzidos em laboratório. Cita-se aqui algumas áreas nas quais eles ocorrem (em equações diferentes da KdV): na teoria da supercondutividade (equação de Ginzburg-Landau), na física de partículas (equação de Yang-Mills), na física de plasmas e na ótica não linear (equação de Schrödinger não-linear). Esta última, em particular, tem aplicações relevantes nas comunicações por laser via fibras óticas.

1.4 A Importância dos Solitons

Nesta seção, iremos descrever brevemente o problema a ser tratado nesta dissertação. Nosso principal foco é o estudo da dinâmica das soluções do seguinte problema de Cauchy,

associado à equação não-linear de Korteweg-de Vries generalizada (gKdV), para $p = 2, 3$ e 4 , definida por

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2)$$

no clássico espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$.

É bem conhecido na literatura que tal problema é bem colocado globalmente nos espaços $H^1(\mathbb{R})$ (ver Seção 4.2), isto é, há existência de solução para todo o tempo, unicidade e continuidade do fluxo, que toma dado inicial em $H^1(\mathbb{R})$ e leva na solução em $C(\mathbb{R} : H^1(\mathbb{R}))$.

Além disso, a equação de gKdV admite uma família de soluções especiais do tipo solitons (Ver Seção 4.4), isto é, soluções regulares da forma $Q_c(x - ct)$, tal que Q_c é uma função real, de modo que $Q_c(s)$ e todas as suas derivadas $Q_c^{(n)}(s)$ tendem para zero quando $s \rightarrow \pm\infty$. Mais precisamente, tem-se a fórmula explícita para $Q_c = c^{1/(p-1)}Q(\sqrt{c}s)$, onde

$$Q(s) (= Q_{c=1}) := \left(\frac{p+1}{2 \cosh^2\left(\frac{(p-1)}{2}s\right)} \right)^{1/(p-1)}. \quad (1.3)$$

Apesar de ser uma solução bem particular, os solitons são de fundamental importância para descrever rigorosamente o comportamento de soluções do problema de Cauchy com dados iniciais mais gerais. A seguir, vamos comentar a importância dos solitons em três importantes resultados bem clássicos no ramo das equações diferenciais parciais do tipo dispersivas.

- (i) **Estabilidade Orbital de Solitons** (Benjamin [4], Bona [5] e Weinstein [31]): Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que se $\|u_0 - Q_c\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \delta$, então para todo $t \in \mathbb{R}$, existe um $\rho(t) \in \mathbb{R}$, tal que a solução $u(x, t)$ do problema de Cauchy (1.2) satisfaz

$$\|u(\cdot, t) - Q_c(\cdot - \rho(t))\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \epsilon.$$

- (ii) **Estabilidade Assintótica de Solitons** (Martel e Merle [25]): Seja $c_0 > 0$. Existe $K_0 > 0$ e dado $\beta > 0$, existe $\alpha_0 = \alpha_0(\beta) > 0$ tal que a seguinte afirmação é verdadeira. Seja $u(x, t)$ a solução global $C(\mathbb{R} : H^1(\mathbb{R}))$ de (1.2) satisfazendo $\|u_0 - Q_{c_0}\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \alpha_0$. Então, existe $c^+ > 0$ com $|c^+ - c_0| \leq K_0\alpha_0$ e uma função $\rho : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $v(x, t) = u(x, t) - Q_{c^+}(x - \rho(t))$ satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|v(t)\|_{H^1(x > \beta t)} = 0,$$

além disso, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (d\rho/dt)(t) = c^+$

- (iii) O Método do **espalhamento inverso** foi usado por Eckhaus e Schuur [9] para provar o seguinte resultado: qualquer solução suave e com decaimento do problema de Cauchy (1.2) se decompõe em duas partes quando $t \rightarrow +\infty$, $u(x, t) = u_d(x, t) + u_c(x, t)$, onde u_d é uma solução do tipo N-soliton e $u_c(x, t) \rightarrow 0$ uniformemente, para $x > 0$ com $t \rightarrow \infty$.

Numa linguagem simplificada, a estabilidade orbital descreve a proximidade de uma solução a um soliton, sempre que o dado inicial estiver próximo de tal soliton. Enquanto a estabilidade assintótica, descreve a convergência forte de uma solução para um soliton, em uma porção à direita da semirreta positiva quando $t \rightarrow +\infty$. Enfim, o terceiro resultado descrito acima descreve o comportamento de uma solução regular e com decaimento para grandes valores de t . Esses três resultados acima descrevem a importância prática dos solitons, cuja prova de tais resultados exigem um certo aprofundamento matemático. Enfatizamos que o resultado de estabilidade orbital para a equação de KdV foi obtido pela primeira vez por Benjamin [4], em seguida apareceram na literatura diferentes provas de estabilidade associadas à equação de KdV e suas generalizações.

Por fim, neste trabalho, daremos uma prova rigorosa do primeiro resultado apontado acima. Para isso, iremos usar, como principal referência, o recente artigo na forma de survey de Muñoz [26], na qual o autor usa as ideias do trabalho de Weinstein [31]. Enfatizamos que o principal objetivo desse trabalho, é tratar do assunto em questão da forma mais detalhada possível.

1.5 Objetivo do Trabalho

- Nos capítulos 2 e 3, fazemos um estudo de preliminares, como forma de relembrar e aprimorar conhecimentos necessários, para a elaboração desta dissertação.
- Nos capítulos 4 e 5, abordamos os resultados principais, dessa dissertação, sobre a estabilidade da solução particular (Soliton) Q_c da equação não-linear de Korteweg-de Vries generalizada (gKdV), dada por

$$u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \quad x, t \in \mathbb{R} \quad \text{com } p = 2, 3 \text{ e } 4. \quad (1.4)$$

- Apêndice A: Esse contém a demonstração de que a estabilidade da função Q_c falha quando consideramos a velocidade original do soliton.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos e resultados básicos de Análise Funcional que serão utilizados no decorrer do trabalho.

2.1 Definição e Propriedades dos Espaços L^p

Definição 1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável no sentido de Lebesgue. Seja $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das funções p -integráveis no sentido de Lebesgue, isto é,*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\},$$

dotado da norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p},$$

para $p = \infty$, denotaremos o espaço $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das funções mensuráveis limitadas, isto é,

$$L^\infty = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é mensurável e } \exists C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\},$$

dotado da norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}.$$

Seja $1 \leq p \leq \infty$, denotaremos por q o expoente conjugado de p , isto é, q é o número real

que satisfaz a seguinte equação

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Lema 1. (*Desigualdade de Young*). *Sejam p e q conjugados, logo para todo número real não-negativo a e b , com $1 \leq p \leq \infty$, então vale que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, valendo a igualdade se $a^p = b^q$*

Demonstração. Se $ab = 0$, a desigualdade é evidente. Sejam $a, b > 0$, então

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b} \\ &= e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q} \\ &\leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} \\ &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \end{aligned}$$

onde, na penúltima desigualdade, estamos utilizando a convexidade da função exponencial. Se caso tivermos $a^p = b^q$, usando que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, segue que

$$ab = a(b^q)^{1/q} = aa^{p/q} = a^{p/p} a^{p/q} = a^{p(1/p+1/q)} = a^p = a^p \cdot 1 = a^p \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad \square$$

O Lema 1 é de grande importância na demonstração dos Lemas 2, dado a seguir, e do 29, usado na demonstração do teorema principal.

Lema 2. *Considere $p, q \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(i) **Desigualdade de Hölder:** Sejam $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$. Então $fg \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}. \quad (2.1)$$

(ii) **Desigualdade de Minkowski:** Sejam $f, g \in L^p(\mathbb{R})$. Então $f + g \in L^p(\mathbb{R})$ e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (2.2)$$

Demonstração. Consultar [7]. □

Proposição 1. *Seja (X, μ) um espaço de medida finito e $p_0 \leq p_1$. Então*

$$L^{p_1}(X) \subset L^{p_0}(X).$$

Além disso, para toda $f \in L^{p_1}(X)$

$$\|f\|_{L^{p_0}} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \|f\|_{L^{p_1}},$$

ou seja, a inclusão de $L^{p_1}(X)$ em $L^{p_0}(X)$ é um operador limitado.

Demonstração. Podemos assumir que $p_1 > p_0$. Suponhamos então que $f \in L^{p_1}(X)$ e definamos $F := |f|^{p_0} \in L^{p_1/p_0}(X)$. Seja $p = p_1/p_0 > 1$ e seu expoente conjugado, isto é,

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{p_0}{p_1}, \quad q = \frac{p_1}{p_1 - p_0}.$$

Aplicamos a Desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned} \int_X F \cdot 1 dx &\leq \left(\int_X 1 dx \right)^{1/q} \left(\int_X F^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \mu(X)^{1 - \frac{p_0}{p_1}} \left(\int_X |f|^{p_1} dx \right)^{p_0/p_1} \\ &= \mu(X)^{1 - \frac{p_0}{p_1}} \|f\|_{L^{p_1}}^{p_0}, \end{aligned}$$

por outro lado

$$\int_X F dx = \int_X |f|^{p_0} dx = \|f\|_{L^{p_0}}^{p_0},$$

ou seja,

$$\|f\|_{L^{p_0}}^{p_0} \leq \mu(X)^{1 - \frac{p_0}{p_1}} \|f\|_{L^{p_1}}^{p_0}.$$

O resultado segue ao elevarmos ambos os lados dessa desigualdade a $1/p_0$. \square

Definição 2. (*Notação de Multi-índice*) Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denotamos o conjunto das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ contínuas definidas em Ω por

$$C(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{contínua em } \Omega\}.$$

Seja n um número natural qualquer. Denota-se por $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ as n -uplas constituídas por números inteiros não negativos. Estas n -uplas são denominadas multi-índices.

Dados o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, define-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!, \quad 0! = 1.$$

onde $\alpha_i, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O número $|\alpha|$ acima é chamado ordem do multi-índice α . Se $|\alpha| \geq 1$ e $u \in C(\Omega)$, denotamos por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, ou seja,

$$D^\alpha u = \partial^\alpha u := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Quando a derivada mista do lado direito acima existe. A fim de facilitar a notação, define-se $D^\alpha u = u$ quando $|\alpha| = 0$, para toda função u . Por D_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, representa-se a derivação parcial $\partial/\partial x_i$. Observe que $D^\alpha u$ é uma função definida em Ω que toma valores em \mathbb{C} . Quando possui todas as derivadas mistas de ordem k , escrevemos

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) : \alpha \text{ é um multi-índice de ordem } k\}.$$

Estabelecendo algum tipo de ordem para as derivadas mistas acima, $D^k u(x)$ pode ser visto como um vetor de \mathbb{R}^{n^k} .

Se α, β forem multi-índices, escreve-se $\beta \leq \alpha$ quando $\beta_i \leq \alpha_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Quando u e v forem funções numéricas suficientemente deriváveis, tem-se a regra de Leibniz dada por

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} (D^\beta u) (D^{\alpha - \beta} v).$$

Exemplo 1. Seja $n = 3$ e $\mathbf{x} = (x, y, z)$, temos que

$$\partial^{(0,3,0)} u = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}, \quad \partial^{(1,0,1)} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}, \quad \mathbf{x}^{(2,1,5)} = x^2 y z^5.$$

Exemplo 2. Casos particulares importantes são aqueles em que $k = 1$, quando podemos identificar a derivada com o vetor gradiente

$$D^1 u(x) \cong \nabla u(x) := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right),$$

bem como o caso $k = 2$, quando identificamos a derivada com a matriz Hessiana

$$D^2 u(x) \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Com relação à derivadas de ordem superior, vamos definir, para $k \in \mathbb{N}$, os seguintes conjuntos

$$C^k(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \begin{array}{l} D^\alpha u \text{ existe e é contínua para todo} \\ \text{multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k \end{array} \right\}$$

e

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} C^k(\Omega).$$

escrevemos ainda $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Note que uma função $u \in C(\Omega)$ pode ser ilimitada. No entanto, se ela for limitada e uniformemente contínua em Ω , podemos estendê-la continuamente e de maneira única até o fecho de Ω . Desse modo, podemos falar dos valores da função u na fronteira do conjunto Ω . Definimos, então, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, o conjunto

$$C^k(\bar{\Omega}) := \left\{ u \in C^k(\Omega) : \begin{array}{l} D^\alpha u \text{ é limitada e uniformemente contínua} \\ \text{para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k \end{array} \right\}.$$

Não é difícil mostrar que, com as definições usuais de soma entre funções e multiplicação de uma função por um número real, os conjuntos $C^k(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ e $C^k(\bar{\Omega})$ são espaços vetoriais.

Definição 3. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denota-se por $L_{loc}^p(\Omega)$ o espaço das funções localmente integráveis, ou seja,

$$L_{loc}^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mensuráveis} \mid f \in L^p(\tilde{\Omega}) \quad \forall \tilde{\Omega} \subset\subset \Omega\},$$

onde $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ significa que existe K compacto tal que $\tilde{\Omega} \subset K \subset \Omega$. Dizemos então que $\tilde{\Omega}$ está compactamente contido em Ω .

Proposição 2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Para todo $1 \leq p \leq +\infty$ vale a inclusão $L^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$

Demonstração. Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$. Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\|u\|_{L^1(\tilde{\Omega})} \leq (\mu(\tilde{\Omega}))^{1/q} \|u\|_p = C \|u\|_p,$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\mu(\tilde{\Omega}) < \infty$, ou seja, tem medida finita. □

Definição 4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, o espaço das funções testes, denotado por $C_c^\infty(\Omega)$, é o espaço das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto tal que

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}},$$

ou seja,

$$C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } f \text{ é compacto em } \Omega, \text{ com } f(x) = 0 \forall x \notin \text{supp } f\}.$$

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado. Considere o seguinte espaço

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid f(x) = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Note que, se Ω é ilimitado, por exemplo $\Omega = \mathbb{R}^n$, então as funções de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ são $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f = 0$.

Exemplo 3. Seja $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp(-1/(1 - \|x\|^2)) & \text{se } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

sendo $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, então ϕ pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp } \phi = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$.

2.2 Resultados Básicos de Teoria da Medida

A seguir enunciamos resultados clássicos de teoria da medida. Para a prova, consultar [3].

Teorema 3. (Teorema da Convergência Dominada). Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$. Suponhamos que:

- (a) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ q.t.p. em Ω ;
- (b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p., $\forall n \in \mathbb{N}$.

Então

$$f \in L^1(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} f_n d\mu \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu.$$

Corolário 4. Se a função $t \rightarrow f(x, t)$ é contínua em $[a, b]$ para cada $x \in \Omega$, e existe uma função integrável g em Ω tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$, então a função F definida por

$$F(t) = \int_{\Omega} f(x, t) d\mu(x), \tag{2.3}$$

é contínua $\forall t \in [a, b]$.

Corolário 5. Suponha que para algum $t_0 \in [a, b]$, a função $x \rightarrow f(x, t_0)$ é integrável em Ω , de modo que $\partial f / \partial t$ existe em $\Omega \times [a, b]$, e também existe uma função integrável g em Ω tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x),$$

então a função F definida em (2.3) é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(x, t) d\mu(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

2.3 Espaços de Sobolev

O primeiro passo para a construção do espaço de Sobolev será introduzir um novo conceito que é o de derivada fraca. A fim de motivar esse novo conceito, considere $u \in C^k(\Omega)$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, uma função teste. O Teorema da Divergência nos permite então integrar por partes para obter:

$$\int_{\Omega} u \varphi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \varphi(x) \eta^i dS_x dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi dx \quad (i = 1, \dots, n),$$

em que usamos, na última igualdade, o fato de que $\varphi \equiv 0$ em $\partial\Omega$. De uma maneira mais geral, se α é um multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$, podemos escrever

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi D^\alpha u dx.$$

Observe que o lado esquerdo da igualdade acima faz sentido, mesmo que u não seja regular. De fato, basta supor que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, pois, nesse caso, se denotarmos por $K_\varphi \subset \subset \Omega$ o suporte da função φ , temos que

$$\left| \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx \right| \leq \int_{K_\varphi} |u(x)| |D^\alpha \varphi(x)| dx \leq \|D^\alpha \varphi\|_\infty \int_{K_\varphi} |u(x)| dx < \infty.$$

As considerações acima motivam a seguinte definição.

Definição 5. Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α , dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma α -ésima derivada fraca de u se

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Se este for o caso, denotamos $v = D^\alpha u$

Essencialmente, a definição acima diz que a derivada fraca de uma função é uma função localmente integrável que nos permite fazer integração por partes. O lema abaixo estabelece, em um certo sentido, a unicidade da derivada fraca.

Exemplo 4. Seja $\Omega = (0, 2) \subset \mathbb{R}$ e

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Observe que $u \in L^1_{loc}(0, 2)$ e que não existe a derivada no sentido clássico, visto que não existe a derivada (clássica) no ponto $x = 1$.

Vamos mostrar que u possui como derivada fraca a função v dada por

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

com $u'(x) = v(x)$.

De fato, claramente temos que $v \in L^1_{loc}(0, 2)$. Além disso, dada $\varphi \in C_c^\infty((0, 2))$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u\varphi' &= \int_0^1 x\varphi'(x)dx + \int_1^2 \varphi'(x)dx \\ &= x\varphi(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi(x)dx + (\varphi(2) - \varphi(1)) \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)dx - \varphi(1) \\ &= - \int_0^1 \varphi(x)dx = - \int_{\Omega} v\varphi. \end{aligned}$$

Exemplo 5. Seja $\Omega = (0, 2) \subset \mathbb{R}$ e

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2, \end{cases}$$

analogamente ao caso anterior, segue que $u \in L^1_{loc}(0, 2)$, mas u não possui uma derivada fraca. De fato, suponha por absurdo que exista uma função $v \in L^1_{loc}(0, 2)$ satisfazendo

$$\int_0^2 u\varphi'dx = - \int_0^2 v\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(0, 2)$. Então

$$\begin{aligned} - \int_0^2 v\varphi &= \int_0^1 x\varphi' + 2 \int_1^2 \varphi' = \varphi(1) - 0 - \int_0^1 \varphi + 0 - 2\varphi(1) \\ &= -\varphi(1) - \int_0^1 \varphi, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\varphi(1) = - \int_0^1 \varphi + \int_0^2 v\varphi,$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty((0, 2))$. Escolhendo uma seqüência de funções-teste $(\varphi_m) \subset C_0^\infty((0, 2))$ satisfazendo $\varphi_m(1) = 1$, $0 \leq \varphi_m \leq 1$ e $\varphi_m(x) \rightarrow 0$ para todo $x \neq 1$, obtemos através do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m(1) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[- \int_0^1 \varphi_m + \int_0^2 v\varphi_m \right] = 0,$$

o que é uma contradição.

