

DEIVID SANTOS DE ALMEIDA

**UNICIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES  
CAPILARES ESTÁVEIS EM UMA BOLA**

Maceió

2020

DEIVID SANTOS DE ALMEIDA

# **UNICIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES CAPILARES ESTÁVEIS EM UMA BOLA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Universidade Federal de Alagoas – UFAL

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia

Maceió

2020

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

A447u Almeida, Deivid Santos de.  
Unicidade de hipersuperfícies capilares estáveis em uma bola / Deivid Santos de Almeida. - 2020.  
60 f. : il., grafs., tabs.

Orientador: Abraão Mendes do Rêgo Gouveia.  
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 56.  
Apêndice: f. 58-60.

1. Geometria riemanniana. 2. Hipersuperfícies. 3. Geometria de geodésicas.  
I. Título.

CDU: 514.774:514.764.2

DEIVID SANTOS DE ALMEIDA

**UNICIDADE DE HIPERSUPERÍCIES CAPILARES  
ESTÁVEIS EM UMA BOLA**

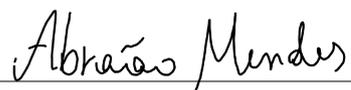
Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Data de Aprovação: 13/03/2020

**Banca Examinadora**

  
Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante - UFAL  
Examinador Interno

  
Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz - UFAL  
Examinador Interno

  
Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia - UFAL  
Orientador

  
Prof. Dr. Francisco Vanderson Moreira de Lima - UFRGS  
Examinador Externo

*Este trabalho é dedicado a meus pais,  
minha esposa e meu irmão.*

# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a minha família, meus pais, Quitéria e Sebastião, juntamente com meu irmão Leandro e minha esposa Rute, pois vocês foram fundamentais ao longo de todo o percurso e são as principais fontes de minha motivação.

Deixo meu agradecimento a todos professores com os quais pude aprender bastante: Gregório, Feliciano, Marcos Petrúcio, Carlos Gonçalves, Márcio Batista e Márcio Cavalcante.

Ao meu orientador Abraão Mendes, por todos ensinamentos e muitas dúvidas tiradas. Por todo suporte não apenas durante este trabalho, mas também durante as disciplinas, deixo minha gratidão.

Aos professores Marcos Petrúcio, Francisco Vanderson e Tiarlos que aceitaram o convite em participar das correções deste trabalho e pelas dicas e sugestões, muito obrigado.

Gostaria de agradecer a todos os amigos, que muito contribuíram não apenas neste trabalho, mas em todo o mestrado.

Agradeço também a CAPES pela bolsa durante todo o mestrado.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

# Resumo

A. Ros e E. S. Vergasta, juntamente com I. Nunes em um trabalho independente, classificaram as superfícies CMC estáveis com bordo livre na bola euclidiana tridimensional. Neste trabalho iremos apresentar uma generalização feita por G. Wang e C. Xia para hipersuperfícies capilares estáveis em bolas geodésicas do espaço euclidiano, do espaço hiperbólico e da esfera unitária. A ideia principal da demonstração é a utilização de uma fórmula do tipo Minkowski que nos fornece uma família de funções testes importantes que são chaves na prova do teorema, pois anulam o termo do bordo na fórmula da segunda variação da energia. Concluimos a dissertação mostrando as alterações necessárias para resolver o problema exterior em um dos três modelos citados. Tomaremos como exemplo o caso hiperbólico.

**Palavras-chave:** Estabilidade. Fórmula do Tipo Minkowski. Hipersuperfície Capilar.

# Abstract

A. Ros and E. S. Vergasta, together with I. Nunes in an independent work, classified the stable CMC surfaces with free boundary in the tridimensional Euclidean ball. In this work we will present a generalization due to G. Wang and C. Xia for stable capillary hypersurfaces in geodesic balls of the Euclidean space, the hyperbolic space and the unit sphere. The main idea in this proof is the use of a Minkowski type formula that provides us with a family of important test functions that are key in the theorem's proof, since they cancel out the boundary term in the second variation formula of the energy. We conclude the dissertation showing the necessary changes in order to proof the exterior problem in one of these three models. We take the hyperbolic space as an example.

**Keywords:** Stability. Minkowski Type Formula. Capillary Hypersurface.

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	9
2	CONCEITOS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA . . . . .	12
2.1	Variedades Riemannianas . . . . .	12
2.2	Curvaturas e Imersões Isométricas . . . . .	17
2.3	Gradiente, Divergência, Laplaciano e Hessiano . . . . .	22
3	RESULTADOS PRELIMINARES . . . . .	28
3.1	Hipersuperfície Capilar Estável . . . . .	28
4	HIPERSUPERFÍCIES CAPILARES EM UMA BOLA EUCLIDIANA	37
4.1	Uma Nova Fórmula do Tipo Minkowski . . . . .	37
4.2	Unicidade de Hipersuperfícies Capilares Estáveis em uma Bola Euclidiana . . . . .	39
5	HIPERSUPERFÍCIES CAPILARES EM UMA BOLA NO ESPAÇO HIPERBÓLICO . . . . .	45
5.1	Uma Nova Fórmula do Tipo Minkowski no Espaço Hiperbólico . . . . .	45
5.2	Unicidade de Hipersuperfícies Capilares Estáveis em uma Bola Geodésica do Espaço Hiperbólico . . . . .	53
5.3	O Caso Esférico . . . . .	55
5.4	O Problema Exterior . . . . .	55
	REFERÊNCIAS . . . . .	57
	APÊNDICES	59
	APÊNDICE A – CLASSIFICAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES TOTALMENTE UMBÍLICAS NO ESPAÇO EUCLIDIANO . . . . .	60

# 1 Introdução

Sejam  $(\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$  uma variedade Riemanniana orientada  $n + 1$ -dimensional e  $B$  um domínio compacto com fronteira  $\partial B$  não vazia e suave. O objeto central deste trabalho são as hipersuperfícies capilares, que são as hipersuperfícies de curvatura média constante (CMC) ou mínimas em  $B$  com bordo em  $\partial B$  intersectando  $\partial B$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ .

Hipersuperfícies CMC ou mínimas com bordo livre, ou seja, que intersectam o bordo  $\partial B$  ortogonalmente, são especiais e exemplos importantes de hipersuperfícies capilares. Hipersuperfície capilar é ponto crítico de um certo funcional variacional geométrico sob certas condições de volume. Foi T. Young um dos primeiros que considerou matematicamente superfícies capilares em (YOUNG, 1805). Para saber mais sobre a história de superfícies capilares veja (FINN; MCCUAN; WENTE, 2012). Veja também o livro (FINN, 2012) para uma pesquisa sobre a teoria de superfícies capilares.

A estabilidade de hipersuperfícies CMC ou mínimas é um conceito muito importante em geometria diferencial. Para hipersuperfícies fechadas (i.e. compacta sem bordo), existe um resultado clássico de unicidade provado por J. L. Barbosa, M. P. do Carmo e J. Eschenburg (BARBOSA; DO CARMO; ESCHENBURG, 1988).

**Teorema 1.1** (Barbosa-do Carmo-Eschenburg, 1988). *As hipersuperfícies CMC fechadas estáveis nos espaços formas são esferas geodésicas.*

A. Ros e E. S. Vergasta (ROS; VERGASTA, 1995) classificaram as superfícies CMC estáveis compacta imersas com bordo livre.

**Teorema 1.2** (Ros-Vergasta, 1995). *Se  $M \subset \bar{\mathbb{B}}^3$  é uma superfície CMC estável compacta imersa com bordo livre, então  $\partial M$  é mergulhada e as únicas possibilidades são*

- i)  $M$  é totalmente geodésica;
- ii)  $M$  é uma calota esférica;
- iii)  $M$  possui gênero 1 com no máximo duas componentes no bordo.

O caso (iii) foi excluído recentemente por I. Nunes (NUNES, 2017).

Iremos apresentar uma demonstração devida a A. Ros e R. Souam (ROS; SOUAM, 1997) que, de fato, os discos totalmente geodésicos e as calotas esféricas na bola euclidiana  $\bar{\mathbb{B}} \subset \mathbb{R}^3$  são capilares estáveis.

A. Ros e E. S. Vergasta (ROS; VERGASTA, 1995) provaram ainda o seguinte resultado de unicidade para hipersuperfícies mínimas imersas com bordo livre em uma bola no espaço euclidiano. Afirmaram o seguinte resultado de unicidade.

**Teorema 1.3** (Ros-Vergasta, 1995). *Qualquer hipersuperfície mínima imersa estável com bordo livre em uma bola no espaço euclidiano é totalmente geodésica.*

Comparando com o resultado de unicidade para hipersuperfícies fechadas, Teorema 1.1, um problema natural que permaneceu em aberto por muito tempo, onde muitos matemáticos buscaram resolver, foi o da unicidade de hipersuperfícies capilares estáveis em uma bola nos espaços formas simplesmente conexos. Neste trabalho apresentaremos uma resposta para esse problema, demonstrado por G. Wang e C. Xia (WANG; XIA, 2019).

Esses resultados generalizam o Teorema 1.3, pois classificam todas as hipersuperfícies capilares estáveis na bola euclidiana, como também classificam em todos os espaços formas simplesmente conexos.

Um resultado fundamental para provar esses teoremas é a obtenção de uma fórmula do tipo Minkowski. No caso do espaço euclidiano temos:

**Proposição 1.4** (Fórmula do tipo Minkowski). *Seja  $x : M \rightarrow \bar{\mathbb{B}}$  uma imersão isométrica na bola unitária euclidiana, cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial \bar{\mathbb{B}}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então*

$$\int_M n \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle dA = \int_M H \langle X_a, \nu \rangle dA.$$

Acima  $a \in \mathbb{R}^n$  é um campo vetorial constante e  $X_a$  é definido por

$$X_a := \langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a.$$

O campo  $X_a$  é importante porque é um campo conforme e essa propriedade será muito útil na demonstração da fórmula do tipo Minkowski. A fórmula do tipo Minkowski é muito importante pois nos fornece para cada campo vetorial contante  $a \in \mathbb{R}^n$ , a função teste:

$$\varphi_a = n \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle - H \langle X_a, \nu \rangle$$

sobre  $M$ , onde  $\varphi_a$  satisfaz

$$\int_M \varphi_a dA = 0.$$

Além disso, se  $M$  possui curvatura média constante, então

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \varphi_a - q \varphi_a &= 0, \\ \Delta \varphi_a + |h|^2 \varphi_a &= (n|h|^2 - H^2) \langle x, a \rangle. \end{aligned}$$

A função  $\varphi_a$  é importante, pois quando substituirmos  $\varphi_a$  na fórmula da segunda variação do funcional energia o termo de bordo é nulo.

Essas são as ideias principais para demonstrar o teorema:

**Teorema 1.5** (Wang-Xia, 2019). *Seja  $x : M \rightarrow \bar{\mathbb{B}}$  uma hipersuperfície capilar estável imersa na bola euclidiana unitária com curvatura média constante  $H \geq 0$  e ângulo de contato constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então ou  $x$  é totalmente geodésica ou é uma calota esférica.*

Em seguida, no capítulo 5, iremos considerar o caso Hiperbólico, no qual para cada campo constante  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  temos os campos conformes  $X_a = \frac{2}{1-R_{\mathbb{R}}^2}[\langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2) a]$  e  $Y_a = \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a - \langle x, a \rangle x$ , onde  $Y_a$  é um campo de Killing e o fator conforme de  $X_a$  é dado por  $V_a = \frac{2\langle x, a \rangle}{1-|x|^2}$ . A constante  $R_{\mathbb{R}}$  será definida no capítulo 5. Teremos a seguinte fórmula do tipo Minkowski:

**Proposição 1.6** (Fórmula do tipo Minkowski). *Seja  $x : M \rightarrow B_R^{\mathbb{H}}$  uma hipersuperfície imersa isometricamente na bola hiperbólica  $B_R^{\mathbb{H}}$ , cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial B_R^{\mathbb{H}}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então*

$$\int_M n(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) dA = \int_M H \bar{g}(X_a, \nu) dA.$$

Teremos então que a função  $\varphi_a = n(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) - H \bar{g}(X_a, \nu)$  é uma função teste. Seguindo a mesma ideia do caso euclidiano, temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.7.** *Ao longo do bordo de  $M$ , temos*

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\mu} (V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) &= q(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)), \\ \bar{\nabla}_{\mu} \bar{g}(X_a, \nu) &= q \bar{g}(X_a, \nu), \end{aligned}$$

onde

$$q = \frac{1}{\sin \theta} \coth R + \cotg \theta h(\mu, \mu).$$

Essa proposição é importante porque nos garante que  $\bar{\nabla}_{\mu} \varphi_a - q \varphi_a = 0$  no bordo de  $M$ . Com isso será demonstrado o teorema da unicidade para o caso hiperbólico:

**Teorema 1.8** (Wang-Xia, 2019). *Seja  $x : M \rightarrow B_R^{\mathbb{H}} \subset (\mathbb{B}, \bar{g})$  uma hipersuperfície capilar estável imersa na bola  $B_R^{\mathbb{H}}$  com curvatura média constante  $H \geq 0$  e ângulo de contato constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então  $x$  é totalmente umbílica.*

Para o caso da esfera indicaremos o caminho a ser seguido, pois é semelhante ao caso hiperbólico, com uma pequena alteração nos campos conforme  $X_a$  e  $Y_a$  utilizados.

Terminaremos o trabalho com a ideia da prova do problema exterior. Abaixo segue o enunciado do caso hiperbólico:

**Teorema 1.9** (Wang-Xia, 2019). *Seja  $x : M \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \setminus B_R^{\mathbb{H}}$  uma hipersuperfície capilar estável compacta imersa fora da bola hiperbólica com curvatura média  $H \geq 0$  e ângulo de contato  $\theta \in (0, \pi)$ . Então  $x$  é totalmente umbílica.*

## 2 Conceitos de Geometria Riemanniana

Neste capítulo introduziremos conceitos e resultados básicos de Geometria Riemanniana, tais como métricas Riemannianas, conexões, curvaturas, imersões isométricas e outros conceitos que serão usados nos próximos capítulos deste trabalho. Neste capítulo utilizaremos como referência principal o livro (DO CARMO, 2015).

### 2.1 Variedades Riemannianas

Indicaremos por  $M^n$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  e de classe  $C^\infty$ . Quando a dimensão não for importante ou estiver implícita, indicaremos  $M^n$  apenas por  $M$ . A palavra “suave” neste trabalho significa “de classe  $C^\infty$ ”. Além disso,  $C^\infty(M)$  denotará o conjunto das funções suaves  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definição 2.1.1.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : M \rightarrow N$  é uma **imersão** se  $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Se, além disso,  $\varphi$  é um homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , com  $\varphi(M)$  munido da topologia induzida por  $N$ , diz-se que  $\varphi$  é um **mergulho**. Se  $M \subset N$  é a inclusão  $i : M \hookrightarrow N$  é um mergulho, diz-se que  $M$  é uma **subvariedade** de  $N$ .

*Exemplo 2.1.2.* A curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$  (Figura 1) é uma imersão que possui uma auto-intersecção. Portanto,  $\alpha$  não é um mergulho.

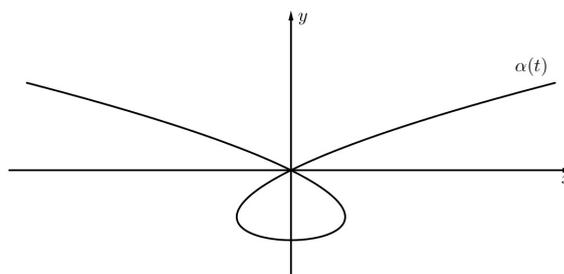


Figura 1 – Traço da curva  $\alpha$

**Definição 2.1.3.** Dada uma variedade diferenciável  $M$ , um **campo de vetores**  $X$  sobre  $M$  é uma aplicação  $X : M \rightarrow TM$  que satisfaz  $\pi \circ X = \text{id}_M$ , onde  $TM$  é o fibrado tangente de  $M$  e  $\pi : TM \rightarrow M$  é a projeção canônica. Dizemos que o campo  $X$  é **suave** se a aplicação  $X : M \rightarrow TM$  é suave. O conjunto de todos os campos de vetores suaves sobre  $M$  é denotado por  $\mathfrak{X}(M)$ . Muitas vezes denotamos  $X(p)$  por  $X_p$  para  $p \in M$ .

Outra forma de ver um campo de vetores suave sobre  $M$  é como uma aplicação que associa a cada  $f \in C^\infty(M)$  uma função  $Xf \in C^\infty(M)$  através da expressão

$$(Xf)(p) = X_p f,$$

onde  $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  é um vetor tangente a  $M$  em  $p \in M$ . Neste caso, considerando uma parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ , podemos escrever

$$X_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

onde cada  $a_i : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$  é a base coordenada associada a  $x$ . Temos então  $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  dado por

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

para  $f \in C^\infty(M)$  e  $p \in x(U)$ .