Proposição 3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto e $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

então $u = 0$ q.t.p. em Ω .

Demonstração. Consultar [7]. □

Lema 6. A α -ésima derivada fraca de uma função $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, quando existe, é única a menos de conjuntos de medida nula.

Demonstração. Suponha que v, \tilde{v} são α -ésimas derivas fracas de u . Então

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v\varphi = \int_{\Omega} uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v}\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

portanto

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v})\varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Segue então de (3) que $v - \tilde{v} = 0$ q.t.p. em Ω . Logo $v = \tilde{v}$ q.t.p. em Ω . □

Lembrando que a notação usada acima, não é de derivada no sentido clássico, ou seja, quando escrevermos $D^\alpha u$ anteriormente, estamos nos referindo à α -ésima derivada no sentido fraco.

Definição 6. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k\}.$$

Observe que se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então $u \in L^p(\Omega)$, de modo que toda função de $W^{k,p}(\Omega)$ está em $L^1_{loc}(\Omega)$. Nunca é demais lembrar que, na definição acima, $D^\alpha u$ denota a derivada no sentido fraco. Finalmente, como $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, estamos assumindo que todas as derivadas fracas de ordem menor ou igual a k existem. Uma outra observação importante é que valem as seguintes inclusões

$$C_c^\infty(\Omega) \subseteq W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega),$$

quando $p = 2$, denotamos $W^{k,p}(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$, isto é, $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$. Em particular se $k = 1$, temos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i = 0, 1, \dots, n. \right\}.$$

Definição 7. Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$, nós definimos sua norma como

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty), \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{\Omega} |D^\alpha u| & (p = \infty), \end{cases}$$

ou de modo equivalente

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty), \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & (p = \infty). \end{cases}$$

Definição 8. Para o espaço $W^{k,p}(\Omega)$, temos as seguintes definições :

- (i) Seja $\{u_m\}_{m=1}^\infty, u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dizemos que u_m converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$, escrevendo $u_m \rightarrow u$ em $W^{k,p}(\Omega)$ quando $\lim_{x \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0$;
- (ii) dizemos que $u_m \rightarrow u$ em $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, quando $u_m \rightarrow u$ em $W^{k,p}(V)$ para cada $V \subset\subset \Omega$.

Definição 9. Denotamos por $W_0^{k,p}(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Portanto $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se existem funções $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \rightarrow u \in W^{k,p}(\Omega)$. Interpretamos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o conjunto das funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tal que

$$D^\alpha u = 0 \text{ em } \partial\Omega \quad \forall |\alpha| \leq k - 1.$$

Teorema 7. *Dado o espaço $W^{k,p}(\Omega)$, temos que:*

- (i) O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_{k,p}$ é um espaço de Banach;
- (ii) O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ é reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$;
- (iii) $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.

Demonstração. Consultar [7]. □

2.4 O Espaço de Schwartz

Definição 10. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} (reais ou complexos). Uma seminorma num espaço vetorial V é uma função $p : V \rightarrow [0, +\infty)$ tal que*

1. $p(x) \geq 0, \forall x \in V$;
2. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x), \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$;
3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in V$.

Também é claro da definição que $p(\mathbf{0}) = p(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot p(\mathbf{0}) = 0$, para uma seminorma p , ser uma norma falta $p(v) = 0 \implies v = 0$

Definição 11. *O espaço de Schwartz ou das funções rapidamente decrescentes, que denotemos por $S(\mathbb{R}^n)$, é a coleção das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty,$$

para quaisquer multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$.

A definição acima diz que uma função está neste espaço se ela for suave e, além disso, a função e todas as suas derivadas decaem mais rápido que o inverso de qualquer polinômio, quando $|x| \rightarrow \infty$.

O conjunto $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , além disso, fixado um par α e β , temos que $\rho_{\alpha,\beta}(f)$ definido acima é uma seminorma. A topologia em $S(\mathbb{R}^n)$ é dada pela família de seminormas $\rho_{\alpha,\beta}$, onde $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}_+^n)^2$.

Exemplo 6. *Um exemplo de função pertencente ao espaço de Schwartz para o caso unidimensional é $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}$.*

Temos que $\|f\|_{\alpha,\beta}$ são seminormas no espaço de Schwartz. Note que não são normas, pois $\exists f \neq 0$, com $x^\beta \partial^\alpha f = 0$. De fato, basta tomar, $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$ com $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \neq 0$

Agora seja $d : S(\mathbb{R}^n) \times S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por

$$d(f, g) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\rho_{\alpha,\beta}(f-g)}{1 + \rho_{\alpha,\beta}(f-g)}, \quad f, g \in S(\mathbb{R}^n),$$

defina

$$P(f) := \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\rho_{\alpha,\beta}(f)}{1 + \rho_{\alpha,\beta}(f)}.$$

Vemos que P é uma norma. De fato, é claro que a soma de seminormas é seminorma. Logo, P é seminorma. Agora, se $P(f) = 0$, então $f = 0$, pois

$$P(f) := \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\rho_{\alpha,\beta}(f)}{1 + \rho_{\alpha,\beta}(f)} \geq \|f\|_{(0,\dots,0)(0,\dots,0)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{(0,\dots,0)} \partial^{(0,\dots,0)} f| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f|.$$

Logo, P é uma norma, mas como toda norma define uma métrica, portanto P é uma métrica em $S(\mathbb{R}^n)$, onde $P := d$.

Definição 12. Dizemos que uma sequência $(\varphi_j) \subset S(\mathbb{R}^n)$ converge para a função $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ se para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_+^{2n}$, tivermos

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_j - \varphi) \rightarrow 0, \quad \text{quando } j \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Teorema 8. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $f \in S(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (2.5)$$

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, existe $C > 0$ tal que

$$|(1 + |x|^2) x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq |x^\alpha \partial^\beta f(x)| + \sum_{j=1}^n |x^{\tilde{\alpha}_j} \partial^\beta f(x)| \leq C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\tilde{\alpha}_j = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, 2 + \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$. Consequentemente, temos

$$|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

seguindo, daí (2.5). Por outro lado, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e satisfaz a condição (2.5), então dados

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, existe $M > 0$ tal que $|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq 1$ para $|x| > M$. Além disso, sendo a função $g(x) = x^\alpha \partial^\beta f(x)$ contínua na bola $B(0, M)$, existe $C > 0$ tal que $|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C$ para $|x| \leq M$, logo

$$p_{\alpha, \beta}(f) \leq \max\{1, C\}.$$

□

Teorema 9. *O espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é completo com a métrica d .*

Demonstração. Consultar [8].

□

Proposição 4. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\forall \alpha$ multi-índice,*

$$\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. $\forall \beta, \alpha'$ multi-índices,

$$x^\beta \partial^{\alpha'} \partial^\alpha f = x^\beta \partial^{\alpha + \alpha'} f.$$

mas, $x^\beta \partial^{\alpha + \alpha'} f$ é limitada, já que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, portanto temos que

$$\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

□

Proposição 5. *Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então para todo multi-índice α e todo polinômio $p(x)$, tem-se $p(x) \partial^\alpha f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $\text{supp}(p(x) \partial^\alpha f) \subseteq \text{supp} f$. Além disso, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Sejam $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp} f = K$ e G o complementar de K . Logo, $f|_G \equiv 0$. Como $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então K é compacto em \mathbb{R}^n , mas isto implica que K é fechado, logo G é aberto. Além disso, a derivada é algo local. Assim tomando $x \in G$ como G é aberto, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset G$, assim tomando $|h| < \epsilon$, teremos que $x + h \in B(x, \epsilon)$, então pela definição de derivada temos que

$$\partial^\alpha f|_G \equiv 0. \tag{2.6}$$

Para todo polinômio $p(x)$ temos

$$p(x) \partial^\alpha f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Logo, se $p(x)(\partial^\alpha f)(x) \neq 0$, então, por (2.6) $x \in K$. Assim o $\text{supp}(p(x)\partial^\alpha f) \subseteq K$ é compacto (já que o suporte de uma função é fechado). Portanto $p(x)\partial^\alpha f$ é limitada, ou seja, $\|p(x)\partial^\alpha f|_K\|_{\alpha,\beta} < \infty$, logo $f \in S(\mathbb{R}^n)$. \square

Lema 10. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Se $s > n/2$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^s} dx < \infty,$$

ou seja, $\left[(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\right]^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Introduzindo coordenadas polares, temos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^s} dx = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{(1+|x|^2)^s} dS dr.$$

Por outro lado, fazendo a mudança de variável $x = ry$, segue que

$$\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{(1+|x|^2)^s} dS = \int_{S^{n-1}} \frac{r^{n-1}}{(1+|ry|^2)^s} dS(y) = \int_{S^{n-1}} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^s} dS(y),$$

onde $y \in S^{n-1} = \partial B(0,1)$. Assim temos que

$$\int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{(1+|x|^2)^s} dS dr = \omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^s} dr,$$

onde ω_n , é a área de S^{n-1} . A última integral acima no intervalo $[0,1]$ é finita, pois o integrando é o quociente de dois polinômios em que o denominador não se anula, ou seja, a integral de uma função contínua e limitada. Por fim, a estimativa a seguir conclui o lema

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^s} dr &\leq \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{2s}} dr = \int_1^\infty r^{n-1-2s} dr \\ &= \left[\frac{r^{n-2s}}{n-2s} \right]_1^\infty = \frac{1}{2s-n}. \end{aligned}$$

\square

Teorema 11. *O conjunto $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Consultar [7] \square

Teorema 12. *Seja $p \in [1, \infty)$. Então o espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p})$, ou seja, para todo $f \in L^p$, existe uma sequência $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ em $S(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \xrightarrow{L^p} f$.*

Demonstração. Sejam $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $r > n/2$, então

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^p} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^r |\varphi(x)|^p \frac{1}{(1 + |x|^2)^r} dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^r |\varphi(x)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|^2)^r} dx < \infty. \end{aligned}$$

Isto implica que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, usando o teorema (11), observamos que

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \overline{(C_0^\infty(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{L^p})} \subset \overline{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{L^p})} \subset \overline{L^p(\mathbb{R}^n)} = L^p(\mathbb{R}^n),$$

logo $\overline{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{L^p})} = L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Lema 13. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f_k \xrightarrow{S} f$. Então $f_k \xrightarrow{L^p} f$*

Demonstração. Consultar [14] □

2.5 Transformada de Fourier

2.5.1 Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definição 13. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f como a função \hat{f} ou \mathcal{F} dada por*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\xi \cdot x = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$.

A transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ está bem definida, pois

$$|f(x) e^{-i\xi \cdot x}| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 14. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos que:*

(1) $f \mapsto \hat{f}$ define uma transformação linear de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$\widehat{af + g} = a\hat{f} + \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

(2) $\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^1}$ e \hat{f} é contínua.

Demonstração. Da definição de \hat{f} , temos que

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)e^{-i\xi \cdot x}| dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^1} < \infty. \end{aligned}$$

Logo

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_{L^1}.$$

Consequentemente, $\hat{f} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. A linearidade de $f \mapsto \hat{f}$ decorre diretamente da definição da integral, ou seja, como a integral é linear, então $f \mapsto \hat{f}$ define uma transformação linear.

Agora considere uma sequência (ξ_k) em \mathbb{R}^n , convergindo para $\xi \in \mathbb{R}^n$. Como, para cada natural k , temos que:

$$|f(x)e^{-ix \cdot \xi_k}| = |f(x)| \text{ e } f(x)e^{-ix \cdot \xi_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x)e^{-ix \cdot \xi}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

O Teorema 3 (Convergência Dominada) nos fornece

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi_k) &= (2\pi)^{-n/2} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix \cdot \xi_k} dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x)e^{-ix \cdot \xi_k} dx \\ &= \hat{f}(\xi), \end{aligned}$$

portanto \hat{f} é contínua. Com isto, ficam provadas as propriedades (1) e (2). □

Lema 15. (Riemann-Lebesgue) Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Demonstração. Consultar [14]. □

2.5.2 Transformada de Fourier em $S(\mathbb{R}^n)$

Na subseção anterior, vimos que é possível desenvolver a teoria da transformada de Fourier tomando funções $L^1(\mathbb{R}^n)$. Todavia, é extremamente conveniente introduzir um espaço de

funções "muito bem comportadas" para estudar a aplicação $f \mapsto \hat{f}$. Esse espaço é o espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ que definimos anteriormente.

Definição 14. A transformada de Fourier de uma função $f \in S(\mathbb{R}^n)$, denotada por \hat{f} é dada por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} f(x) dx. \quad (2.7)$$

Teorema 16. A transformada de Fourier define uma bijeção linear de $S(\mathbb{R}^n)$ em $S(\mathbb{R}^n)$ e sua inversa é dada por

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} f(\xi) d\xi.$$

Demonstração. Consultar [17]. □

A próxima proposição resume as principais propriedades da Transformada de Fourier no espaço de Schwartz.

Proposição 6. Sejam f e g em $S(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathbb{C}$, α um multi-índice, então valem

1. $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$,
2. $\hat{f}^\vee = f = \check{f}^\wedge$,
3. $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq C_0 \|f\|_{L^1}$,
4. $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$,
5. $\widehat{bf} = b\hat{f}$,
6. $\widehat{\check{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$,
7. $\widehat{(\partial^\alpha f)} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$,
8. $(\partial^\alpha \hat{f})(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha f)}$,
9. $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$,
10. $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

Demonstração. Consultar [14]. □

Teorema 17. (Identidade de Plancherel) Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$, então

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = \|\check{f}\|_{L^2}.$$

Demonstração. Consultar [14]. □

2.6 Distribuições Temperadas

Definição 15. Uma aplicação $T : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma distribuição temperada se

1. T é linear;
2. T é contínua, isto é, se $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$, então $T(\varphi_m) \rightarrow T(\varphi)$ em \mathbb{C} .

Em outras palavras, T é uma distribuição temperada se T é um funcional linear contínuo. O conjunto de todas as distribuições temperadas é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} que denotaremos por $S'(\mathbb{R}^n)$, ou seja, o espaço das distribuições temperadas é o dual topológico de $S(\mathbb{R}^n)$.

Notação: Utilizamos o símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar a ação de um elemento $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ em $S(\mathbb{R}^n)$, ou seja,

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \quad \text{com } T \in S'(\mathbb{R}^n) \quad \text{e } \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (2.8)$$

No que segue, precisaremos de uma noção de convergência no espaço $S'(\mathbb{R}^n)$. Isto motiva a seguinte definição

Definição 16. Dizemos que uma sequência $(T_j) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ converge a $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle T_j, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Neste caso, denotaremos $T_j \xrightarrow{S'} T$.

Agora vamos relacionar as distribuições temperadas com funções usuais. Um resultado simples, nesta direção, é descrito na proposição a seguir.

Proposição 7. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p \leq \infty$, então f define uma distribuição temperada pela seguinte fórmula

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. A linearidade de T_f decorre imediatamente da linearidade da integral. Para mostrar a continuidade de T_f , basta tomar uma sequência $(\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$ que converge a φ em $S(\mathbb{R}^n)$ e mostrar que $T_f(\varphi_m)$ converge a $T_f(\varphi)$ em \mathbb{C} . Então, tomando q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$|T_f(\varphi)| \leq \|f\varphi\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q}, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Daí, temos que

$$|T_f(\varphi_j) - T_f(\varphi)| \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi_j - \varphi\|_{L^q}.$$

Portanto, pelo Lema (13) se $\{\varphi_j\}$, é uma sequência em Schwartz tal que $\varphi_j \xrightarrow{S} (\varphi)$, então

$$T_f(\varphi_j) \longrightarrow T_f(\varphi) \quad \text{em } \mathbb{C}.$$

□

2.7 Espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$

Nesta seção, nos concentramos no estudo dos espaços $W^{k,2}(\Omega)$, com $k \in \mathbb{N}$, onde $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. Seja $\Omega = \mathbb{R}^n$, um fato importante é que podemos usar a transformada de Fourier para expressar uma norma no espaço $W^k(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n)$ equivalente a norma padrão. De fato, dado $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$, pela Proposição 6, temos que a transformada de Fourier da derivada $\partial^\alpha u(x)$ é dada por $\widehat{\partial^\alpha u}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi)$, pela identidade de Plancherel, segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha u|^2 dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\widehat{\partial^\alpha u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Por outro lado, existem constantes reais positivas c_1 e c_2 ($c_1 \leq c_2$), tais que

$$c_1 (1 + |\xi|^2)^k \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \leq c_2 (1 + |\xi|^2)^k.$$

Então, temos

$$c_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}^2 \leq c_2 \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Portanto, a norma $\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^k |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$ é equivalente a norma padrão em $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$.

A seguir, vamos definir o espaço H^s com esta norma, mas vamos considerar um s arbitrário (não somente $s \in \mathbb{N}$).

Definição 17. Sendo $s \in \mathbb{R}$, temos um subconjunto de $S'(\mathbb{R})$, chamado um espaço de Sobolev,

dado por

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

A norma em $H^s(\mathbb{R}^n)$ é dada a partir do produto interno que definimos a seguir

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi.$$

Teorema 18. *Sejam $s, k \in \mathbb{R}$ com $k > 0$ e $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Então $\partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que $|\alpha| \leq k$. Pela proposição 3, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-k} |\widehat{f^{(\alpha)}}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-k} |i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-k} |\xi^\alpha|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{s-k+|\alpha|} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $\partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 19. *(Imersão de Sobolev). Se $s > n/2$, então $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq C_\infty(\mathbb{R}^n)$ e vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^{-s} d\xi \right)^{1/2} \|f\|_{H^s},$$

aqui, $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ é a coleção das funções contínuas $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Em geral, temos que se $s > k + n/2$, onde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é imerso continuamente em $C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções $C^k(\mathbb{R}^n)$, tais que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \partial^\alpha f(x) = 0, \quad \forall |\alpha| \leq k$$

munido da norma

$$\|f\|_{\infty, k} := \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}.$$

Além disso, vale

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C_s \|f\|_{H^s}.$$

Demonstração. Dado $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, pelo Lema 10, juntamente com o Lema 2 (Desigualdade de Hölder), segue que

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^{-s/2} (1 + \xi^2)^{s/2} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^{-s} d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{H^s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^{-s} d\xi \right)^{1/2} < \infty, \end{aligned}$$

Agora usando o item (2) da Proposição 6, juntamente com a formula da transformada inversa, segue que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |(\hat{f})^\vee(x)| \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi) e^{i(x \cdot \xi)}| d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \|\hat{f}(\xi)\|_{L^1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &= \|(\hat{f})^\vee\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-n/2} \|\hat{f}\|_{L^1} \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^{-s} d\xi \right)^{1/2} \|f\|_{H^s}. \end{aligned}$$

Por um cálculo análogo ao Teorema 15, juntamente com o Teorema 3, temos a inclusão contínua de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Agora se $k > 0$, considere $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s > n/2 + k$, para certo $k \in \mathbb{N}$. Do teorema 18 tem-se que $\partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$, para todo multi-índice α satisfazendo $|\alpha| \leq k$. Como $s-k > n/2$, temos pelo caso $k = 0$, que $\partial^\alpha f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall |\alpha| \leq k$. Daí $f \in C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$ e temos a inclusão contínua desejada. \square

2.7.1 Derivação em Espaços de Banach

Encerramos o capítulo definindo as derivadas de Fréchet e de Gâteaux.