*Exemplo 2.1.4.* Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Escrevamos  $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  e  $Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  em uma vizinhança coordenada  $x(U)$ . Então,

$$\begin{aligned} XY(f) &= X \left( \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n X \left( b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i \left( \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left( a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Analogamente, vemos que

$$YX(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_j a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Portanto, usando o Teorema de Schwarz que diz que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ , obtemos

$$XY(f) - YX(f) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left( a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

sobre  $x(U)$ . Além disso, pode-se demonstrar que a função acima independe da parametrização  $x$ . Portanto,  $XY - YX \in \mathfrak{X}(M)$ .

Com isso, temos a seguinte definição.

**Definição 2.1.5.** Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , o campo  $[X, Y] := XY - YX \in \mathfrak{X}(M)$  é chamado o **colchete** de  $X$  e  $Y$ .

A operação colchete possui as seguintes propriedades.

**Proposição 2.1.6.** Se  $X, Y$  e  $Z$  são campos de vetores suaves sobre  $M$ ,  $a$  e  $b$  são números reais e  $f$  e  $g$  são funções suaves definidas em  $M$ , então:

- i)  $[X, Y] = -[Y, X]$ ,
- ii)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ ,
- iii)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ ,
- iv)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

*Demonstração.* Ver (DO CARMO, 2015). □

Vejam agora a seguinte definição.

**Definição 2.1.7.** Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável  $M^n$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = g_p(\cdot, \cdot)$  no espaço tangente  $T_pM$  tal que se  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , então para cada par  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $q \mapsto \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$  é uma função suave definida sobre  $x(U)$ .

As funções  $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$  são chamadas de **componentes** da métrica Riemanniana  $g$  no sistema de coordenadas  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ . Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana é chamada de **variedade Riemanniana**. É usual deixar de indicar o índice  $p$  em  $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$  sempre que não houver possibilidade de confusão. Denotaremos por  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  com uma métrica  $g$ . Sempre que não for importante ou estiver implícito com qual métrica estamos trabalhando, escreveremos apenas  $M$  no lugar de  $(M, g)$  e diremos que  $M$  é uma variedade Riemanniana.

**Definição 2.1.8.** Sejam  $(M, g)$  e  $(N, h)$  variedades Riemannianas. Uma imersão  $f : M \rightarrow N$  que satisfaz

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

ou seja,

$$g_p(u, v) = h_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)),$$

para todos  $p \in M$  e  $u, v \in T_pM$ , é chamada de **imersão isométrica**. Se  $f$  é uma imersão isométrica que é também um difeomorfismo, diremos que  $f$  é uma **isometria**.

Dada uma variedade Riemanniana  $(N, h)$  e uma imersão  $f : M \rightarrow N$ , sempre podemos considerar uma métrica Riemanniana em  $M$  que faz de  $f$  uma imersão isométrica. De fato, podemos definir  $g_p$  por

$$g_p(u, v) = h_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)).$$

Não é difícil de verificar que, de fato,  $g$  é uma métrica Riemanniana. Neste caso, dizemos que  $g$  é a métrica **induzida** por  $(N, h)$  e por  $f$  e a denotamos por  $f^*h$ .

**Definição 2.1.9.** Uma **conexão afim**  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ,
- ii)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,
- iii)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ ,

para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ .

Dizemos que  $\nabla_X Y$  é a **derivada covariante** do campo  $Y$  na direção do campo  $X$ .

Em um sistema de coordenadas  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ , com  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ , podemos escrever  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k$  sobre  $x(U)$ , onde as funções suaves  $\Gamma_{ij}^k : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$  são os chamados **símbolos de Christoffel** da conexão  $\nabla$  no sistema de coordenadas  $x$ .

Verifica-se que se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  escrevem-se da forma  $X = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i$  e  $Y = \sum_{i=1}^n y_i \partial_i$  sobre  $x(U)$ , então

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) \partial_k.$$

A expressão acima nos mostra que  $\nabla_X Y(p)$  depende apenas de  $X_p$  e dos valores de  $Y$  ao longo de uma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = X_p$ .

**Proposição 2.1.10.** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana com uma conexão afim  $\nabla$  e  $\alpha : I \rightarrow M$  uma curva suave. Então, para cada campo de vetores suave  $V$  ao longo de  $\alpha$ , existe um único campo de vetores suave  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $\alpha$  tal que:*

- i)  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ ,
- ii)  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ ,

- iii) Se  $V$  é a restrição de um campo de vetores suave  $Y$  a  $\alpha$  definido numa vizinhança de  $\alpha(I)$ , então  $\frac{DV}{dt}(t) = \nabla_{\alpha'}Y(\alpha(t))$ .

*Demonstração.* Ver (DO CARMO, 2015). □

**Definição 2.1.11.** Dizemos que uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é **compatível** com a métrica se para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , nós temos

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

**Definição 2.1.12.** Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é dita **simétrica** se para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , nós temos

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Agora iremos enunciar um teorema importante sobre a existência e a unicidade de uma conexão afim simétrica e compatível com a métrica de uma variedade Riemanniana.

**Proposição 2.1.13.** *Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.*

*Demonstração.* Ver (DO CARMO, 2015). □

A conexão afim da proposição anterior é denominada a **conexão de Levi-Civita** ou **Riemanniana** de  $M$ . De agora em diante, estaremos sempre considerando variedades Riemannianas com suas respectivas conexões Riemannianas.

Vejamos agora a fórmula de Koszul, que será usada para encontrarmos uma relação entre as conexões (Riemannianas) associadas a duas métricas em  $M$ , digamos  $g$  e  $\bar{g}$ , que satisfazem a relação  $\bar{g} = e^{2u}g$ , com  $u \in C^\infty(M)$ , as quais são ditas **conformes**.

**Proposição 2.1.14.** *Sejam  $g$  uma métrica Riemanniana em  $M$  e  $\nabla$  a sua conexão de Levi-Civita. Para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , vale a seguinte relação:*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X). \end{aligned} \quad (2.1)$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y X, Z) \\ &\quad + g(X, \nabla_Y Z) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\ &\quad + g(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X) \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) - g([X, Y]Z) \\ &\quad + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X), \end{aligned}$$

o que garante o resultado.  $\square$

O resultado desejado é fornecido a seguir.

**Proposição 2.1.15.** *Sejam  $g$  e  $\bar{g} = e^{2u}g$ , com  $u \in C^\infty(M)$ , duas métricas conformes em uma variedade diferenciável  $M$  e  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$  suas respectivas conexões Riemannianas. Para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , nós temos*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(u)Y + Y(u)X - g(X, Y)\nabla u. \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Por (2.1), temos que

$$\begin{aligned} 2\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) &= X\bar{g}(Y, Z) + Y\bar{g}(X, Z) - Z\bar{g}(X, Y) \\ &\quad + \bar{g}([X, Y], Z) - \bar{g}([X, Z], Y) - \bar{g}([Y, Z], X) \\ &= X(e^{2u}g(Y, Z)) + Y(e^{2u}g(X, Z)) - Z(e^{2u}g(X, Y)) \\ &\quad + e^{2u}(g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)) \\ &= X(e^{2u})g(Y, Z) + Y(e^{2u})g(X, Z) - Z(e^{2u})g(X, Y) \\ &\quad + e^{2u}(Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)) \\ &= 2e^{2u}(X(u)g(Y, Z) + Y(u)g(X, Z) - Z(u)g(X, Y) + g(\nabla_X Y, Z)) \\ &= 2e^{2u}g(\nabla_X Y + X(u)Y + Y(u)X - g(X, Y)\nabla u, Z), \end{aligned}$$

ou seja,  $g(\bar{\nabla}_X Y - (\nabla_X Y + X(u)Y + Y(u)X - g(X, Y)\nabla u), Z) = 0$  para todo  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ , o que garante o resultado.  $\square$

**Definição 2.1.16.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Dado  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , dizemos que  $X$  é um **campo conforme** se existe uma função suave  $\psi_X : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 2\psi_X \langle Y, Z \rangle$$

para todos  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

A função  $\psi_X$  é chamada de **fator conforme** de  $X$ . Dizemos que  $X$  é um **campo de Killing** se  $\psi_X = 0$ .

## 2.2 Curvaturas e Imersões Isométricas

**Definição 2.2.1.** A **curvatura de Riemann**  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definida por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

Note que se  $M = \mathbb{R}^n$ , então  $R(X, Y)Z = 0$  para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ . De fato, se  $Z = (z_1, \dots, z_n)$ , onde  $z_1, \dots, z_n$  são as coordenadas de  $Z$  na base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , então

$$\begin{aligned}\nabla_X Z &= \nabla_X \left( \sum_{i=1}^n z_i E_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (X(z_i) E_i + z_i \nabla_X E_i) \\ &= (X z_1, \dots, X z_n),\end{aligned}$$

donde

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (Y X z_1, \dots, Y X z_n)$$

e portanto

$$\begin{aligned}R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= \sum_{i=1}^n (XY(z_i) E_i - YX(z_i) E_i - [X, Y](z_i) E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n ([X, Y](z_i) E_i - [X, Y](z_i) E_i) = 0.\end{aligned}$$

**Proposição 2.2.2.** *A curvatura de Riemann  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  satisfaz as seguintes propriedades:*

i)  $R$  é  $C^\infty(M)$ -bilinear em  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ , isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

para todos  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ .

ii) Para todo par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , o operador curvatura  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é  $C^\infty(M)$ -linear, isto é,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z,$$

para todos  $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in C^\infty(M)$ .

*Demonstração.* Ver (DO CARMO, 2015). □

Segue das propriedades acima que  $(R(X, Y)Z)(p)$  depende apenas de  $X_p, Y_p$  e  $Z_p$ .

**Proposição 2.2.3.** *Dados  $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ , nós temos*

i)  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)Z, T \rangle,$

- ii)  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(X, Y)T, Z \rangle,$   
 iii)  $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle.$

*Demonstração.* Ver (DO CARMO, 2015). □

Seja  $x = z_n$  um vetor unitário em  $T_pM$ . Tomando uma base ortonormal  $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$  do complemento ortogonal de  $x$  em  $T_pM$ , considere as seguintes médias:

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(z_i, x)x, z_i \rangle,$$

$$S(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Ric}_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \langle R(z_j, z_i)z_i, z_j \rangle.$$

Vamos mostrar que as expressões acima não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais.

De fato, sejam  $x, y \in T_pM$  e considere  $Q : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$Q(x, y) = \text{tr}(z \mapsto R(z, x)y).$$

Pela Proposição 2.2.2, temos que  $Q$  é bilinear. Escolhendo  $x$  unitário e uma base ortonormal  $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$  de  $T_pM$ , temos

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \sum_{i=1}^n \langle R(z_i, x)y, z_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle R(z_i, y)x, z_i \rangle \\ &= Q(y, x). \end{aligned}$$

Portanto,  $Q$  é simétrica e  $Q(x, x) = (n-1) \text{Ric}_p(x)$ . Isto mostra que  $\text{Ric}_p(x)$  está intrinsecamente definida, tendo em vista que o traço de um operador linear não depende da base ortonormal escolhida.

Por outro lado, à forma bilinear  $Q$  em  $T_pM$  corresponde uma aplicação linear auto-adjunta  $K$  que satisfaz

$$\langle K(x), y \rangle = Q(x, y).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{tr } K &= \sum_{j=1}^n \langle K(z_j), z_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n Q(z_j, z_j) \\ &= (n-1) \sum_{j=1}^n \text{Ric}_p(z_j) \\ &= n(n-1)S(p), \end{aligned}$$

o que demonstra que  $S(p)$  não depende da base.