Definição 18. (Derivada de Fréchet). *Seja X um espaço de Banach e considere o funcional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$. F é (Fréchet) diferenciável em algum ponto $x \in X$ se existe um funcional linear $L \in X^*$ tal que*

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{|F(x+y) - F(x) - L(y)|}{\|y\|} = 0, \quad y \in X.$$

O funcional linear L é único e é chamado a derivada de Fréchet de F em x sendo denotado por $F'(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} F' : X &\longrightarrow \mathcal{L}[X, \mathbb{R}]. \\ x &\longmapsto F'(x) \end{aligned}$$

A aplicação $F \in C^1(X, \mathbb{R})$, se F é diferenciável para todo $x \in X$ e F' é contínua.

Definição 19. (Derivada de Gâteaux). Seja X um espaço de Banach e considere o funcional $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$. F é (Gâteaux) diferenciável em algum ponto $x \in X$ se existe um funcional linear $L \in X^*$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + ty) - F(x)}{t} \longrightarrow L(y),$$

para todo $y \in X$. A aplicação L é única e é chamada derivada de Gâteaux de F em x , sendo denotada por $F'(x)$. Se $F \in C(X, \mathbb{R})$ é Gâteaux diferenciável, para todo ponto $x \in X$, de modo que a derivada de Gâteaux $F'(x)$ é contínua, então $F \in C^1(X, \mathbb{R})$.

Capítulo 3

Noções de Operadores Lineares Limitados e Não-Limitados

Neste capítulo, damos noções básicas de teoria de operadores que serão os ingredientes essenciais para a prova do resultado de estabilidade.

3.1 Resultados Básicos

Definição 20. *Sejam X e Y espaços normados e $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ um operador linear. Dizemos que T é limitado se existe número real $c > 0$ tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Caso contrário, dizemos que T é ilimitado.

Definição 21. *Definimos a norma de uma aplicação linear limitada T por*

$$\|T\| = \inf\{M \in \mathbb{R} : \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in X\}.$$

A seguir daremos simples exemplos de operadores limitado e ilimitado.

Exemplo 7. *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ um operador linear, dado por:*

$$y = T_A(x) = Ax,$$

onde $x = (x_j)$, $y = (y_j)$ são vetores colunas com n e m componentes, respectivamente, mais ainda $A = (a_{ij})$ é uma matriz de ordem $m \times n$. T é claramente linear, além disso, o operador T é limitado.

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
 T_A(x_1, \dots, x_n) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

onde

$$y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k \quad (j = 1, \dots, m),$$

com a norma em \mathbb{R}^n dada por

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Então

$$\begin{aligned}
 \|Tx\|^2 &= \sum_{j=1}^m y_j^2 = \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k \right]^2 \\
 &\leq \sum_{j=1}^m \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \right]^2 \\
 &= \|x\|^2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2.
 \end{aligned}$$

Observando que a soma dupla na última linha não depende de x , nós podemos escrever nosso resultado como

$$\|Tx\|^2 \leq c^2 \|x\|^2 \quad \text{onde} \quad c^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{jk}^2.$$

Portanto, temos que T é limitado.

Exemplo 8. Seja X o conjunto de todos os polinômios em $[0, 1]$ com a norma do máximo. Defina $T : X \rightarrow X$ por

$$Tx(t) = x'(t).$$

Este operador é claramente linear, mas não é limitado. De fato, tome $x_n(t) = t^n$ e note

que $\|x_n\| = 1$, pois

$$\|x(t)\| = \max\{|x(t)|; t \in [0, 1]\}.$$

logo

$$Tx_n(t) = nt^{n-1} \Rightarrow \|Tx_n\| = n \implies \frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como n é arbitrário, isso mostra que não existe um número fixo c tal que

$$\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} \leq c,$$

concluimos assim que T não é limitado.

A seguinte proposição estabelece critérios para se determinar a continuidade de uma transformação linear.

Proposição 8. *Sejam E, F espaços vetoriais normados. As seguintes afirmações a respeito de uma transformação linear $f : E \rightarrow F$ são equivalentes :*

- (1) f é contínua;
- (2) f é contínua no ponto $0 \in E$;
- (3) Existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c \cdot |x|$ para todo $x \in E$;
- (4) Existe $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Demonstração. Provaremos que (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1). As implicações (1) \Rightarrow (2) e (4) \Rightarrow (1) são inteiramente óbvias. Provemos que (2) \Rightarrow (3). Sendo f contínua no ponto 0, com $f(0) = 0$, tomamos $\varepsilon = 1$ e obtemos $\delta > 0$ tal que $|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < 1$. Seja agora c qualquer número tal que $0 < 1/c < \delta$. A relação $|f(x)| \leq c \cdot |x|$ é evidente se $x = 0$. Se, porém, $x \neq 0$, então $\frac{x}{c|x|}$ tem norma $1/c$, portanto menor do que δ . Logo $\left| f\left(\frac{x}{c|x|}\right) \right| < 1$. Como f é linear, isto nos dá $\frac{1}{c|x|}|f(x)| < 1$, ou seja, $|f(x)| < c \cdot |x|$. Para mostrar que (3) \Rightarrow (4), basta notar que, sendo f linear, a hipótese (3) implica $|f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leq c \cdot |x - y|$. \square

3.2 Adjunta para Operador Limitado

Nesta seção, definimos a noção de adjunta de um operador limitado. Para tanto, iniciamos com a definição de espaço de Banach e um lema. Lembrando que um espaço vetorial normado é dito ser completo se, e somente se, toda sequência de Cauchy converge para um elemento do próprio espaço.

Definição 22. *Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo.*

Lema 20. *Todo espaço normado de dimensão finita é Banach.*

Demonstração. Consultar [6] □

Definição 23. *Dizemos que H é um espaço de Hilbert se H for um espaço vetorial normado completo, em que a norma provém de um produto interno, ou seja, é um Espaço de Banach proveniente de um produto interno.*

Lema 21. *Sejam H um espaço de Hilbert e E um subespaço fechado de H . Então,*

$$H = E \oplus E^\perp.$$

Demonstração. Consultar [19]. □

Teorema 22. *(Teorema de Representação de Riesz) Seja H um espaço de Hilbert. Dado um funcional linear limitado $f \in H^*$ existe um único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle.$$

para todo $x \in H$. Além disso,

$$\|f\|_{H^*} = \|y\|_H.$$

Em particular

$$H^* = H.$$

no sentido que estes espaços são isometricamente isomorfos.

Demonstração. Consultar [19] □

Corolário 23. *(Teorema da Representação de Riesz). Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e dimensão finita. Dado um funcional linear limitado $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, existe único $v \in V$ tal que*

$$f(u) = \langle u, v \rangle,$$

para todo $u \in V$. Além disso,

$$\|f\|_{V^*} = \|v\|_V.$$

Demonstração. Pelo Lema 20, todo espaço normado de dimensão finita é Banach, então tomando um espaço com produto interno, esse produto induz uma norma, temos assim que todo espaço vetorial de dimensão finita com produto interno é um espaço de Banach, em particular, um espaço de Hilbert, portanto estamos nas condições do teorema anterior. □

A seguir, definiremos a adjunta de uma transformação linear.

Definição 24. (*Adjunta*). Seja $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear, onde U e V são espaços vetoriais com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, respectivamente. Dizemos então que uma aplicação $T^* : V \longrightarrow U$ é a adjunta de T se esta satisfaz

$$\langle T(u), v \rangle_V = \langle u, T^*(v) \rangle_U,$$

para todo $u \in U, v \in V$.

A seguir, temos o Teorema de existência e unicidade da adjunta que usa o Teorema da Representação de Riesz em sua demonstração.

Lema 24. (*Existência e Unicidade da Adjunta*). Seja $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear, onde U e V são espaços vetoriais com produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, respectivamente, e de dimensões finitas. Então T^* existe é única e linear.

Demonstração. Consultar [15]. □

Definição 25. Seja X um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dizemos que um operador linear $T : X \longrightarrow X$ é auto-adjunto se $T = T^*$.

3.3 Teoria Espectral

Sejam H um espaço de Hilbert complexo, $D(T)$ um subespaço vetorial denso em H e

$$T : D(T) \subset H \longrightarrow H$$

um operador linear. Temos as seguintes definições:

Definição 26. Seja $T : D(T) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear densamente definido. O operador T^* , chamado o adjunto de T é definido por

$$D(T^*) = \{\eta \in H : \exists \phi \in H \mid \langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \phi \rangle, \forall \xi \in D(T)\},$$

onde $T^*\eta = \phi$, $\eta \in D(T^*)$. Diremos que T é auto-adjunto se $T^* = T$.

Definição 27. $T : D(T) \subset H \longrightarrow H$ é simétrico se, e somente se

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle, \tag{3.1}$$

para todo $u, v \in D(T)$. Pode-se provar que se (3.1) vale para todo $u, v \in H$, então T é limitado.

Proposição 9. *Seja T um operador linear densamente definido. Então, T é simétrico se, e somente se $T \subseteq T^*$, ou seja, T^* é uma extensão de T .*

Demonstração. Suponhamos $T \subseteq T^*$. Se $\xi, \eta \in D(T)$, então $\eta \in D(T^*)$. Além disso, temos que

$$(T\xi, \eta) = \langle \xi, T^*\eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle.$$

Por outro lado, se T é simétrico, então para $\eta \in D(T)$,

$$(T\xi, \eta) = \langle \xi, T\eta \rangle, \quad \xi \in D(T),$$

logo, $\eta \in D(T^*)$ e $T^*\eta = T\eta$.

□

Assim dizer que $T = T^*$ é equivalente a dizer que T é simétrico e $D(T) = D(T^*)$.

Definição 28. *Os operadores lineares $T : D(T) \subseteq H \rightarrow H$ e $T_1 : D(T_1) \subseteq H_1 \rightarrow H_1$ são ditos unitariamente equivalentes se, existe um operador unitário $V : H \rightarrow H_1$ tal que*

$$T_1V\eta = VT\eta, \eta \in D(T).$$

O operador V é chamado entrelaçante, dizemos que T e T_1 são entrelaçados por V .

Definição 29. *O gráfico de T é o conjunto*

$$\Gamma(T) = \{(x, Tx) \in H \times H; x \in D(T)\}.$$

Dizemos que T é fechado se $\Gamma(T)$ é um subespaço fechado em $H \times H$. Equivalentemente, T é fechado se, e somente se, $(x_n) \subset D(T)$, $x_n \rightarrow x \in H$ e $Tx_n \rightarrow y \in H \implies x \in D(T)$ e $Tx = y$.

Dados $T_i : D(T_i) \subset H \rightarrow H$, $i = 1, 2$, dizemos que T_2 é uma extensão de T_1 , e escrevemos $T_1 \leq T_2$, se $\Gamma(T_1) \subset \Gamma(T_2)$. Equivalentemente, $T_1 \leq T_2$ se, e somente se, $D(T_1) \subset D(T_2)$ e $T_2x = T_1x$ para todo $x \in D(T_1)$.

Dizemos que T é fechável, se este possui uma extensão fechada. A menor extensão fechada de T (que sempre existe caso T seja fechável) é chamada o fecho de T e denotada por \bar{T} .

Teorema 25. *Se T é um operador simétrico em H com domínio $D(T)$ densamente definido, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) T é auto-adjunto;
- (2) T é fechado e $\text{Ker}(T^* \pm iI) = \{0\}$;
- (3) $\text{Im}(T \pm iI) = H$.

Demonstração. Consultar [1]. □

Proposição 10. *Todo operador unitariamente equivalente a um operador auto-adjunto é auto-adjunto.*

Demonstração. Consultar [30]. □

Definição 30. (Operador resolvente) *Se o operador T_λ possui inverso, denotado por $R_\lambda(T)$, isto é, se existe*

$$R_\lambda(T) := T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1},$$

então $R_\lambda(T)$ é chamado operador resolvente de T . É claro que se $R_\lambda(T)$ existe é linear.

O nome "resolvente" é apropriado, visto que $R_\lambda(T)$ serve para resolver a equação $T_\lambda x = y$. De fato, se $R_\lambda(T)$ existe, então $x = R_\lambda(T)y$ é solução da equação $T_\lambda x = y$. Por outro lado, a investigação das propriedades do operador $R_\lambda(T)$ desempenham um papel relevante para compreender o próprio operador T .

Definição 31. (Valor próprio) *Seja $T : D(T) \rightarrow H$ um operador linear com $D(T) \subset H$. Um número complexo λ chama-se valor próprio de T se existe $x \neq 0$ em H tal que*

$$T_\lambda x = (T - \lambda I)x = 0.$$

O vetor $x \neq 0$ chama-se vector próprio de T associado ao valor próprio λ . Note que, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor próprio de T , então $R_\lambda(T)$ não existe, pois $\text{Ker}(T_\lambda) \neq \{0\}$.

Definição 32. (Valor Regular) *Seja $T : D(T) \rightarrow H$ um operador linear com $D(T) \subset H$. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um valor regular de T se valem as seguintes propriedades:*

1. O operador $R_\lambda(T)$ existe e, portanto, é linear;
2. O operador $R_\lambda(T) := T_\lambda^{-1} : \text{Im}(T_\lambda) \rightarrow D(T)$ é limitado;
3. O operador $R_\lambda(T)$ está definido em um conjunto denso de H , isto é, $\text{Im}(T_\lambda)$ é denso em H .

O conjunto de todos os valores regulares de T será denotado por $\rho(T)$ e chamado o conjunto resolvente de T .

Definição 33. (Espectro) O complemento $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ no plano complexo chama-se espectro de T e $\lambda \in \sigma(T)$ diz-se um valor espectral de T . Temos que o espectro $\sigma(T)$ é a união disjunta dos seguintes conjuntos

$$\sigma(T) = \sigma_d(T) \sqcup \sigma_c(T) \sqcup \sigma_r(T),$$

onde:

1. $\sigma_d(T)$: é o espectro discreto de T , isto é, o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $R_\lambda(T)$ não existe. Portanto, se $\lambda \in \sigma_d(T)$, então λ é um valor próprio de T ;
2. $\sigma_c(T)$: é o espectro contínuo de T , isto é, o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que o operador $R_\lambda(T)$ existe e satisfaz a condição 3. da Definição 32, mas não satisfaz a condição 2. da Definição 32, ou seja, $R_\lambda(T)$ é ilimitado;
3. $\sigma_r(T)$: é o espectro residual de T , isto é, o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $R_\lambda(T)$ existe e não satisfaz a condição 3. da Definição 32, ou seja, o domínio de $R_\lambda(T)$ não é denso em H . Neste caso, $R_\lambda(T)$ pode ou não ser limitado.

Logo, temos a seguinte união disjunta

$$\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma(A) = \rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Proposição 11. O operador $-\Delta : H^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ é ilimitado.

Demonstração. Pela Proposição (8), basta provar que o operador multiplicação $M_{|\xi|^2}$ não é contínuo. Para isso, considere a sequência de funções

$$\widehat{\varphi}_k(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{-\frac{(n+1)}{2}}, & k \leq |\xi| \leq k+1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Introduzindo as coordenadas polares, temos que

$$\xi = ry, \quad r \in [0, \infty), y \in S^{n-1},$$

onde S^{n-1} denota, como de hábito, a esfera de raio um centrada na origem de \mathbb{R}^n . Lembrando que $d\xi = r^{n-1} dr dS(y)$, onde $dS(y)$ é a medida de superfície em S^{n-1} , segue que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\varphi}_k\|_{L^2}^2 &= \int_{k \leq |\xi| \leq k+1} |\xi|^{-n-1} d\xi \\
&= \int_{S^{n-1}} dS(y) \int_k^{k+1} r^{n-1} r^{-n-1} dr \\
&= \omega \int_k^{k+1} r^{-2} dr = \omega \left[-\frac{1}{r} \right]_k^{k+1} = \omega \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right),
\end{aligned}$$

onde ω é área da esfera S^{n-1} . Portanto, $\widehat{\varphi}_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ na norma L^2 . Mas

$$\begin{aligned}
\|M_{|\xi|^2} \widehat{\varphi}_k\|_{L^2}^2 &= \int_{\substack{k \leq |\xi| \leq k+1 \\ k+1}} |\xi|^4 |\xi|^{-n-1} d\xi \\
&= \int_{S^{n-1}} dS(y) \int_k^{k+1} dr r^2 \\
&= \omega \frac{r^3}{3} \Big|_k^{k+1} = \frac{\omega}{3} (3k^2 + 3k - 1) \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

quando $k \rightarrow \infty$ e a proposição está provada, pois se o operador $-\Delta$ fosse contínuo, então dado uma sequência $\widehat{\varphi}_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ na norma L^2 , então pela identidade de Plancherel, temos que

$$\|\widehat{\varphi}_k\|_{L^2}^2 = \|\varphi_k\|_{L^2}^2 \implies \varphi_k \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty \text{ na norma } L^2, \quad (3.2)$$

usando a continuidade da norma, juntamente com a equação (3.2), segue que

$$\|-\Delta \varphi_k\|_{L^2}^2 = \|\mathcal{F}^{-1} M_{|\xi|^2} \mathcal{F} \varphi_k\|_{L^2}^2 = \|M_{|\xi|^2} \widehat{\varphi}_k\|_{L^2}^2 \rightarrow \|-\Delta 0\|_{L^2}^2 = \|M_{|\xi|^2} 0\|_{L^2}^2 = 0,$$

mas isso contradiz o resultado anteriormente obtido, logo o operador $-\Delta$ é ilimitado. \square

Na proposição a seguir, o operador dado está associado à solução particular (Soliton) Q_c da equação gKdV (1.4).