$\text{Ric}_p(x)$  é chamada de **curvatura de Ricci** de  $M$  em  $p \in M$  na direção  $x \in T_pM$  e  $S(p)$  é chamada de **curvatura escalar** de  $M$  em  $p \in M$ . A forma  $C^\infty(M)$ -bilinear  $\text{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  definida por  $\text{Ric}(X, Y)(p) = \langle \text{Ric}_p(X_p), Y_p \rangle_p$  é chamada de **tensor de Ricci** de  $M$ .

Sejam  $\bar{M}^{n+k}$  uma variedade Riemanniana e  $M^n$  uma variedade diferenciável. Se existe uma imersão  $f : M \rightarrow \bar{M}$ , podemos considerar em  $M$  a métrica induzida por  $\bar{M}$  e por  $f$ , o que faz de  $f$  uma imersão isométrica. Neste caso, dizemos que  $\bar{M}$  é a **variedade ambiente** da imersão.

Para imersões, cada ponto de  $M$  possui uma vizinhança  $V$  cuja imagem  $\bar{V} = f(V) \subset \bar{M}$  é uma subvariedade de  $\bar{M}$ , pois toda imersão é localmente um mergulho. Para simplificar a notação, identificaremos  $V$  com  $\bar{V}$ , os pontos  $p \in M$  com os pontos  $\bar{p} = f(p) \in \bar{M}$  e os vetores  $v \in T_pM$  com os vetores  $df_p(v) \in T_{\bar{p}}\bar{M}$ .

Com base nas identificações acima, para cada  $p \in M$ , o produto interno em  $T_p\bar{M}$  decompõe este espaço em uma soma direta,

$$T_p\bar{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp,$$

onde  $T_pM^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_pM$  em  $T_p\bar{M}$ . Logo, se  $v \in T_p\bar{M}$ , podemos escrever

$$v = v^T + v^N,$$

onde  $v^T \in T_pM$  é chamado a **componente tangencial** de  $v$  e  $v^N \in T_pM^\perp$  é chamado a **componente normal** de  $v$ .

A conexão Riemanniana de  $\bar{M}$  será indicada por  $\bar{\nabla}$ . Se  $X$  e  $Y$  são campos locais de vetores em  $M$  e  $\bar{X}, \bar{Y}$  são extensões locais de  $X$  e  $Y$  a  $\bar{M}$ , respectivamente, definimos

$$\nabla_X Y = \left( \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \right)^T.$$

Temos que  $\nabla_X Y$  está bem definida, ou seja, não depende das extensões  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$ . De fato, para cada  $p \in M$ , sabemos que  $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})(p)$  depende apenas de  $\bar{X}_p = X_p$  e dos valores de  $\bar{Y}$  ao longo de uma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \bar{M}$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = X_p$ . Obviamente esta curva pode ser tomada sobre  $M$ .

Além disso,  $\nabla$  é uma conexão afim. De fato,  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$  com respeito à métrica induzida por  $\bar{M}$ . Como  $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$  quando restrito a  $M$  depende apenas de  $X$  e  $Y$ , costumamos denotá-lo por  $\bar{\nabla}_X Y$ .

**Definição 2.2.4.** Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , definimos

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

Indicaremos por  $\mathfrak{X}(M)^\perp$  o conjunto das aplicações suaves  $X : M \rightarrow T\bar{M}$  tais que  $\bar{\pi} \circ X = \text{id}_M$  e  $X_p \in T_p M^\perp$  para cada  $p \in M$ , onde  $\bar{\pi} : T\bar{M} \rightarrow \bar{M}$  é a projeção canônica.

**Proposição 2.2.5.** *Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , a aplicação  $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ , dada por  $B(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ , está bem definida. Além disso,  $B$  é  $C^\infty(M)$ -bilinear e simétrica.*

*Demonstração.* Ver (DO CARMO, 2015). □

Agora podemos definir a segunda forma fundamental de  $M$  em  $\bar{M}$ . Sejam  $p \in M$  e  $\mu \in T_p M^\perp$ . Defina a aplicação  $h_\mu : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h_\mu(x, y) = -\langle B(x, y), \mu \rangle.$$

Pela Proposição 2.2.5, temos que  $h_\mu$  é bilinear e simétrica. Observe que a aplicação  $h_\mu$  está bem definida pois como  $B(X, Y)(p)$  depende apenas de  $X_p$  na primeira entrada e  $B$  é simétrica, temos que  $B(X, Y)(p)$  depende apenas de  $X_p$  e  $Y_p$ .

**Definição 2.2.6.** A forma quadrática  $\Pi_\mu$  definida em  $T_p M$  por

$$\Pi_\mu(x) = h_\mu(x, x)$$

é chamada a **segunda forma fundamental** de  $M$  em  $\bar{M}$  no ponto  $p \in M$  segundo o vetor normal  $\mu \in T_p M^\perp$ .

Frequentemente, a aplicação  $B$  também é chamada de segunda forma fundamental. Observe que à aplicação bilinear  $h_\mu$  fica associado um único operador linear auto-adjunto  $A_\mu : T_p M \rightarrow T_p M$ , conhecido como **operador de Weingarten** de  $M$  em  $\bar{M}$  no ponto  $p$  segundo o vetor  $\mu$ , tal que

$$\langle A_\mu(x), y \rangle = h_\mu(x, y) = -\langle B(x, y), \mu \rangle.$$

**Proposição 2.2.7.** *Sejam  $p \in M$ ,  $\mu \in T_p M^\perp$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\nu \in \mathfrak{X}(M)^\perp$  tal que  $\nu_p = \mu$ . Temos que*

$$A_\mu(X_p) = (\bar{\nabla}_X \nu)^T(p).$$

*Demonstração.* De fato, seja  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Observe que  $\langle \nu, Y \rangle = 0$  sobre  $M$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \langle A_\mu(X_p), Y_p \rangle &= -\langle B(X, Y), \nu \rangle(p) \\ &= -\langle \bar{\nabla}_X Y, \nu \rangle(p) \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \nu, Y \rangle(p) \\ &= \langle (\bar{\nabla}_X \nu)(p), Y_p \rangle. \end{aligned}$$

Como isto vale para todo  $Y_p \in T_p M$ , o resultado segue. □

*Exemplo 2.2.8.* Consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, ou seja,  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ . Neste caso,  $f(M)$  é denominada uma hipersuperfície de  $\bar{M}$ . Mais uma vez fazendo as devidas identificações, sejam  $p \in M$  e  $\mu \in T_p M^\perp$  com  $|\mu| = 1$ . Como  $A_\mu : T_p M \rightarrow T_p M$  é simétrica, existe uma base ortonormal de  $T_p M$  formada por vetores próprios  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $A_\mu$  com valores próprios reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , isto é,  $A_\mu(e_i) = \lambda_i e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Se  $M$  e  $\bar{M}$  são ambas orientáveis e estão orientadas, então o vetor  $\mu$  fica univocamente determinado se exigirmos que sendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base positiva de  $M$ ,  $\{e_1, \dots, e_n, \mu\}$  seja uma base positiva de  $\bar{M}$ . Neste caso, denominamos os  $e_i$  direções principais e os  $\lambda_i = \kappa_i$  curvaturas principais de  $M$  em  $\bar{M}$  no ponto  $p \in M$ . Assim, denominamos  $\det(A_\mu) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$  a **curvatura de Gauss-Kronecker** e  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$  a **curvatura média** de  $M$  em  $\bar{M}$  no ponto  $p \in M$ .

**Definição 2.2.9.** Uma imersão  $f : M \rightarrow \bar{M}$  é **geodésica** em  $p \in M$  se, para todo  $\mu \in T_p M^\perp$ , a segunda forma fundamental  $\Pi_\mu$  é identicamente nula. A imersão  $f$  é **totalmente geodésica** se ela é geodésica em cada ponto  $p \in M$ .

**Definição 2.2.10.** Uma imersão isométrica  $\varphi : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$  é **umbílica** em  $p \in M$  se, para cada  $\mu \in T_p M^\perp$ , existe um número real  $\lambda_\mu$  tal que

$$A_\mu = \lambda_\mu \text{id}.$$

A imersão é **totalmente umbílica** se ela é umbílica em cada  $p \in M$ .

## 2.3 Gradiente, Divergência, Laplaciano e Hessiano

**Definição 2.3.1.** Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. O **gradiente** de  $f$  é o campo de vetores suave  $\nabla f$  definido em  $M$  de tal maneira que

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Proposição 2.3.2.** Sejam  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal definido em um aberto  $U \subset M$ . Então, nós temos

$$\nabla f = \sum_{j=1}^n e_j(f) e_j$$

em  $U$ .

*Demonstração.* Para a primeira prova basta ver que, sendo  $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  em  $U$ , tem-se

$$X(f) = \sum_{i=1}^n a_i e_i(f) = \sum_{i=1}^n \langle a_i e_i, \sum_{j=1}^n e_j(f) e_j \rangle.$$

Portanto, pela definição do gradiente,  $\nabla f = \sum_{j=1}^n e_j(f)e_j$ .

Por outro lado, se  $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  for outro referencial ortonormal em  $U$ , com  $\tilde{e}_j = a_{ij}e_i$  em  $U$ , então a matriz  $(a_{ij}(p))_{n \times n}$  é ortogonal em todo  $p \in U$ , e daí

$$\tilde{e}_j(f)\tilde{e}_j = a_{kj}a_{lj}e_k(f)e_l = \delta_{kl}e_k(f)e_l = e_k(f)e_k.$$

□

**Proposição 2.3.3.** *Se  $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves, então*

- i)  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$ ,
- ii)  $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$ .

*Demonstração.* Se  $X$  é um campo suave em  $M$ , nós temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f + g), X \rangle &= X(f + g) \\ &= X(f) + X(g) \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla g, X \rangle \\ &= \langle \nabla f + \nabla g, X \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \nabla(fg), X \rangle &= X(fg) \\ &= gX(f) + fX(g) \\ &= \langle g\nabla f, X \rangle + \langle f\nabla g, X \rangle \\ &= \langle g\nabla f + f\nabla g, X \rangle. \end{aligned}$$

Como isto vale para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , os resultados seguem. □

**Definição 2.3.4.** Seja  $X$  um campo de vetores suave em  $M$ . A **divergência** de  $X$  é a função suave  $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde  $v \in T_p M$  para cada  $p \in M$ .

Dizemos que um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em um aberto  $U \subset M$  é **geodésico** em  $p \in U$  se  $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$  para todos  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Proposição 2.3.5.** *Sejam  $X$  um campo suave em  $M^n$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal em um aberto  $U \subset M$ . Se  $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  em  $U$ , então*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle)$$

em  $U$ . Em particular, se o referencial é geodésico em  $p \in U$ , então temos  $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n e_i(a_i)$  em  $p$ .

*Demonstração.* Pela definição de divergência de uma campo de vetores, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle)\end{aligned}$$

em  $U$ . □

**Proposição 2.3.6.** *Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, então*

- i)  $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$ ,
- ii)  $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$ .