Proposição 12. *O operador $\mathcal{L} : C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ dado por:*

$$\mathcal{L}_z := -z_{xx} + cz - pQ_c^{p-1}z, \quad (3.3)$$

é simétrico

Demonstração. Sejam w e $z \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Então

$$\begin{aligned}\langle w, \mathcal{L}z \rangle &= \int_{\mathbb{R}} w \overline{\mathcal{L}z} dx = \int_{\mathbb{R}} w \overline{(-z_{xx} + cz - pQ_c^{p-1}z)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} -w \overline{z_{xx}} dx + \int_{\mathbb{R}} cw \overline{z} dx - \int_{\mathbb{R}} pw Q_c^{p-1} \overline{z} dx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}w, z \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}w \overline{z} dx = \int_{\mathbb{R}} (-w_{xx} + cw - pQ_c^{p-1}w) \overline{z} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} -w_{xx} \overline{z} dx + \int_{\mathbb{R}} cw \overline{z} dx - \int_{\mathbb{R}} pw Q_c^{p-1} \overline{z} dx.\end{aligned}$$

A função Q_c acima assume valores reais. Agora, usando integração por partes, temos que

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} -w \overline{z_{xx}} dx = -w \overline{z_x} \Big|_{\mathbb{R}} + \int_{\mathbb{R}} w_x \overline{z_x} dx = \int_{\mathbb{R}} w_x \overline{z_x} dx \\ \int_{\mathbb{R}} -w_{xx} \overline{z} dx = -w_x \overline{z} \Big|_{\mathbb{R}} + \int_{\mathbb{R}} w_x \overline{z_x} dx = \int_{\mathbb{R}} w_x \overline{z_x} dx \end{cases} \implies \int_{\mathbb{R}} -w \overline{z_{xx}} dx = \int_{\mathbb{R}} -w_{xx} \overline{z} dx,$$

logo

$$\langle w, \mathcal{L}z \rangle = \langle z, \mathcal{L}w \rangle,$$

portanto o operador \mathcal{L} é simétrico. □

A seguir, introduziremos resultados primordiais usados nas demonstrações dos Lemas 29 e 30. Em tais resultados, usamos o fato de que \mathcal{L} é o operador (3.3) dado na Proposição 12. Lembrando que tal operador está associado à solução particular (Soliton) Q_c da equação gKdV (1.4).

Lema 26. *As seguintes afirmações são satisfeitas*

- (a) \mathcal{L} é um operador auto-adjunto definido em $L^2(\mathbb{R})$, com domínio $D(\mathcal{L}) = H^2(\mathbb{R})$;
- (b) $\ker(\mathcal{L})$ é formado por Q'_c ;
- (c) \mathcal{L} tem um único autovalor negativo $-\lambda_0 < 0$ de multiplicidade um. A função própria (explícita) associada χ_c é tal que $\chi_c \in S(\mathbb{R})$ (Espaço de Schwartz) e toma valores reais, com

$$\mathcal{L}\chi_c = -\lambda_0\chi_c, \quad \|\chi_c\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1,$$

- (d) O espectro contínuo de \mathcal{L} é o intervalo fechado $[c, +\infty)$;

(e) (**Coercividade**). Existe $\gamma > 0$ tal que vale o seguinte: Assuma que

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{z} Q'_c dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \chi_c dx = 0,$$

então

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L} \tilde{z} dx \geq \gamma \|\tilde{z}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2.$$

Demonstração. Esse lema se encontra em [27]. Também sugerimos, como referência para prova de alguns dos itens, a leitura de [1]. \square

Capítulo 4

A Equação de KdV Generalizada

Neste capítulo, trabalhamos com a equação de Korteweg-de Vries generalizada (gKdV) dada por

$$u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

onde $u = u(x, t)$ é uma função de valor real, e $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. O caso $p = 2$ é a famosa equação de Korteweg-de Vries (KdV). O estudo da equação acima é bem técnico, exigindo muitas ferramentas da Análise Harmônica, ver por exemplo, o livro de (Linares e Ponce [24]), quando considerarmos o problema de Cauchy, dado por

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}, \quad (4.2)$$

onde u_0 é uma função em um certo espaço de Banach.

4.1 O Princípio de Duhamel

Nesta seção, vamos obter uma representação integral de (4.2), para $p = 2, 3$ e 4 . Aplicando a transformada de Fourier com respeito a variável x para $u(x, t) \in S'(\mathbb{R})$ no sistema (4.2), obtemos

$$\begin{cases} \widehat{\partial_t u}(\xi, t) + (i\xi)^3 \widehat{u}(\xi, t) + p \widehat{u^{p-1} \partial_x u}(\xi, t) = 0, \\ \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u_0}(\xi). \end{cases} \quad (4.3)$$

Multiplicando a primeira equação de (4.3) pelo fator integrante $e^{(i\xi)^3 t}$, obtemos

$$\widehat{u}_t e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \widehat{u} e^{(i\xi)^3 t} + e^{(i\xi)^3 t} \widehat{f}(t) = 0, \quad (4.4)$$

onde $f(x, t) = pu(x, t)^{p-1} \partial_x u(x, t)$. Observando que

$$\frac{d}{dt} \left(\widehat{u} e^{(i\xi)^3 t} \right) = \widehat{u}_t e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}, \quad (4.5)$$

de (4.4) e (4.5), obtemos a relação

$$\frac{d}{dt} \left(\widehat{u} e^{(i\xi)^3 t} \right) = -\widehat{f}(t) e^{(i\xi)^3 t}.$$

Integrando de 0 até t , temos a seguinte igualdade

$$e^{(i\xi)^3 t} \widehat{u}(t) = \widehat{u}_0 - \int_0^t \widehat{f}(t') e^{(i\xi)^3 t'} dt',$$

ou ainda,

$$\widehat{u}(t) = \widehat{u}_0 e^{-(i\xi)^3 t} - e^{-(i\xi)^3 t} \int_0^t \widehat{f}(t') e^{(i\xi)^3 t'} dt'.$$

Portanto, aplicando a transformação inversa, obtemos a equação

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(\widehat{u}_0 e^{-(i\xi)^3 t} \right)^\vee - \left(e^{-(i\xi)^3 t} \int_0^t \widehat{f}(t') e^{(i\xi)^3 t'} dt' \right)^\vee \\ &= \left(\widehat{u}_0 e^{-(i\xi)^3 t} \right)^\vee - \int_0^t \left(e^{i\xi^3(t'-t)} \widehat{f}(t') \right)^\vee dt', \end{aligned}$$

por outro lado tomando $S(t)u_0 = \left(e^{-(i\xi)^3 t} \widehat{u}_0 \right)^\vee$, logo

$$\left(e^{i\xi^3(t'-t)} \widehat{f}(t') \right)^\vee = S(t'-t) f(t') = S(t'-t) (pu^{p-1} u_x)(t'),$$

então temos a identidade

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-t') (pu^{p-1} \partial_x u)(t') dt', \quad (4.6)$$

ou seja,

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-t') (\partial_x u^p)(t') dt'. \quad (4.7)$$

Isto é, se u satisfaz o sistema (4.2), então u satisfaz a equação integral (4.7), a qual recebe o nome de fórmula de Duhamel.

4.2 Boa Colocação

Nesta seção, definimos o conceito de boa colocação. Para isso, considere a seguinte definição

Definição 34. *Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados com $X \subseteq Y$. Dizemos que X está imerso continuamente em Y se existe $C > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Nesse caso, escrevemos $X \hookrightarrow Y$.

Observe que dizer que a imersão de X em Y é contínua é equivalente a dizer que a aplicação identidade $i : X \rightarrow Y$ dada por $i(x) = x, x \in X$, é contínua.

Agora, retornemos ao problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (4.8)$$

Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço reflexivo de Banach que suporemos ser imerso continuamente no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Suponhamos também que exista outro espaço reflexivo de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ que é imerso continuamente em X . Supondo que o problema (5.1) tem solução e que esta é única, podemos definir uma função que, a cada condição inicial u_0 em um espaço Y , associa uma única solução u em um espaço X . Essa função é chamada de fluxo e está bem definida pela existência e unicidade de solução.

A seguir, damos a noção de boa colocação usada neste trabalho.

Definição 35. *(Boa Colocação) Dizemos que o problema de Cauchy (4.8) é localmente bem posto (l.w.p.) em Y se valem as seguintes condições:*

- (1) *Para cada $u_0 \in Y$ existe um T e uma única solução u de (4.8) tal que $u \in C([-T, T]; Y)$ e $u(0) = u_0$;*
- (2) *O fluxo é contínuo, ou seja, a aplicação*

$$u_0 \in Y \longmapsto u \in C([-T, T]; Y),$$

é contínua. Aqui u é a solução de (4.8) associada do dado inicial u_0 . Em outras palavras, a solução depende continuamente do dado inicial. Dizemos que o problema inicial avaliado

(4.8) está globalmente bem colocado (g.w.p.) em Y se pudermos escolher T na parte (1) da definição acima, como qualquer número real.

O espaço X , usado na definição acima, é o clássico espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ que satisfaz a inclusão $H^r(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$ para $r \leq s$. Para estabelecer um resultado de boa colocação para a equação (5.1), o método geralmente usado é baseado na resolução da equação integral correspondente associado a (5.1), a saber, a fórmula de Duhamel.

Teorema 27. *Seja $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, para $s \geq 1$ com $p = 2, 3$ ou 4 , então existe um único $u \in C(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}))$ solução de (4.2) no sentido de Duhamel:*

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s) [(u^p)_x(s)] ds, \quad S(t)u_0 = \left(e^{i\xi^3 t} \widehat{u}_0 \right)^\vee,$$

Além disso, temos que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \right).$$

Demonstração. Consultar [18] e [2]. □

4.3 Leis de Conservação

Nesta seção, obtemos leis de conservação que são essenciais na prova do resultado de estabilidade orbital. Mais precisamente temos a seguinte proposição.

Proposição 13. *Seja $u(x, t)$ uma solução do problema de Cauchy (4.2), com dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, dada pelo Teorema 27.*

(a) *A massa é preservada, isto é,*

$$M[u](t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(x, 0) dx = M[u_0],$$

(b) *A energia é conservada, ou seja:*

$$E[u](t) := \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u_x^2(x, t)}{2} dx - \frac{u^{p+1}(x, t)}{p+1} \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u_x^2(x, 0)}{2} dx - \frac{u^{p+1}(x, 0)}{p+1} \right) dx = E[u_0].$$

Demonstração. Seja $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma solução global para a equação (4.1) com decaimento, ou seja $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u^{(n)}(x, t) = 0$.

(a) Multiplicando a equação (4.1) por u obtemos

$$uu_t + uu_{xxx} + pu^p u_x = uu_t + [(u_x u_{xx} + uu_{xxx}) - u_x u_{xx} + pu^p u_x] = 0,$$

que podemos reescrever na forma

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \partial_x \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{p}{p+1} u^{p+1} \right) = 0,$$

ou

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = -\partial_x \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{p}{p+1} u^{p+1} \right).$$

Integrando sobre a reta e lembrando que $u(x) \rightarrow 0$ (assim como todas as suas derivadas) quando $x \rightarrow \pm\infty$. Usando a regra de Leibniz para derivar sob o sinal de integração, podemos então escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} u^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t \left(\frac{1}{2} u^2 \right) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{p}{p+1} u^{p+1} \right) dx \\ &= - \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{p}{p+1} u^{p+1} \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx = A_1,$$

onde A_1 é uma constante, portanto concluímos que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(x, 0) dx.$$

(b) Multiplicando a equação (4.1) por $u_{xx} + u^p$, segue que

$$u_t(u_{xx} + u^p) = -(u_{xx} + u^p)_x (u_{xx} + u^p).$$

Novamente, integrando sobre a reta e lembrando que $u(x) \rightarrow 0$ (assim como todas as suas derivadas), quando $x \rightarrow \pm\infty$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u_t(u_{xx} + u^p)dx &= - \int_{\mathbb{R}} (u_{xx} + u^p)_x (u_{xx} + u^p)dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \partial_x (u_{xx} + u^p)^2 dx \\
&= - \frac{1}{2} (u_{xx} + u^p)^2 \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Usando novamente a regra de Leibniz, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u_t u_{xx} + u_t u^p dx &= \int_{\mathbb{R}} u_t u_{xx} dx + \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx \\
&= u_x u_t \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{\mathbb{R}} u_x u_{tx} dx + \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} u_x u_{tx} dx + \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx \\
&= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx + \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx,
\end{aligned}$$

mas por (4.9), temos que

$$- \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx + \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx = 0,$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx - \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx = 0.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx \right) = 0,$$

logo

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1} dx = A_2,$$

onde A_2 é uma constante. Portanto, temos que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x, t) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1}(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x, 0) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1}(x, 0) dx.$$

Por fim, vamos obter o resultado no caso em que $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ e $u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}))$. De

fato, temos que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $H^1(\mathbb{R})$, então existe $u_{0_n} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$u_{0_n} \longrightarrow u_0 \in H^1(\mathbb{R}).$$

Mas $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset H^4(\mathbb{R})$, logo pelo Teorema 27, temos que para cada dado inicial $u_{0_n} \in H^4(\mathbb{R})$, existe uma única solução u_n do problema (4.2). Agora, pela imersão de Sobolev, temos que

$$u_n(x, t) \in H^4(\mathbb{R}) \implies u_n(x, t) \in C_0^3,$$

para cada t fixo, pois $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_\infty^k(\mathbb{R})$ para $s > k + \frac{1}{2}$, então tomando $k = 3, n = 1$ segue o resultado acima. Portanto, pelos casos anteriores, temos que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_n^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_n^2(x, 0) dx \quad \text{em } H^4(\mathbb{R}). \quad (4.10)$$

e

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_x u_n^2(x, t) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} u_n^{p+1}(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_x u_n^2(x, 0) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} u_n^{p+1}(x, 0) dx. \quad (4.11)$$

Por outro $H^4(\mathbb{R}) \subset H^1(\mathbb{R})$, o que implica $u_{0_n} \in H^1(\mathbb{R})$, além disso, sabemos que o fluxo $u_0 \longrightarrow u \in C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}))$ é contínuo, ou seja, a aplicação $\Gamma : H^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}))$ dada por

$$\Gamma(u_0) = u,$$

é contínua, então usando o fato de que $u_{0_n} \longrightarrow u_0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} u_n^2 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} u^2 dx$$

Portanto, fazendo $n \longrightarrow \infty$ em (4.10), obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(x, 0) dx,$$

portanto, provamos o caso (a), para $u \in H^1(\mathbb{R})$.

Já no caso (b), aplicamos a seguinte desigualdade de **Gagliardo-Nirenberg** que diz:

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} |v|^{p+1} dx \leq C(p) \left(\int_{\mathbb{R}} v^2 dx \right)^{(p+3)/4} \left(\int_{\mathbb{R}} v_x^2 dx \right)^{(p-1)/4}.$$

Finalmente, fazendo $n \rightarrow +\infty$ em (4.11), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u_x^2(x, t)}{2} dx - \frac{u^{p+1}(x, t)}{p+1} \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{u_x^2(x, 0)}{2} dx - \frac{u^{p+1}(x, 0)}{p+1} \right) dx.$$

A prova da desigualdade de **Gagliardo-Nirenberg** pode ser encontrada em [12], com isso concluímos a demonstração da Proposição 13. □

4.4 Solução Tipo Onda Solitária

Nesta seção, vamos encontrar uma solução particular, tipo onda solitária (Soliton) Q_c , para a equação generalizada de Korteweg-de Vries (gKdV) (4.1), tal que Q_c é uma função real, de modo que Q_c e todas as suas derivadas $Q_c^{(n)}$ tendem para zero, quando $s \rightarrow \pm\infty$. Para isso, introduzimos a forma de onda solitária $u(x, t) = Q_c(x - ct - x_0)$, com $c > 0$ (que representa a velocidade da onda) e x_0 (uma constante arbitrária).

Observe que:

1. $u_t = \frac{d}{dt} Q_c(x - ct - x_0) = -cQ_c'(x - ct - x_0);$
2. $u_x = \frac{d}{dx} Q_c(x - ct - x_0) = Q_c'(x - ct - x_0);$
3. $u_{xxx} = \frac{d^3}{dx^3} Q_c(x - ct - x_0) = Q_c'''(x - ct - x_0).$

Fazendo a mudança de variável $s = x - ct - x_0$ e introduzindo esta forma de onda solitária na equação da gKdV(4.1), ficamos com uma equação diferencial ordinária para $Q_c(s)$ da seguinte forma:

$$-cQ_c' + pQ_c^{p-1}Q_c' + Q_c''' = 0.$$

Aplicando a integral em relação a s em ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} \int -cQ_c' ds + \int pQ_c^{p-1}Q_c' ds + \int Q_c''' ds &= \int 0 ds, \\ -cQ_c + \int (Q_c^p)' ds + Q_c'' &= -cQ_c + Q_c^p + Q_c'' = a. \end{aligned}$$

No entanto temos que $Q_c, Q_c^{(n)} \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow \pm\infty$, isso implica que $a = 0$, assim

$$-cQ_c + Q_c^p + Q_c'' = 0. \tag{4.12}$$

Agora multiplicando $-cQ_c + Q_c^p + Q_c'' = 0$ por Q_c' segue que

$$-cQ_cQ_c' + Q_c^pQ_c' + Q_c''Q_c' = 0.$$

Integrando novamente com relação s , obtemos que:

$$\begin{aligned} \int -cQ_cQ_c'ds + \int Q_c^pQ_c'ds + \int Q_c''Q_c'ds &= -c \int \frac{(Q_c^2)'}{2} ds + \int \frac{(Q_c^{p+1})'}{p+1} ds + \int \frac{[(Q_c')^2]'}{2} ds \\ &= \frac{-cQ_c^2}{2} + \frac{Q_c^{p+1}}{p+1} + \frac{(Q_c')^2}{2} \\ &= b. \end{aligned}$$

Analogamente, pelo mesmo motivo que no caso $a = 0$, temos também que $b = 0$, daí segue que

$$-c(p+1)Q_c^2 + 2Q_c^{p+1} + (p+1)(Q_c')^2 = 0,$$

Colocando o termo Q_c^2 em evidência, obtemos a seguinte equação

$$(p+1)(Q_c')^2 = [c(p+1) - 2Q_c^{p-1}]Q_c^2. \quad (4.13)$$

Observamos agora que é necessário $[c(p+1) - 2Q_c^{p-1}(s)] > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$. Além disso, pela física do problema, podemos supor que $Q_c(s) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

Daí, $0 < Q_c < \left[\frac{1}{2}c(p+1)\right]^{1/(p-1)} \quad \forall s \in \mathbb{R}$. Segue portanto de (4.13) que

$$\frac{\sqrt{p+1}|Q_c'|}{Q_c\sqrt{c(p+1) - 2Q_c^{p-1}}} = 1. \quad (4.14)$$

Então, tomando $\phi^2 = (p+1)c - 2Q_c^{p-1}$, temos

$$Q_c = \left(\frac{c(p+1) - \phi^2}{2}\right)^{1/p-1} \implies Q_c' = \frac{1}{p-1} \left(\frac{c(p+1) - \phi^2}{2}\right)^{2-p/p-1} \left(\frac{-2\phi\phi'}{2}\right).$$

Por (4.14), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{p+1}|Q'_c|}{Q_c\sqrt{c(p+1)-2Q_c^{p-1}}} &= \frac{\sqrt{p+1}/(p-1)\left(\left(c(p+1)-\phi^2\right)/2\right)^{(2-p)/p-1}(-\phi\phi')}{\left(\left(c(p+1)-\phi^2\right)/2\right)^{1/p-1}\sqrt{c(p+1)-2\left(\left(c(p+1)-\phi^2\right)/2\right)^{(p-1)/p-1}}} \\
&= \frac{\sqrt{p+1}}{p-1}\left[\left(\frac{c(p+1)-\phi^2}{2}\right)^{1/p-1}\right]^{(-p+2)-1}\frac{-\phi\phi'}{\sqrt{c(p+1)-c(p+1)+\phi^2}} \\
&= \frac{\sqrt{p+1}}{p-1}\left[\left(\frac{c(p+1)-\phi^2}{2}\right)^{1/p-1}\right]^{-(p-1)}\frac{-\phi\phi'}{\phi} \\
&= \frac{\sqrt{p+1}}{p-1}\left[\left(\frac{c(p+1)-\phi^2}{2}\right)^{1/p-1}\right]^{-(p-1)}(-\phi') \\
&= \frac{\sqrt{p+1}}{p-1}\left(\frac{c(p+1)-\phi^2}{2}\right)^{-1}(-\phi') \\
&= \frac{2\sqrt{p+1}}{p-1}\frac{(-\phi')}{c(p+1)-\phi^2}=1.
\end{aligned}$$

Agora, usando frações parciais, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{p+1}}{p-1}\frac{(-\phi')}{c(p+1)-\phi^2} &= \frac{2\sqrt{p+1}}{p-1}\frac{(-\phi')}{(\sqrt{c(p+1)}-\phi)(\sqrt{c(p+1)}+\phi)} \\
&= \frac{A}{(\sqrt{c(p+1)}-\phi)} + \frac{B}{(\sqrt{c(p+1)}+\phi)}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{2\sqrt{p+1}}{p-1}(-\phi') = (A+B)(\sqrt{c(p+1)}) + (A-B)\phi,$$

então

$$\begin{cases} A - B = 0 \\ (A + B)\sqrt{c(p+1)} = \frac{2\sqrt{p+1}(-\phi')}{(p-1)}. \end{cases}$$

Assim,

$$2A\sqrt{c(p+1)} = \frac{-2\sqrt{p+1}\phi'}{p-1} \implies A = \frac{-\phi'}{\sqrt{c(p-1)}},$$

daí segue que

$$\frac{\phi'}{\sqrt{c(p+1)} - \phi} + \frac{\phi'}{\sqrt{c(p+1)} + \phi} = -\sqrt{c}(p-1).$$

Integrando, obtemos

$$\int \frac{\phi'}{\sqrt{c(p+1)} - \phi} ds + \int \frac{\phi'}{\sqrt{c(p+1)} + \phi} ds = \int -\sqrt{c}(p-1) ds,$$

logo

$$\log(\sqrt{c(p+1)} + \phi) - \log(\sqrt{c(p+1)} - \phi) = -\sqrt{c}(p-1)s + d.$$

Temos então

$$\log\left(\frac{\sqrt{c(p+1)} + \phi}{\sqrt{c(p+1)} - \phi}\right) = -\sqrt{c}(p-1)s + d \implies \left(\frac{\sqrt{c(p+1)} + \phi}{\sqrt{c(p+1)} - \phi}\right) = e^{-\sqrt{c}(p-1)s+d},$$

mas isso implica que

$$\phi(s) = \sqrt{c(p+1)} \left(\frac{e^{-\sqrt{c}(p-1)s+d} - 1}{e^{-\sqrt{c}(p-1)s+d} + 1} \right) = -\sqrt{c(p+1)} \tanh\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)s - d}{2}\right).$$

Como

$$Q_c(s) = \left(\frac{c(p+1) - \phi^2}{2}\right)^{1/(p-1)} \quad \text{e} \quad \tanh^2(s) + \operatorname{sech}^2(s) = 1,$$

segue que

$$\begin{aligned} Q_c &= \left(\frac{c(p+1) - \phi^2}{2}\right)^{1/(p-1)} \\ &= \left[\frac{c(p+1)}{2} - \frac{c(p+1)}{2} \tanh^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)s - d}{2}\right)\right]^{1/(p-1)} \\ &= \left[\frac{c(p+1)}{2} \left(1 - \tanh^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)s - d}{2}\right)\right)\right]^{1/(p-1)} \\ &= \left[\frac{c(p+1)}{2} \left(\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)s - d}{2}\right)\right)\right]^{1/(p-1)} \\ &= c^{1/(p-1)} \left(\frac{p+1}{2 \cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)s - d}{2}\right)}\right)^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Para simplificar a solução adotamos $d = 0$, então

$$Q_c(s) = c^{1/(p-1)}Q(\sqrt{cs}),$$

onde

$$Q(s)(= Q_{c=1}) := \left(\frac{p+1}{2\cosh^2\left(\frac{p-1}{2}s\right)} \right)^{1/(p-1)}. \quad (4.15)$$

Encontramos portanto uma solução $Q_c > 0$ da equação de gKdV do tipo onda solitária que satisfaz a EDO não linear.

$$-cQ'_c + pQ_c^{p-1}Q'_c + Q_c''' = 0, \quad \text{com } Q_c \in H^1(\mathbb{R}) \text{ e } Q_c \in S(\mathbb{R})$$

A figura a seguir mostra a evolução no tempo de uma onda unidimensional (Soliton) com velocidade de propagação c .

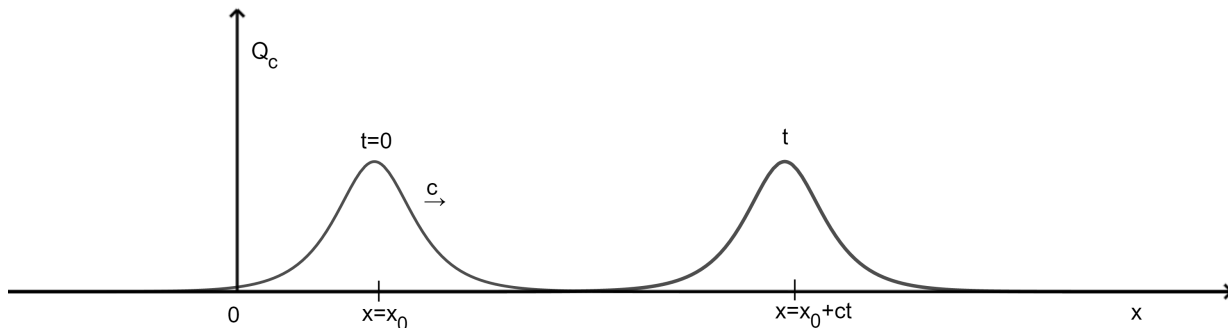


Figura 4.1: Evolução do Soliton

Capítulo 5

Estabilidade de Solitons

O objetivo deste capítulo é provar o principal resultado do trabalho, a saber, estabilidade orbital de solitons.

5.1 Propriedades da solução tipo Soliton

Uma relação entre solitons e o resultado da boa colocação global pode ser estabelecida, usando a norma L^2 de cada soliton, mais precisamente

$$\|Q_c\|_{L^2(\mathbb{R})} \sim c^{\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}}.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}\|Q_c\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |c^{\frac{1}{p-1}} Q(\sqrt{cs})|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (c^{\frac{2}{p-1}})^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |Q(\sqrt{cs})|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \int_{\mathbb{R}} |Q(s')|^2 ds' \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c^{\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}} |Q(s')|^2 ds' \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c^{\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}} M,\end{aligned}$$

onde $M := \int_{\mathbb{R}} |Q(s')|^2 ds'$. Temos que:

- Se $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4} > 0$, então $p = 2, 3, 4$. Neste caso, dizemos que o regime é L^2 - subcrítico. Note que aqui quanto menor for o soliton, menor será sua massa;
- Se $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4} = 0$, então $p = 5$. Portanto esse regime é chamado L^2 - crítico. Neste caso, a massa permanece inalterada independente do tamanho do soliton;
- Já se $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4} < 0$, então $p > 5$. E esse é chamado o regime L^2 - supercrítico. Aqui acontece algo menos comportado, a saber, quanto menor o tamanho do soliton, maior é sua massa.

Proposição 14.

$$(a) \quad \Lambda Q_c(s) := \partial_c Q_c(s) = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{p-1} Q_c(s) + \frac{1}{2} s Q'_c(s) \right);$$

$$(b) \quad \mathcal{L} \Lambda Q_c = -Q_c;$$

$$(c) \quad \partial_c \int_{\mathbb{R}} Q_c^2 \Big|_{c=1} =: \int_{\mathbb{R}} \Lambda Q Q \begin{cases} > 0, & p = 2, 3, 4, \\ = 0, & p = 5, \\ < 0, & p > 5, \end{cases}$$

onde $\Lambda Q := \Lambda Q_c|_{c=1}$. Além disso, ΛQ_c é uma função par.

Demonstração. Inicialmente provemos (a). Dado $Q_c(s) = c^{1/(p-1)} Q(\sqrt{cs})$, temos

$$\begin{aligned} \partial_c Q_c(s) &= \frac{c^{\frac{1}{p-1}-1}}{p-1} Q(\sqrt{cs}) + c^{\frac{1}{p-1}} \frac{Q'(\sqrt{cs})s}{2\sqrt{c}} \\ &= \frac{c^{\frac{1}{p-1}}}{c(p-1)} Q(\sqrt{cs}) + c^{\frac{1}{p-1}} \frac{Q'(\sqrt{cs})s}{2\sqrt{c}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$Q'_c(s) = c^{\frac{1}{p-1}} Q'(\sqrt{cs}) \sqrt{c} \implies \frac{Q'_c(s)}{\sqrt{c}} = c^{\frac{1}{p-1}} Q'(\sqrt{cs}),$$

daí

$$c^{\frac{1}{p-1}} \frac{Q'(\sqrt{cs})s}{2\sqrt{c}} = \frac{Q'_c(s)s}{2\sqrt{c}\sqrt{c}} = \frac{Q'_c(s)s}{2c}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \partial_c Q_c(s) &= \frac{c^{\frac{1}{p-1}}}{c(p-1)} Q(\sqrt{cs}) + c^{\frac{1}{p-1}} \frac{Q'(\sqrt{cs})s}{2\sqrt{c}} \\ &= \frac{1}{c} \left(\frac{1}{p-1} Q_c(s) + \frac{1}{2} s Q'_c(s) \right). \end{aligned}$$

(b) Usando a equação (4.12), juntamente com o item (a) temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Lambda Q_c &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{c}\left(\frac{1}{p-1}Q_c(s) + \frac{1}{2}sQ'_c(s)\right)\right) \\
&= \frac{1}{c(p-1)}\mathcal{L}Q_c(s) + \frac{1}{2c}\mathcal{L}(sQ'_c(s)) \\
&= \frac{1}{c(p-1)}(-Q''_c + cQ_c - pQ_c^{p-1}Q'_c) + \frac{1}{2}\left[-(sQ'_c)'' + c(sQ'_c) - pQ_c^{p-1}(sQ'_c)\right] \\
&= \frac{1}{c(p-1)}(-Q''_c + cQ_c - pQ_c^{p-1}Q'_c) + \frac{1}{2}\left[-(sQ'_c + Q'_c)' + c(sQ'_c) - pQ_c^{p-1}(sQ'_c)\right] \\
&= \frac{1}{c(p-1)}(-Q''_c + cQ_c - pQ_c^{p-1}Q'_c) + \frac{1}{2}\left[-sQ_c''' + 2Q''_c + c(sQ'_c) - pQ_c^{p-1}(sQ'_c)\right] \\
&= \frac{1}{c(p-1)}(-Q''_c + cQ_c + pQ''_c - pcQ_c) + \frac{s}{2}(-Q_c''' + cQ'_c - pQ_c^{p-1}Q'_c) - Q''_c \\
&= \frac{1}{c(p-1)}(-Q''_c + cQ_c + pQ''_c - pcQ_c) - \frac{1}{c}Q''_c \\
&= -Q_c.
\end{aligned}$$

(c) Novamente, pelo item (a), sabemos que

$$\Lambda Q_c(s) := \partial_c Q_c(s) = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{p-1}Q_c(s) + \frac{1}{2}sQ'_c(s)\right),$$

onde $\Lambda Q := \Lambda Q_c|_{c=1}$, logo

$$\begin{aligned}
\partial_c \int_{\mathbb{R}} Q_c^2 ds \Big|_{c=1} &=: \int_{\mathbb{R}} \Lambda Q Q ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{p-1}Q(s) + \frac{1}{2}sQ'(s)\right) Q(s) ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p-1}Q^2(s) ds + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}sQ'(s)Q(s) ds.
\end{aligned}$$

Agora, usando integração por partes, temos que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} sQ'Q ds = \frac{1}{2} \left(sQ^2 \Big|_{\mathbb{R}} - \int_{\mathbb{R}} (Q + sQ')Q ds \right).$$

Daí

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} sQ'Q ds = -\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} Q^2 ds,$$

pois $sQ^2 \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \pm\infty$, visto que

$$\begin{aligned} sQ^2 \Big|_{\mathbb{R}} &= s \left(\frac{p+1}{2 \cosh^2\left(\frac{p-1}{2}s\right)} \right)^{2/(p-1)} \Big|_{\mathbb{R}} \\ &= \left(\frac{p+1}{2} \right)^{2/p-1} 2^{4/p-1} s \left(\frac{1}{e^{(p-1)s/2} + e^{-(p-1)s/2}} \right)^{4/(p-1)} \Big|_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Logo

- $0 \leq K s \left(\frac{1}{e^{(p-1)s/2} + e^{-(p-1)s/2}} \right)^{4/(p-1)} \leq K s \left(\frac{1}{e^{(p-1)s/2}} \right)^{4/(p-1)}, s \geq 0,$
- $K s \left(\frac{1}{e^{-(p-1)s/2}} \right)^{4/(p-1)} \leq K s \left(\frac{1}{e^{(p-1)s/2} + e^{-(p-1)s/2}} \right)^{4/(p-1)} \leq 0, s \leq 0,$

onde $K = \left(\frac{p+1}{2}\right)^{2/p-1} 2^{4/p-1} > 0$.

Aplicando o teorema do confronto em ambas desigualdades acima, segue o resultado desejado

$$\begin{aligned} \partial_c \int_{\mathbb{R}} Q_c^2 ds \Big|_{c=1} &=: \int_{\mathbb{R}} \Lambda Q Q ds \\ &= \frac{1}{p-1} \int_{\mathbb{R}} Q^2(s) ds - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} Q^2 ds \\ &= \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4} \right) \int_{\mathbb{R}} Q^2 ds \\ &= \left(\frac{5-p}{4(p-1)} \right) \int_{\mathbb{R}} Q^2 ds, \end{aligned}$$

Note que $\int_{\mathbb{R}} Q^2 ds \geq 0$ e que a igualdade é válida se, e somente se $Q^2 = 0$ em q.t.p.. Mas temos que a função Q^2 é tal que $Q^2(s) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$, então $\int_{\mathbb{R}} Q^2 ds > 0$. Portanto,

$$\partial_c \int_{\mathbb{R}} Q_c^2 \Big|_{c=1} =: \int_{\mathbb{R}} \Lambda Q Q \begin{cases} > 0, & p = 2, 3, 4, \\ = 0, & p = 5, \\ < 0, & p > 5. \end{cases}$$

□

5.2 Resultados Principais

A seguir, definimos a noção de estabilidade usada neste trabalho.

Definição 36. (*Estabilidade de Solitons*). Assuma que $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ satisfaz

$$\|u_0 - Q_c\|_{H^s} < \alpha,$$

onde $\alpha \ll 1$ e $s \geq 0$. Então dizemos que Q_c é estável em $H^s(\mathbb{R})$ se também satisfaz o seguinte resultado

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - Q_c(\cdot - \rho(t))\|_{H^s(\mathbb{R})} \lesssim \alpha,$$

para alguma função $\rho(t) \in \mathbb{R}$. Caso contrário, dizemos que Q_c é instável.

A função $\rho(t)$ é necessária na definição de estabilidade acima, ou seja, não podemos ter $\rho(t) = ct$, pois a estabilidade não funciona para a velocidade original do soliton. A prova do fato de se considerar a função $\rho(t)$ na definição de estabilidade pode ser consultada no Apêndice A.

Agora enunciamos o resultado principal desta dissertação.

Teorema 28. (*Estabilidade*) Assuma $p = 2, 3, 4, c > 0, x_0 \in \mathbb{R}$. Existem $\alpha_0 > 0, C_0 > 0$ tal que para todo $\alpha \in (0, \alpha_0)$ e todo $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ de modo que

$$\|u_0 - Q_c(\cdot - x_0)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \alpha,$$

então a solução global $u(x, t)$, dada pelo Teorema 27 com dado inicial u_0 , satisfaz

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - Q_c(\cdot - \rho(t))\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C_0 \alpha,$$

para alguma função $\rho(t) \in \mathbb{R}$.

A seguir, vamos enunciar e provar alguns lemas que são fundamentais na prova do resultado de estabilidade. Nesses lemas lembremos que a função χ_c e o operador \mathcal{L} são dados pelo Lema 26.

Lema 29. Seja $\tilde{z} \in L^2(\mathbb{R})$ tomando valores reais e satisfazendo $\int_{\mathbb{R}} \tilde{z} Q'_c dx = 0$. Então existe $\gamma_0 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L} \tilde{z} dx \geq \gamma_0 \|\tilde{z}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{\gamma_0} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx \right|^2.$$

Demonstração. Como ambos espaços gerados por Q'_c e χ_c têm dimensão um, com Q'_c e χ_c pertencentes a $L^2(\mathbb{R})$, logo pelo Lema 20, temos que esses espaços são fechados, então pelo Lema 21, podemos decompor o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ da seguinte forma

$$L^2(\mathbb{R}) = [Q'_c] \oplus [\chi_c] \oplus \tilde{X}$$

onde $\tilde{X} = ([Q'_c] \oplus [\chi_c])^\perp$.

Daí, dado $\tilde{z} \in L^2(\mathbb{R})$, existem a , b e d escalares reais tais que

$$\tilde{z} = aQ'_c + b\chi_c + dw,$$

onde $w \in \tilde{X}$, como $Q'_c \in \text{Ker } \mathcal{L}$, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L} \tilde{z} dx &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L}(aQ'_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L}(b\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L}(dw) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L}(b\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L}(dw) dx. \end{aligned}$$

Além disso, por hipótese note que

$$\begin{aligned} 0 = \langle \tilde{z}, Q'_c \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{z} Q'_c dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} a(Q'_c)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} b\chi_c Q'_c dx + \int_{\mathbb{R}} d\tilde{X} Q'_c dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} a(Q'_c)^2 dx. \end{aligned}$$

Mas

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} (Q'_c)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |Q'_c|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} c|Q_c|^2 dx,$$

como a última integral da desigualdade acima existe, logo a integral a seguir existe, além disso, temos

$$\int_{\mathbb{R}} (Q'_c)^2 dx = 0 \iff (Q'_c)^2 = 0 \text{ em q.t.p..}$$

Todavia isso não acontece, então

$$\int_{\mathbb{R}} a(Q'_c)^2 dx = 0 \implies a = 0,$$

logo

$$\tilde{z} = b\chi_c + dw.$$

Usando o fato de que o operador \mathcal{L} é auto-adjunto, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L} \tilde{z} dx &= \langle \tilde{z}, \mathcal{L} \tilde{z} \rangle \\
&= \langle b\chi_c + dw, \mathcal{L}(b\chi_c) + \mathcal{L}(dw) \rangle \\
&= \langle b\chi_c, b\mathcal{L}(\chi_c) \rangle + \langle b\chi_c, d\mathcal{L}(w) \rangle + \langle dw, b\mathcal{L}(\chi_c) \rangle + \langle dw, d\mathcal{L}(w) \rangle \\
&= \langle b\chi_c, b\mathcal{L}(\chi_c) \rangle + \langle b\mathcal{L}\chi_c, dw \rangle + \langle dw, b\mathcal{L}(\chi_c) \rangle + \langle dw, d\mathcal{L}(w) \rangle \\
&= \langle b\chi_c, -b\lambda_0\chi_c \rangle + \langle -b\lambda_0\chi_c, dw \rangle + \langle dw, -b\lambda_0\chi_c \rangle + \langle dw, d\mathcal{L}(w) \rangle \\
&= -\lambda_0 b^2 \int_{\mathbb{R}} \chi_c^2 dx + \langle dw, d\mathcal{L}(w) \rangle.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}} w Q'_c dx = \int_{\mathbb{R}} w \chi_c dx = 0,$$

então pelo Lema 26, existe um $\gamma > 0$ tal que

$$\langle dw, d\mathcal{L}(w) \rangle = \int_{\mathbb{R}} dw \mathcal{L}(dw) dx \geq \gamma \|dw\|_{H^1(\mathbb{R})}^2.$$

Usando o Teorema de Pitágoras, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L} \tilde{z} dx &= -\lambda_0 b^2 \int_{\mathbb{R}} \chi_c^2 dx + \langle dw, d\mathcal{L}(w) \rangle \\
&\geq -\lambda_0 b^2 \int_{\mathbb{R}} \chi_c^2 dx + \gamma \|dw\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\
&= -\lambda_0 b^2 \int_{\mathbb{R}} \chi_c^2 dx + \gamma \|\tilde{z} - b\chi_c\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\
&= -\lambda_0 b^2 \int_{\mathbb{R}} \chi_c^2 dx + \gamma \|\tilde{z}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \gamma \|b\chi_c\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\
&= -\lambda_0 b \int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx + \gamma \|\tilde{z}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \gamma b \int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx - \gamma b^2 \int_{\mathbb{R}} (\chi'_c)^2 dx \\
&= -(\lambda_0 b + \gamma b) \int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx + \gamma \|\tilde{z}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \gamma b^2 M,
\end{aligned}$$

onde $M := \int_{\mathbb{R}} (\chi'_c)^2 dx$.

Pela desigualdade de Young (Lema 1), tomando $\tilde{a} = a\epsilon^2$, $\tilde{b} = \frac{b}{\epsilon^2}$, $p = q = 2$ e $\epsilon > 0$, segue que

$$\tilde{a}\tilde{b} = ab \leq \frac{a^2\epsilon^2}{2} + \frac{b^2}{2\epsilon^2},$$

daí

$$-ab \geq -\frac{a^2\epsilon^2}{2} - \frac{b^2}{2\epsilon^2}.$$

Assim

$$-(\lambda_0 b + \gamma b) \int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx \geq -\frac{(\lambda_0 b + \gamma b)^2 \epsilon^2}{2} - \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx \right)^2}{2\epsilon^2}.$$

Agora tome $\epsilon > 0$ satisfazendo

$$-\gamma b^2 M - \frac{(\lambda_0 b + \gamma_0 b)^2 \epsilon^2}{2} \geq -\frac{\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx \right)^2}{2\epsilon^2}, \quad (5.1)$$

logo para mostrar a validade de (5.1), basta tomar ϵ suficientemente pequeno, então por (5.1)

$$\begin{aligned} -\gamma b^2 M - \frac{(\lambda_0 b + \gamma b)^2 \epsilon^2}{2} - \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx \right)^2}{2\epsilon^2} &\geq -\frac{\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx \right)^2}{2\epsilon^2} - \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx \right)^2}{2\epsilon^2} \\ &= -\frac{\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx \right)^2}{\epsilon^2} \\ &= -\frac{1}{\epsilon^2} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx \right|^2. \end{aligned}$$

Daí

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L} \tilde{z} dx \geq \gamma \|\tilde{z}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{\epsilon^2} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx \right|^2.$$

Agora tome $\gamma_0 > 0$ pequeno de modo que $\gamma_0 < \gamma$ e $\gamma_0 < \epsilon^2$, assim temos que

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{z} \mathcal{L} \tilde{z} dx \geq \gamma_0 \|\tilde{z}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{\gamma_0} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z} dx \right|^2.$$

Como queríamos mostrar. □

Lema 30. *Seja $z \in L^2(\mathbb{R})$ tomando valores reais e satisfazendo $\int_{\mathbb{R}} z Q'_c dx = 0$. Então existe $\tilde{\gamma}_0 > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} z \mathcal{L} z dx \geq \tilde{\gamma}_0 \|z\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{\tilde{\gamma}_0} \left| \int_{\mathbb{R}} Q_c z dx \right|^2.$$

Demonstração. Basta assumir que $\int_{\mathbb{R}} Q_c z dx = 0$. Agora afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 Q'_c dx = \int_{\mathbb{R}} z Q'_c dx \quad \text{onde} \quad z = \beta_0 \chi_c + \tilde{z}_0,$$

analogamente ao lema anterior, o espaço gerado por χ_c tem dimensão um, além disso, χ_c pertence a $L^2(\mathbb{R})$, logo pelo Lema 20, temos que esse espaço é fechado. Então pelo Lema 21, podemos decompor o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ da seguinte forma

$$L^2(\mathbb{R}) = \chi_c \oplus \chi_c^\perp.$$

Logo, dado $z \in L^2(\mathbb{R})$, implica que $z = \beta_0 \chi_c + \tilde{z}_0$, onde $\tilde{z}_0 \in \chi_c^\perp$. Assim

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} z Q'_c dx &= \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \chi_c Q'_c dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 Q'_c dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 Q'_c dx. \end{aligned}$$

Vamos provar que

$$\int_{\mathbb{R}} z \mathcal{L} z dx \geq \tilde{\gamma}_0 \|z\|_{H^1(\mathbb{R})}^2,$$

para algum $\tilde{\gamma}_0 > 0$ independente de z . Para tanto, vamos decompor z e ΛQ_c da seguinte forma

$$z = \beta_0 \chi_c + \tilde{z}_0, \quad \beta_0 \in \mathbb{R} \text{ e } \tilde{z}_0 \in \chi_c^\perp \implies \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \chi_c dx = 0,$$

$$\Lambda Q_c = \beta_1 \chi_c + \widetilde{\Lambda Q_c}, \quad \beta_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \widetilde{\Lambda Q_c} \in \chi_c^\perp \implies \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \chi_c dx = 0.$$

Agora usando o fato

$$\mathcal{L} \chi_c = -\lambda_0 \chi_c, \quad \|\chi_c\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} z \mathcal{L} z dx &= \int_{\mathbb{R}} (\beta_0 \chi_c + \tilde{z}_0) \mathcal{L} (\beta_0 \chi_c + \tilde{z}_0) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \beta_0^2 \chi_c \mathcal{L} (\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \chi_c \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx + \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \tilde{z}_0 \mathcal{L} (\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \beta_0^2 \chi_c \mathcal{L} (\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \tilde{z}_0 \mathcal{L} (\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \tilde{z}_0 \mathcal{L} (\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \beta_0^2 \lambda_0 \chi_c^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \lambda_0 \tilde{z}_0 \chi_c dx - \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \lambda_0 \tilde{z}_0 \chi_c dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \beta_0^2 \lambda_0 \chi_c^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \\ &= -\beta_0^2 \lambda_0 + \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Na passagem da segunda para terceira igualdade em (5.2), usamos o fato do operador \mathcal{L} ser auto-adjunto. Agora pela Proposição 14 partes (b) e (c) temos os seguintes passos:

Se $p < 5$, então $\int_{\mathbb{R}} Q_c \Lambda Q_c dx > 0$. Assim, segue que

$$\begin{aligned}
0 &> - \int_{\mathbb{R}} Q_c \Lambda Q_c dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Lambda Q_c \mathcal{L} \Lambda Q_c dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\beta_1 \chi_c + \widetilde{\Lambda Q_c}) \mathcal{L} (\beta_1 \chi_c + \widetilde{\Lambda Q_c}) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \beta_1^2 \chi_c \mathcal{L} (\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \beta_1 \chi_c \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx + \int_{\mathbb{R}} \beta_1 \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} (\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \quad (5.3) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \beta_1^2 \chi_c \mathcal{L} (\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \beta_1 \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} (\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \beta_1 \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} (\chi_c) dx + \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \\
&= -\beta_1^2 \lambda_0 \int_{\mathbb{R}} \chi_c^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \beta_1 \lambda_0 \widetilde{\Lambda Q_c} \chi_c dx - \int_{\mathbb{R}} \lambda_0 \widetilde{\Lambda Q_c} \chi_c dx + \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \\
&= -\beta_1^2 \lambda_0 + \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}} z Q_c dx = - \int_{\mathbb{R}} z \mathcal{L} \Lambda Q_c dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} (\beta_0 \chi_c + \widetilde{z_0}) \mathcal{L} (\beta_1 \chi_c + \widetilde{\Lambda Q_c}) dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \beta_1 \chi_c \mathcal{L} (\chi_c) dx - \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \chi_c \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx - \int_{\mathbb{R}} \beta_1 \widetilde{z_0} \mathcal{L} (\chi_c) dx - \int_{\mathbb{R}} \widetilde{z_0} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \beta_1 \chi_c \mathcal{L} (\chi_c) dx - \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} (\chi_c) dx - \int_{\mathbb{R}} \beta_1 \widetilde{z_0} \mathcal{L} (\chi_c) dx - \int_{\mathbb{R}} \widetilde{z_0} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \beta_1 \lambda_0 \chi_c^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \beta_0 \lambda_0 \widetilde{\Lambda Q_c} \chi_c dx + \int_{\mathbb{R}} \beta_1 \lambda_0 \widetilde{z_0} \chi_c dx - \int_{\mathbb{R}} \widetilde{z_0} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \\
&= \beta_0 \beta_1 \lambda_0 - \int_{\mathbb{R}} \widetilde{z_0} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \\
&= \beta_0 \beta_1 \lambda_0 - \int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} (\widetilde{z_0}) dx.
\end{aligned}$$

Logo

$$\beta_0^2 \beta_1^2 \lambda_0^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} (\widetilde{z_0}) dx \right)^2. \quad (5.4)$$

De (5.2), (5.3) e (5.4), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} z \mathcal{L} z dx &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx - \beta_0^2 \lambda_0 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx - \frac{\lambda_0}{\beta_1^2 \lambda_0^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \right)^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx - \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \right)^2}{\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx + \int_{\mathbb{R}} Q_c \Lambda Q_c dx}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Como $\int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 Q_c' dx = 0$, então pelo Corolário 29 existe $\gamma_0 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \geq \gamma_0 \|\tilde{z}_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{\gamma_0} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_c \tilde{z}_0 dx \right|^2 = \gamma_0 \|\tilde{z}_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \geq 0,$$

Como o operador bilinear

$$\int_{\mathbb{R}} v \mathcal{L} w dx, \quad v, w \in \{\chi_c, Q_c'\}^\perp,$$

define um produto interno em $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} v \mathcal{L} w dx \right|^2 &= |\langle v, w \rangle|^2 \\
&\leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} v \mathcal{L} v dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} w \mathcal{L} w dx \right),
\end{aligned}$$

com igualdade se, e somente se, v for paralelo a w . Usando essas informações, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \right).$$

Isso mostra que $\left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \right) \geq 0$, pois

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \right)^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \right) \geq 0,$$

assim

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} z \mathcal{L} z dx &\geq \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx - \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \right)^2}{\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx + \int_{\mathbb{R}} Q_c \Lambda Q_c dx} \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \right) - \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \right)}{\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx + \int_{\mathbb{R}} Q_c \Lambda Q_c dx} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \right) \left[1 - \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \right)}{\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx + \int_{\mathbb{R}} Q_c \Lambda Q_c dx} \right].
\end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}} Q_c \Lambda Q_c dx > 0$, temos que

$$1 - \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx \right)}{\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\Lambda Q_c} \mathcal{L} \widetilde{\Lambda Q_c} dx + \int_{\mathbb{R}} Q_c \Lambda Q_c dx} > \eta_0 > 0,$$

tal fato independe de z . Temos então

$$\int_{\mathbb{R}} z \mathcal{L} z dx \geq \eta_0 \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \geq \eta_0 \gamma_0 \|\tilde{z}_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \geq 0.$$

Finalmente de (5.2) e da desigualdade anterior, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \\
&\geq \frac{1}{2} \eta_0 \gamma_0 \|\tilde{z}_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2} \beta_0^2 \lambda_0.
\end{aligned}$$

Como $\int_{\mathbb{R}} |\chi|^2 dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}} |\chi'_c|^2 dx := M$, pois $\chi'_c \in S(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, $\forall p \geq 1$, então $\exists C_1 > 0$ tal que

$$\frac{\beta_0^2 \lambda_0}{2} \geq \frac{\beta_0^2}{C_1} (1 + M), \quad \text{com } \beta_0 \neq 0,$$

o caso $\beta_0 = 0$ é trivial, então basta tomar $C_1 \geq \frac{2(1+M)}{\lambda_0}$, daí segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_0^2 \lambda_0}{2} &\geq \frac{\beta_0^2}{C_1} \left(\int_{\mathbb{R}} |\chi|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} |\chi'_c|^2 dx \right) \\
&= \frac{\beta_0^2}{C_1} \|\chi_c\|_{H^1(\mathbb{R})}^2.
\end{aligned}$$

Usando isto, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \\
&\geq \frac{1}{2} \eta_0 \gamma_0 \|\tilde{z}_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2} \beta_0^2 \lambda_0 \\
&\geq \frac{1}{2} \eta_0 \gamma_0 \|\tilde{z}_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \frac{\beta_0^2}{C_1} \|\chi_c\|_{H^1(\mathbb{R})}^2.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\|\tilde{z}_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \|\chi_c\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 = \|\tilde{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|(\tilde{z}_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\chi_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|(\chi_c)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

e

$$\begin{aligned}
\|z\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &= \|\beta_0 \chi_c + \tilde{z}_0\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\
&= \|\beta_0 \chi_c + \tilde{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|(\beta_0 \chi_c + \tilde{z}_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq \|\beta_0 \chi_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\tilde{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \left(\|(\beta_0 \chi_c)'\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|(\tilde{z}_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})} \right)^2.
\end{aligned}$$

Agora usando o fato de que a função $f(x) = x^2$ é convexa, temos

$$\begin{aligned}
\|z\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &\leq \|\beta_0 \chi_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\tilde{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \left(\|(\beta_0 \chi_c)'\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|(\tilde{z}_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})} \right)^2 \\
&= \beta_0^2 \|\chi_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\tilde{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\beta_0^2 \|(\chi_c)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 2\|(\tilde{z}_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq C_2 \left(\|\chi_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\tilde{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|(\chi_c)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|(\tilde{z}_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Para finalizar, tome $C_0 > 0$ tal que

$$C_0 \left(\frac{1}{2} \eta_0 \gamma_0 \right) \geq C_2, \quad C_0 \left(\frac{\beta_0^2}{C_1} \right) \geq C_2,$$

então

$$\begin{aligned}
\|z\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &\leq C_2 \left(\|\chi_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\tilde{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|(\chi_c)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|(\tilde{z}_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \\
&\leq C_0 \left(\frac{\beta_0^2}{C_1} \|\chi_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2} \eta_0 \gamma_0 \|\tilde{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{\beta_0^2}{C_1} \|(\chi_c)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2} \eta_0 \gamma_0 \|(\tilde{z}_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right).
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_0} \|z\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &\leq \frac{\beta_0^2}{C_1} \|\chi_c\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2} \eta_0 \gamma_0 \|\tilde{z}_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{\beta_0^2}{C_1} \|(\chi_c)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2} \eta_0 \gamma_0 \|(\tilde{z}_0)'\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \frac{1}{2} \eta_0 \gamma_0 \|\tilde{z}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \frac{\beta_0^2}{C_1} \|\chi_c\|_{H^1(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{z}_0 \mathcal{L} \tilde{z}_0 dx \\ &\geq \frac{1}{2} \eta_0 \gamma_0 \|\tilde{z}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{2} \beta_0^2 \lambda_0 \\ &\geq \frac{1}{2} \eta_0 \gamma_0 \|\tilde{z}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \frac{\beta_0^2}{C_1} \|\chi_c\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\ &\geq \tilde{\gamma}_0 \|z\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

onde $\tilde{\gamma}_0 = \frac{1}{C_0}$.

5.3 Prova do Teorema 28: Resultado de Estabilidade

Demonstração. A ideia inicial aqui é o uso de leis de conservação, ou seja, a conservação da massa

$$M[u](t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2(t, x) dx = M[u_0], \quad (5.7)$$

e a conservação de energia

$$E[u](t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2(t, x) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1}(t, x) dx = E[u_0]. \quad (5.8)$$

Considere a decomposição $u(t, x) := Q_c(x - \rho(t)) + z(t, x)$, onde $\rho(t)$ é uma função fixa que será escolhida depois, com $z(x, t) \in H^1(\mathbb{R})$ tal que $\|z(x, t)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \frac{1}{2}$, temos que

$$u_x = Q'_c + z_x, \quad u_x^2 = (Q'_c)^2 + 2Q'_c z_x + z_x^2 \quad \text{e} \quad u^{p+1} = (Q_c + z)^{p+1}. \quad (5.9)$$

Observe que dizer que $z(x, t) \in H^1(\mathbb{R})$ é equivalente a dizer que $z \in H^1(\mathbb{R})$ com respeito

a variável x , para todo t . Substituindo (5.9) em (5.8), obtemos

$$\begin{aligned}
E[u](t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [(Q'_c)^2 + 2Q'_c z_x + z_x^2] dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} (Q_c + z)^{p+1} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [(Q'_c)^2 + 2Q'_c z_x + z_x^2] dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} Q_c^{p+1-k} z^k dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (Q'_c)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} Q'_c z_x dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} \binom{p+1}{0} Q_c^{p+1} dx \\
&\quad - \frac{1}{p+1} \left[\int_{\mathbb{R}} \binom{p+1}{1} Q_c^p z dx + \int_{\mathbb{R}} \binom{p+1}{2} Q_c^{p-1} z^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=3}^{p+1} \binom{p+1}{k} Q_c^{p+1-k} z^k dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (Q'_c)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} Q'_c z_x dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p+1} dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} Q_c^p z dx - \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=3}^{p+1} \binom{p+1}{k} Q_c^{p+1-k} z^k dx \\
&= E[Q_c](t) + \int_{\mathbb{R}} Q'_c z_x dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2 dx - \int_{\mathbb{R}} Q_c^p z dx \\
&\quad - \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=3}^{p+1} \binom{p+1}{k} Q_c^{p+1-k} z^k dx.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Agora vamos estimar a equação (5.10). Note que $z \in H^1(\mathbb{R})$, então pelo Teorema 19 (Imersão de Sobolev), temos que $z \in L^\infty(\mathbb{R})$, logo temos as seguintes estimativas

- $-\int_{\mathbb{R}} Q_c^2 z^3 dx \leq \int_{\mathbb{R}} Q_c^2 z^3 dx \leq \|z(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^3 \int_{\mathbb{R}} Q_c^2 dx;$
- $-\int_{\mathbb{R}} Q_c z^4 dx \leq \int_{\mathbb{R}} Q_c z^4 dx \leq \|z(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^4 \int_{\mathbb{R}} Q_c dx;$
- $-\int_{\mathbb{R}} z^5 dx = -\int_{\mathbb{R}} z^2 z^3 dx \leq \int_{\mathbb{R}} z^2 z^3 dx \leq \|z(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^3 \int_{\mathbb{R}} z^2 dx.$

Daí, novamente pela imersão de Sobolev resulta a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
E[u](t) &= E[Q_c](t) + \int_{\mathbb{R}} Q'_c z_x dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2 dx - \int_{\mathbb{R}} Q_c^p z dx \\
&\quad - \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=3}^{p+1} \binom{p+1}{k} Q_c^{p+1-k} z^k dx \\
&\leq E[Q_c](t) + \int_{\mathbb{R}} Q'_c z_x dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2 dx - \int_{\mathbb{R}} Q_c^p z dx \\
&\quad - \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2 dx + \|z(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^3 C \left(\int_{\mathbb{R}} Q_c^2 dx + \int_{\mathbb{R}} Q_c dx + \|z(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} z^2 dx \right) \\
&\leq E[Q_c](t) + \int_{\mathbb{R}} Q'_c z_x dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2 dx - \int_{\mathbb{R}} Q_c^p z dx \\
&\quad - \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2 dx + \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3 \tilde{C} \left(\int_{\mathbb{R}} Q_c^2 dx + \int_{\mathbb{R}} Q_c dx + \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} z^2 dx \right).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Assim de (5.11), resulta a equação

$$E[u](t) = E[Q_c](t) + \int_{\mathbb{R}} Q'_c z_x dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2 dx - \int_{\mathbb{R}} Q_c^p z dx - \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2 dx + O\left(\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right). \tag{5.12}$$

Como $Q_c'' - cQ_c + Q_c^p = 0$, então por integração por partes e notando que $Q_c \in S(\mathbb{R})$ juntamente com o Teorema 19 (Imersão de Sobolev), segue que

$$\int_{\mathbb{R}} Q'_c z_x dx = Q'_c z \Big|_{\mathbb{R}} - \int_{\mathbb{R}} Q_c'' z dx = - \int_{\mathbb{R}} (cQ_c - Q_c^p) z dx,$$

logo

$$\int_{\mathbb{R}} Q'_c z_x dx - \int_{\mathbb{R}} Q_c^p z dx = -c \int_{\mathbb{R}} Q_c z dx.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
cM[u](t) &= \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx = \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} (Q_c + z)^2 dx \\
&= cM[Q_c] + c \int_{\mathbb{R}} Q_c z dx + \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2 dx.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Portanto, somando (5.12) e (5.13) temos

$$\begin{aligned}
E[u_0] + cM[u_0] &= E[Q_c] + cM[Q_c] \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2 dx + \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2 dx - \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2 dx + O\left(\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Usando integração por partes, tem-se

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2 dx + \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2 dx - \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z \mathcal{L}z dx,$$

onde

$$\mathcal{L}z := -z_{xx} + cz - pQ_c^{p-1}z.$$

A seguir, escolheremos a função $\rho(t)$, via teorema da função implícita, de modo a podermos aplicar o lema (30), para o operador $\mathcal{L}z$. Para isto, defina $F : H^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(v, \rho) = \int_{\mathbb{R}} (v(x) - Q_c(x - \rho))Q'(x - \rho) dx. \quad (5.15)$$

Temos os seguintes fatos:

- Seja $G(v, \rho) := (v(x) - Q_c(x - \rho))Q'(x - \rho)$, temos que para todo $\rho \in \mathbb{R}$ a função $G(v, \rho)$ é integrável para isso basta somente verificar um termo, os outros são triviais, ou seja,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} vQ'_c dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |vQ'_c| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |v|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |Q'_c|^2 dx \right)^{1/2} < \infty, \quad \text{pois } v \in H^1(\mathbb{R}),$$

- $\frac{\partial G(v, \rho)}{\partial \rho} = Q'_c(x - \rho) + (v(x) - Q_c(x - \rho))Q''_c(x - \rho)$ claramente existe em $H^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$,

- Usando a desigualdade triangular, juntamente com o fato de $\left| \tanh\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)(x-\rho)}{2}\right) \right| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial G(v, \rho)}{\partial \rho} \right| &= |Q'_c(x - \rho) + (v(x) - Q_c(x - \rho))Q''_c(x - \rho)| \\ &\leq |Q'_c(x - \rho)| + |(v(x) - Q_c(x - \rho))Q''_c(x - \rho)| \\ &\leq |Q'_c(x - \rho)| + |(v(x))_{L^\infty(\mathbb{R})}| |Q''_c(x - \rho)| + |Q_c(x - \rho)|_{L^\infty(\mathbb{R})} |Q''_c(x - \rho)| \\ &\leq \sqrt{c} |Q_c(x - \rho)| + \tilde{C} |Q''_c(x - \rho)| \leq \sqrt{c} Q_c(x - \rho) \\ &\quad + \tilde{C}_0 \left[\operatorname{sech}^{\frac{2}{p-1}}\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)(x-\rho)}{2}\right) + \operatorname{sech}^{\frac{2p}{p-1}}\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)(x-\rho)}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Note também que tomando $K_1 := \operatorname{Max}\left\{\sqrt{c}\left(\frac{c(p+1)}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \tilde{C}_0\right\}$ e $K_2 := \operatorname{Min}\left\{\frac{2}{p-1}, \frac{2p}{p-1}\right\}$, segue que

$$\left| \frac{\partial G(v, \rho)}{\partial \rho} \right| \leq K_1 \operatorname{sech}^{K_2}(x - \rho) = g(x), \quad (5.17)$$

onde $g(x) \in H^1(\mathbb{R})$. Logo pelo Corolário 5

$$\frac{dF}{d\rho}(v, \rho) = \frac{d}{d\rho} \int G(v, \rho) dx = \int \frac{\partial G}{\partial \rho}(v, \rho) dx,$$

Por outro lado, sabemos que

$$\frac{\partial G(v, \rho)}{\partial \rho} = Q'_c(x - \rho) + (v(x) - Q_c(x - \rho))Q''_c(x - \rho)$$

é uma função contínua em $H^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, de fato, Q_c, Q'_c são claramente contínuas e $v(x)$ é contínua pela imersão de Sobolev e como (5.17) é válido, temos pelo Corolário 4 que

$$\frac{dF}{d\rho}(v, \rho) = \frac{d}{d\rho} \int G(v, \rho) dx = \int \frac{\partial G}{\partial \rho}(v, \rho) dx,$$

é contínua.

O caso da derivada de $F(v(x), \rho)$ com relação a $v(x)$ é análogo. Basta somente mostrar que $G(v, \rho)$ é Gâteaux derivável, pois $v(x) \in H^1(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach, de fato, dado $y \in H^1(\mathbb{R})$, segue que

$$\begin{aligned} L(y) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(v + hy, \rho) - G(v, \rho)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(v(x) + hy - Q_c(x - \rho))Q'_c(x - \rho) - (v(x) - Q_c(x - \rho))Q'_c(x - \rho)}{h} \\ &= yQ'_c(x - \rho), \end{aligned}$$

onde $L(y) \in (H^1)^* = H^{-1} \supset H^1$, logo $F \in C^1(H^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$. Assim temos que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial \rho} \right|_{(Q_c, \rho)} &= \int_{\mathbb{R}} (Q'(x - \rho))^2 dx + \int_{\mathbb{R}} (Q_c(x - \rho) - Q_c(x - \rho))Q''(x - \rho) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (Q'(x - \rho))^2 dx \neq 0, \end{aligned}$$

além disso,

$$F(Q_c, \rho) = \int_{\mathbb{R}} (Q_c(x - \rho) - Q_c(x - \rho))Q'(x - \rho) dx = 0.$$

Tome Ω um aberto de $H^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, tal que o ponto $(Q_c, \rho) \in \Omega$, como $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ com $F(Q_c, \rho) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial \rho}(Q_c, \rho) > 0$. Então pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança B de Q_c contida em $H^1(\mathbb{R})$ e uma vizinhança I de ρ contida em \mathbb{R} , ou seja,

$B \times I \subset \Omega$, satisfazendo o que segue

- Para cada w em B , existe um único $\tilde{w} = f(w)$ em I tal que $F(w, f(w)) = 0$;
- Temos $f(Q_c) = \rho$. Ainda mais, $f : B \rightarrow I$ é de classe C^1 .

Note que, aplicando o resultado anterior para um ponto da forma $(Q_c(x - \rho(t), \rho(t))$, temos que para cada t existe um ρ , assim o resultado a seguir é verdade pelo menos para algum tempo $0 < t \leq T_0$, onde $B = B(Q_c, \delta)$ e $I = (\rho - \epsilon, \rho + \epsilon)$, com $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$, como $\delta > 0$, podemos assim escolher $\delta_0 < \frac{1}{2}$ e $\delta_0 < \delta$ satisfazendo as condições anteriores, portanto $Q_c(x - \rho(t)) + z(t) \in B$ se $\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \delta_0 < \frac{1}{2}$, por isso nossa escolha anteriormente de $\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \frac{1}{2}$, além do mais pela definição de estabilidade $\|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \alpha \ll 1$. Portanto, para $0 < t \leq T_0$ temos

$$F(Q_c + z(t), \rho) = \int_{\mathbb{R}} z(t)Q'(x - \rho(t))dx = 0.$$

Então pela Lema 30, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} z(t)\mathcal{L}z(t)dx \geq \gamma_0\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{\gamma_0} \left| \int_{\mathbb{R}} Q_c z(t)dx \right|^2. \quad (5.18)$$

Agora avaliaremos (5.18), usando (5.14) no tempo $t = 0$ e para algum $t \leq T_0$. (enfaticamos que as constantes envolvidas são independentes do tempo). De fato, tomando algum $t \neq 0$ e $t = 0$ em (5.14), segue que

$$\begin{aligned} E[u_0] + cM[u_0] &= E[Q_c] + cM[Q_c] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2(t)dx + \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2(t)dx - \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2(t)dx + O\left(\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

e

$$\begin{aligned} E[u_0] + cM[u_0] &= E[Q_c] + cM[Q_c] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2(0)dx + \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2(0)dx - \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2(0)dx + O\left(\|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Subtraindo (5.19) de (5.20), temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z(t)\mathcal{L}z(t)dx + O\left(\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2(0)dx + \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2(0)dx \\ &- \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2(0)dx + O\left(\|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Resulta de (5.21) que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} z(t) \mathcal{L}z(t) dx &\leq O\left(\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2(0) dx + \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2(0) dx \\
&\quad + \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}} Q_c^{p-1} z^2(0) dx + O\left(\|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right) \\
&\leq O\left(\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z_x^2(0) dx + \frac{c}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2(0) dx \\
&\quad + \frac{p}{2} \|Q_c^{p-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} z^2(0) dx + O\left(\|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right) \\
&\leq O\left(\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right) + C_0 \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + O\left(\|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right) \\
&\leq O\left(\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3\right) + C_0 \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + O\left(\|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2\right) \\
&\lesssim \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

então

$$\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \lesssim \left| \int_{\mathbb{R}} Q_c z(t) dx \right|^2 + \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3, \quad \text{para } t \leq T_0. \tag{5.23}$$

Agora, usando a conservação da massa (5.7) para algum $t \neq 0$ e $t = 0$, temos que

$$M[u_0] = M[Q_c] + \int_{\mathbb{R}} Q_c z(t) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2(t) dx \tag{5.24}$$

$$M[u_0] = M[Q_c] + \int_{\mathbb{R}} Q_c z(0) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2(0) dx. \tag{5.25}$$

Fazendo a subtração de (5.24) por (5.25), segue que

$$\int_{\mathbb{R}} z(t) Q_c(t) dx = \int_{\mathbb{R}} z(0) Q_c(0) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2(0) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2(t) dx. \tag{5.26}$$

Agora vamos fazer uma estimativa de (5.26)

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} z(t) Q_c(t) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} z(0) Q_c(0) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2(0) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} z^2(t) dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}} z(0) Q_c(0) dx \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}} z^2(0) dx \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}} z^2(t) dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |z(0) Q_c(0)| dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |z(0)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |z(t)|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |z(0) Q_c(0)| dx + C_1 \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + C_2 \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq \|z(0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|Q_c(0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C_1 \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + C_2 \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})} \|Q_c(0)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C_1 \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})} + C_2 \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq C_3 \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})} + C_1 \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})} + C_2 \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2,
\end{aligned}$$

portanto temos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} z Q_c(t) dx \right| \lesssim \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.27)$$

Agora, combinando (5.23) e (5.27) e usando novamente o fato da função $f(x) = x^2$ ser convexa em todo intervalo de \mathbb{R} , temos que

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &\lesssim \left| \int_{\mathbb{R}} Q_c z(t) dx \right|^2 + \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3 \\
&\lesssim \left(\|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \right)^2 + \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3 \\
&\lesssim 2\|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + 2\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^4 + \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3 \\
&\lesssim \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3.
\end{aligned} \quad (5.28)$$

Mas sabemos que $\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \frac{1}{2}$, para $0 < t \leq T_0$, então

$$\frac{\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}}{2} < \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3, \quad (5.29)$$

logo de (5.28) e (5.29) temos

$$\frac{\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}}{2} < \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^3 \lesssim \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})},$$

portanto

$$\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \lesssim \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})} \quad \text{para } t \leq T_0. \quad (5.30)$$

Note que a função $t \mapsto \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}$ é contínua no tempo, pois $u, Q_c \in C([0, \infty) : H^1)$,

então temos que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } |t + s - t| = |s| < \delta \implies \|z(t + s) - z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \epsilon,$$

logo

$$\|z(t + s)\|_{H^1(\mathbb{R})} - \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|z(t + s) - z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \epsilon,$$

daí

$$\|z(t + s)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} + \epsilon \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (5.31)$$

Suponha agora que $T_0 < \infty$ em (5.30), note que (5.23) implica (5.30), ou seja,

$$\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \leq M_1 + M_2 \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \implies \|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq M_3 \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Aplicando o fato da função $f(x) = x^2$ ser convexa em (5.31), temos que

$$\|z(t + s)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \leq 2\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + 2\epsilon^2 \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (5.32)$$

em particular a desigualdade (5.32) é válido para todo $t \leq T_0$, mas para esse tempo temos que $\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2} \leq M\|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}$ para $M > 0$ suficientemente grande, então por (5.23) segue

$$\begin{aligned} \|z(t + s)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 &\leq M_4 \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq M_3 \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2, \end{aligned} \quad (5.33)$$

de modo que $M_4 \leq M_3$. Logo (5.33) é válida para $t + s$ com $t = T_0$, então $t + s$ satisfaz (5.30), logo temos uma contradição, portanto $T_0 = +\infty$. O caso $T_0 = -\infty$ é análogo, por outro lado, note que

$$u(x, t) := Q_c(x - \rho(t)) + z(x, t),$$

logo

$$\|z(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \lesssim \|z(0)\|_{H^1(\mathbb{R})} \implies \|u(t) - Q_c(\cdot - \rho(t))\|_{H^1(\mathbb{R})} \lesssim \|u_0 - Q_c\|_{H^1(\mathbb{R})},$$

mas por hipótese segue que

$$\|u(t) - Q_c(\cdot - \rho(t))\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C_0 \|u_0 - Q_c\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C_0 \alpha.$$

portanto

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - Q_c(\cdot - \rho(t))\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C_0 \alpha.$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] Angulo, J. Nonlinear Dispersive Equations: existence and stability of solitary and periodic travelling wave solutions, Providence, AMS, 2009.
- [2] Barbosa, I.I. Existência e Estabilidade de Soluções do Tipo Ondas Solitárias para a Equação Korteweg-de Vries (KdV), Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió-AL, 2005.
- [3] Bartle, R. The Elements of Integration and Lebesgue Measure. 1 Ed. Wiley-Interscience; 1995.
- [4] Benjamin, T. B., Bona, J. L. and Mahony, J. J. Model equations for long waves nonlinear dispersion systems Phil. Trans. R. Soc. 272 47–78, 1972.
- [5] Bona, J. L. On the stability theory of solitary waves Proc. R. Soc. A 349 363–74, 1975.
- [6] Botelho, G., Pellegrino, D e Teixeira, E., Fundamentos de Análise Funcional, Segunda edição, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [7] Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations (Universitext).Springer, 2010.
- [8] Cardoso, D. C. S. O Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaevskii, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió-AL, 2005.
- [9] Eckhaus, W. and Schuur, P. The emergence of solutions of the Korteweg–de Vries equation from arbitrary initial conditions Math. Methods Appl. Sci. 5 97–116, 1983.
- [10] Evans, L.C., Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 2010.
- [11] Folland, G.B., Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 1999.

- [12] Friedman, A. Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [13] Gondar, J., Cipolatti, R., Iniciação à Física Matemática: Modelagem de Processo e Métodos de Solução, IMPA, 2011.
- [14] Grafakos, L. Classical Fourier Analysis (Graduate Texts in Mathematics).Springer, 2008.
- [15] Hoffman, Kenneth e Kunze, Ray. Álgebra linear. 2 ed Trad. Renate. Watanabe. Rio de Janeiro: LTC, 1979.
- [16] Iório Jr, R.J. e Iório, V.M. Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução. Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [17] Iório, M.V. EDP, Um curso de graduação. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.
- [18] Kenig, C.E., Ponce, G. and Vega, L. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle, Comm. Pure Appl. Math. 46, 527-620, 1993.
- [19] Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, 1978.
- [20] Korteweg, D. J. and De Vries, G. "XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves". The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 39.240, 422-443, 1895
- [21] Lima, E.L. Curso de Análise Real, volume I, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, publicações do IMPA, 14 edição, 432 páginas, 2017.
- [22] Lima, E.L. Curso de Análise. Volume 2. Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro, 2000.
- [23] Lima, E.L. Espaços Métricos, IMPA, 1977.
- [24] Linares, F. and Ponce, G. Introduction to Nonlinear Dispersive Equations, Springer, 2009.
- [25] Martel, Y. and Merle, F. Asymptotic stability of solitons of the subcritical gKdV equations revisited, Nonlinearity 18 55-80, 2005.

- [26] Muñoz, C. (Stability of integrable and nonintegrable structures). *Advances in Differential Equations*, 19 (9/10), 947–996, 2014.
- [27] Reed, M. and Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators*. Academic Press. New York, 1978.
- [28] Russel, J.S. Report on waves, Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., 1844, pg. 311-390.
- [29] Santos, A.S. Estimativas de Strichartz e a Equação Não Linear de Schrödinger em Espaços Euclidianos. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, 2009.
- [30] Thayer, J. *Operadores Auto-adjuntos e Equações Diferenciais Parciais*. SBM, 2007.
- [31] Weinstein, M. I. Modulational stability of ground states of nonlinear Schrodinger equations *SIAM J. Math. Anal.* 16 472–91, 1985.
- [32] Whitham, G.B. *Linear and nonlinear waves*, Wiley-Interscience, 1974.

Apêndice A

A necessidade de introduzir uma função corretora $\rho(t)$ na definição de estabilidade

Neste Apêndice, mostramos a necessidade de introduzir uma função corretora $\rho(t)$ na definição de estabilidade.

Sejam $u(x, t) = Q_c(x - ct)$ uma solução da equação de gKdV para $p = 2, 3, 4$ com condição inicial $u(x, 0) = Q_c(x)$ e (c_n) uma sequência com $(c_n) > 0$ e $(c_n) \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $c_n \rightarrow c$, então afirmamos que

$$c_n \rightarrow c \implies Q_{c_n} \rightarrow Q_c \quad \text{em } H^1(\mathbb{R}).$$

De fato, temos que

$$\|Q_c(x) - Q_{c_n}(x)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |Q_c(x) - Q_{c_n}(x)| dx + \int_{\mathbb{R}} |\partial_x Q_c(x) - \partial_x Q_{c_n}(x)| dx. \quad (\text{A.1})$$

Considere os seguintes fatos

- (1) $R(x, c) := Q_c = \left(\frac{c(p+1)}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sech}^{\frac{2}{p-1}}\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)x}{2}\right)$ é contínua, pois é o produto de funções contínuas;
- (2) $\partial_x R(x, c) := \partial_x Q_c = -\sqrt{c} \left(\frac{c(p+1)}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sech}^{\frac{2}{p-1}}\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)x}{2}\right) \tanh\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)x}{2}\right)$ é contínua, pois é o produto de funções contínuas;
- (3) Note que $|\partial_x Q_c| \leq \sqrt{c}|Q_c|$, pois $\left|\tanh\left(\frac{\sqrt{c}(p-1)x}{2}\right)\right| \leq 1$;
- (4) Como $c_n \rightarrow c$, logo para todo $\eta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica que $|c - c_n| < \eta$, com $c_n \neq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$, logo c_n é limitada;

(5) $R(x, c_n) = Q_{c_n} \longrightarrow R(x, c) = Q_c$, pois $R(x, c_n)$ é contínua;

(6) $\partial_x R(x, c_n) = \partial_x Q_{c_n} \longrightarrow \partial_x R(x, c) = \partial_x Q_c$, pois $\partial_x R(x, c_n)$ é contínua;

(7) $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ com $x \in \mathbb{R}$;

(8) $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$;

(9) $\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$, logo, quando x tem a abscissa igual a zero, a ordenada é 1;

(10) $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh(x)$, assim a função é par, logo é simétrica em relação ao eixo y ;

(11) $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$, se $x > 0 \implies \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, é uma função crescente.

De fato (11) é válido, pois dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, de modo que $x_1 < x_2$, vamos mostrar que $\sinh(x_1) < \sinh(x_2)$.

$$\begin{aligned} \sinh x_1 - \sinh x_2 &= \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} - \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x_1} - 1}{e^{x_1}} - \frac{e^{2x_2} - 1}{e^{x_2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{(e^{2x_1+x_2} - e^{2x_2+x_1}) + (e^{x_1} - e^{x_2})}{e^{x_1+x_2}}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Como $x_1 < x_2$, então $2x_1 + x_2 < 2x_2 + x_1$; assim, temos que

$$e^{2x_1+x_2} < e^{2x_2+x_1} \implies e^{2x_1+x_2} - e^{2x_2+x_1} < 0, \tag{A.3}$$

e

$$e^{x_1} < e^{x_2} \implies e^{x_1} - e^{x_2} < 0, \tag{A.4}$$

substituindo-se (A.3) e (A.4) em (A.2), obtemos:

$$\sinh(x_1) - \sinh(x_2) < 0,$$

portanto

$$\sinh(x_2) > \sinh(x_1),$$

logo, a função seno hiperbólico é crescente.

Então pelo Teorema do valor médio (ver [21]), temos que a função $\cosh(x)$ para $x > 0$ é crescente.

Logo para quaisquer $m, m_0 \in \mathbb{R}$ com $m \geq m_0 > 0$ e $x > 0$, segue que

$$\cosh(mx) \geq \cosh(m_0x) \implies \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2} \geq \frac{e^{m_0x} + e^{-m_0x}}{2},$$

daí

$$\frac{2}{e^{m_0x} + e^{-m_0x}} \geq \frac{2}{e^{mx} + e^{-mx}} \implies \operatorname{sech}(m_0x) \geq \operatorname{sech}(mx).$$

Mas como a função $\operatorname{sech}(x)$ é par, pois a função $\cosh(x)$ é par, logo $\operatorname{sech}(x)$ é simétrica, além disso, na origem, assume o valor 1, então

$$\operatorname{sech}(m_0x) \geq \operatorname{sech}(mx)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e para quais quer $m, m_0 \in \mathbb{R}$ tais que $m \geq m_0 > 0$.

Como $c_n \in (c - \eta, c + \eta)$ para $n > n_0$, então tome $M := \operatorname{Max}\{c_1, \dots, c_{n_0}, c - \eta, c + \eta\}$ e também $m := \operatorname{Min}\{c_1, \dots, c_{n_0}, c - \eta, c + \eta\}$, então

$$\begin{aligned} |Q_{c_n}(x)| &= \left| \left(\frac{c_n(p+1)}{2} \right)^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sech}^{\frac{2}{p-1}} \left(\frac{\sqrt{c_n}(p-1)x}{2} \right) \right| \\ &\leq \left| \left(\frac{M(p+1)}{2} \right)^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sech}^{\frac{2}{p-1}} \left(\frac{\sqrt{m}(p-1)x}{2} \right) \right| \\ &= \left| \left(\frac{M(p+1)}{2} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right| |Q(\sqrt{m}x)| \\ &= \widetilde{M} |Q(\sqrt{m}x)|, \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned} |Q_c(x) - Q_{c_n}(x)|^2 &\leq \left(|Q_c(x)| + |Q_{c_n}(x)| \right)^2 \\ &= |Q_c(x)|^2 + 2|Q_c(x)||Q_{c_n}(x)| + |Q_{c_n}(x)|^2 \\ &\leq |Q_c(x)|^2 + 2|Q_c(x)|\widetilde{M}|Q(\sqrt{m}x)| + \widetilde{M}^2|Q(\sqrt{m}x)|^2, \end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned}
|\partial_x Q_c(x) - \partial_x Q_{c_n}(x)|^2 &\leq \left(|\partial_x Q_c(x)| + |\partial_x Q_{c_n}(x)| \right)^2 \\
&= |\partial_x Q_c(x)|^2 + 2|\partial_x Q_c(x)||\partial_x Q_{c_n}(x)| + |\partial_x Q_{c_n}(x)|^2 \\
&\leq c|Q_c(x)|^2 + 2\sqrt{c}\sqrt{c_n}|Q_c||Q_{c_n}| + c_n|Q_{c_n}(x)|^2 \\
&\leq m|Q_c(x)|^2 + 2m^2\widetilde{M}|Q_c||Q(\sqrt{m}x)| + m\widetilde{M}^2|Q(\sqrt{m}x)|^2.
\end{aligned}$$

Note também que as funções f e g são positivas e definidas por:

$$f(x) := |Q_c(x)|^2 + 2|Q_c(x)|\widetilde{M}|Q(\sqrt{m}x)| + \widetilde{M}^2|Q(\sqrt{m}x)|^2,$$

$$g(x) := m|Q_c(x)|^2 + 2m^2\widetilde{M}|Q_c||Q(\sqrt{m}x)| + m\widetilde{M}^2|Q(\sqrt{m}x)|^2,$$

logo pertencem a $L^1(\mathbb{R})$ e por linearidade da integral a função $h(x) := f(x) + g(x)$ pertence a $L^1(\mathbb{R})$

Considere as sequências $\phi_n := |Q_c(x) - Q_{c_n}(x)|$ e $\psi_n := |\partial_x Q_c(x) - \partial_x Q_{c_n}(x)|$, então

$$\phi_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \psi_n \longrightarrow 0.$$

Além do mais, a sequência $\phi_n := |Q_c(x) - Q_{c_n}(x)|$ é limitada por uma função em $L^1(\mathbb{R})$, como vimos anteriormente, analogamente temos o mesmo para ψ_n , então aplicando o Teorema da Convergência Dominada 3, temos que para cada $\delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos que

$$\|Q_c(x) - Q_{c_n}(x)\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \longrightarrow 0 \implies \|Q_c(x) - Q_{c_n}(x)\|_{H^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0.$$

Isso que dizer que, no tempo inicial quando a distância $|c - c_n|$ é muito pequena, então as soluções estão bem próximas, todavia vamos mostrar que com o passar do tempo isso não acontece por mais que $|c - c_n|$ seja pequena as soluções tendem a se afastar a partir de um determinado tempo

Agora tome $n > n_0$ e sem perda de generalidade considere que $c > c_n$. Sabemos também que Q_c e Q_{c_n} são soluções de gKdV, tais que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} Q_c = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} Q_{c_n} = 0,$$

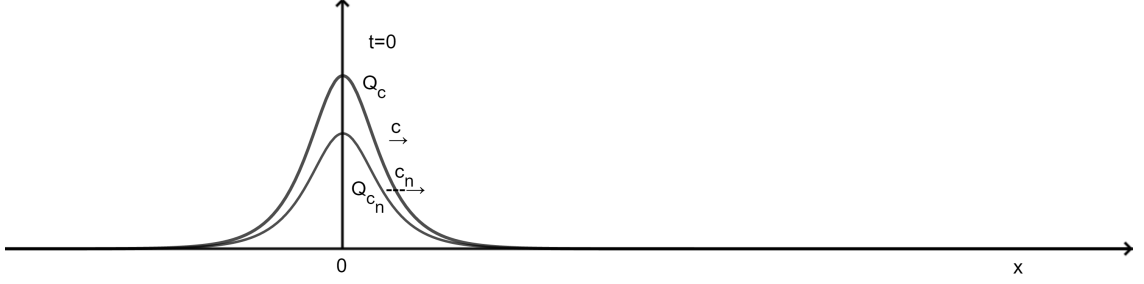


Figura A.1: Solitons no Momento Inicial ($t=0$)

então dado $\epsilon_0 > 0$ existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ de modo que $|x - ct| > \delta_1$ e $|x - c_n t| > \delta_2$ implica que

$$|Q_c(\cdot + ct)| < \epsilon_0 \quad \text{e} \quad |Q_{c_n}(\cdot + c_n t)| < \epsilon_0,$$

respectivamente.

Agora tome $\delta_0 = \text{Max}\{\delta_1, \delta_2\}$, então $|x - ct| > \delta_0$ e $|x - c_n t| > \delta_0$ implica que

$$|Q_c(\cdot + ct)| < \epsilon_0 \quad \text{e} \quad |Q_{c_n}(\cdot + c_n t)| < \epsilon_0,$$

onde

$$x < tc - \delta_0 \quad \text{ou} \quad tc + \delta_0 < x \quad \text{e} \quad x < c_n t - \delta_0 \quad \text{ou} \quad c_n t + \delta_0 < x.$$

Afirmamos que existe t_0 tal que $|y - ct_0| > \delta_0$, $|y - c_n t_0| > \delta_0$ e $t_0 > \frac{3\delta}{c - c_n}$ para isso basta tomar $t_0 > t$, com $t_0 > \frac{3\delta}{c - c_n}$, onde t é arbitrário, porém é fixo, logo

$$tc - \delta_0 < t_0 c - \delta_0 \quad \text{ou} \quad ct + \delta_0 < ct_0 + \delta_0,$$

assim basta tomar y tal que

$$y < t_0 c - \delta_0 \quad \text{ou} \quad ct + \delta_0 < y,$$

analogamente para $c_n t$, assim os intervalos $(ct_0 - \delta_0, ct_0 + \delta_0)$ e $(c_n t_0 - \delta_0, c_n t_0 + \delta_0)$ são disjuntos.

Então pela desigualdade de Sobolev, temos

$$\|Q_c(x - ct_0) - Q_{c_n}(x - c_n t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \tilde{C} \|Q_c(x - ct_0) - Q_{c_n}(x - c_n t_0)\|_{H^1(\mathbb{R})},$$

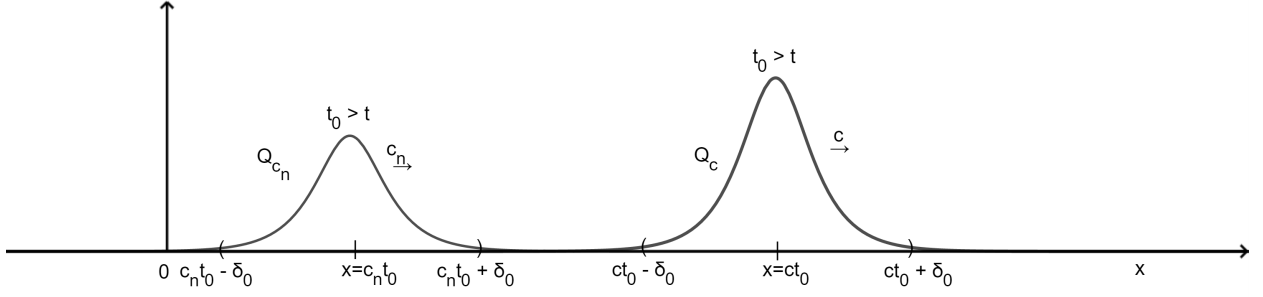


Figura A.2: Solitons após um tempo $t_0 > t$

temos também que

$$\begin{aligned} \|Q_c(x - ct_0) - Q_{c_n}(x - c_n t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\geq \|Q_c(x - ct_0) - Q_{c_n}(x - c_n t_0)\|_{L^\infty(ct_0 - \delta_0, ct_0 + \delta_0)} \\ &\geq \|Q_c(x)\|_{L^\infty(ct_0 - \delta_0, ct_0 + \delta_0)} - \|Q_{c_n}(x)\|_{L^\infty(ct_0 - \delta_0, ct_0 + \delta_0)}. \end{aligned}$$

Como $\|Q_c(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = M_1(c, p)$ e $\|Q_{c_n}(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = M_2(c_n, p)$, acontecem respectivamente em ct_0 e $c_n t_0$, temos que

$$\|Q_c(x - ct_0) - Q_{c_n}(x - c_n t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq M_1(c, p) - \epsilon_0 > 0,$$

portanto

$$\|Q_c(x - ct_0) - Q_{c_n}(x - c_n t_0)\|_{H^1(\mathbb{R})} \geq \frac{M_1(c, p) - \epsilon_0}{\tilde{C}} = \epsilon,$$

logo

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|Q_c(x - ct) - Q_{c_n}(x - c_n t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \geq \epsilon.$$

Concluimos então que a solução $Q_c(x - c_n t)$ é $H^1(\mathbb{R})$ -instável para $\rho(t) = c_n t$, com $n > n_0$ ou seja, para a velocidade original c_n do soliton, por mais que a distância $|c - c_n|$ seja pequena.