*Demonstração.* Tomando um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  definido em um aberto  $U \subset M$ , segue-se da definição de divergência e da linearidade da conexão Riemanniana que

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(X + Y) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(X + Y), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (\langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle + \langle \nabla_{e_i} Y, e_i \rangle) \\ &= \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e_i(f)X + f \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (\langle e_i(f)e_i, X \rangle + f \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle) \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + f \operatorname{div} X\end{aligned}$$

em  $U$ . Como todo ponto em  $M$  admite uma vizinhança na qual está definido um referencial ortonormal, os resultados seguem. □

**Definição 2.3.7.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. O Laplaciano de  $f$  é a função  $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

**Proposição 2.3.8.** *Sejam  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal em um aberto  $U \subset M$ . Então,*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)f$$

em  $U$ . Em particular, se o referencial é geodésico em  $p \in U$ , então temos que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f))$$

em  $p$ .

*Demonstração.* Sendo  $\nabla f = \sum_{i=1}^n e_i(f)e_i$  em  $U$ , segue-se da definição do Laplaciano e da equação (2.3.5) que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle) \\ &= \sum_{j=1}^n (e_j(e_j(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)f). \end{aligned}$$

□

Duas identidades bastante utilizadas neste trabalho são dadas pela seguinte proposição.

**Proposição 2.3.9.** *Dadas  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves, temos*

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Em particular,

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2.$$

*Demonstração.* Utilizando as Proposições 2.3.3 e 2.3.6, temos que

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= \operatorname{div}(\nabla(fg)) \\ &= \operatorname{div}(g\nabla f + f\nabla g) \\ &= g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle. \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.3.10 (Teorema da Divergência).** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana orientada compacta com bordo  $\partial M$ . Se  $X$  é um campo de vetores suave sobre  $M$ , então*

$$\int_M \operatorname{div} X dA = \int_{\partial M} g(X, \mu) ds,$$

onde  $\mu$  é o vetor unitário normal à fronteira  $\partial M$  que aponta para fora de  $M$ .

*Demonstração.* Ver (LEE, 2003).

□

**Definição 2.3.11.** Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. O **Hessiano** de  $f$  é o campo de operadores lineares  $(\text{Hess } f)_p : T_p M \rightarrow T_p M$ ,  $p \in M$ , definido em  $v \in T_p M$  por

$$(\text{Hess } f)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

**Proposição 2.3.12.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Para cada  $p \in M$ , o Hessiano  $(\text{Hess } f)_p : T_p M \rightarrow T_p M$  é um operador linear auto-adjunto.*

*Demonstração.* Se  $v, w \in T_p M$  e  $V$  e  $W$  denotam extensões de  $v$  e  $w$ , respectivamente, a campos definidos em uma vizinhança de  $p$  em  $M$ , então

$$\begin{aligned} \langle (\text{Hess } f)_p(v), w \rangle &= \langle \nabla_V \nabla f, W \rangle(p) \\ &= (V \langle \nabla f, W \rangle)(p) - \langle \nabla f, \nabla_V W \rangle(p) \\ &= (V(Wf))(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V + [V, W] \rangle(p) \\ &= (W(Vf))(p) + ([V, W]f)(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V + [V, W] \rangle(p) \\ &= (W \langle \nabla f, V \rangle)(p) - \langle \nabla f, \nabla_W V \rangle(p) \\ &= \langle (\text{Hess } f)_p(w), v \rangle. \end{aligned}$$

□

Temos então a forma  $C^\infty(M)$ -bilinear  $\text{Hess } f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  chamada de **Hessiana** de  $f$  definida por

$$\text{Hess } f(X, Y) = \langle (\text{Hess } f)(X), Y \rangle = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle.$$

**Proposição 2.3.13.** *Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, então*

$$\Delta f = \text{tr}(\text{Hess } f). \quad (2.3)$$

*Demonstração.* Sejam  $p \in M$  e  $U \subset M$  uma vizinhança aberta de  $p$  na qual está definido um referencial orthonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Então,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Hess } f)_p &= \langle (\text{Hess } f)(e_i), e_i \rangle(p) \\ &= \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle(p) \\ &= \text{div}(\nabla f)(p) \\ &= \Delta f(p). \end{aligned}$$

□

**Proposição 2.3.14.** *Sejam  $f : (M^n, g) \rightarrow (\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$  uma imersão isométrica e  $\nu$  um campo normal unitário ao longo de  $f$ . Considere uma função suave  $\varphi : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotando por  $\bar{\text{Hess}} \varphi$  e  $\text{Hess } \varphi$  as Hessianas de  $\varphi$  e  $\varphi|_M$ , respectivamente, temos que*

$$\bar{\text{Hess}} \varphi(X, Y) = \text{Hess } \varphi(X, Y) + \bar{g}(A(X), Y) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \quad (2.4)$$

para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , onde  $A$  é o operador de Weingarten de  $f$  segundo  $\nu$ .

*Demonstração.* De fato, temos que

$$\begin{aligned}
 (\text{Hess } \varphi)(X, Y) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}\varphi), Y) \\
 &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X(\nabla\varphi + \bar{g}(\bar{\nabla}\varphi, \nu)\nu), Y) \\
 &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X(\nabla\varphi), Y) + \bar{g}(\bar{\nabla}\varphi, \nu)\bar{g}(\bar{\nabla}_X\nu, Y) \\
 &= g(\nabla_X(\nabla\varphi), Y) + \bar{g}((A(X), Y)\bar{\nabla}_\nu\varphi) \\
 &= (\text{Hess } \varphi)(X, Y) + \bar{g}(A(X), Y)\bar{\nabla}_\nu\varphi.
 \end{aligned}$$

□

## 3 Resultados Preliminares

Apresentaremos neste capítulo as notações, definições e resultados que servirão de base para os próximos capítulos deste trabalho.

### 3.1 Hipersuperfície Capilar Estável

Sejam  $(\bar{M}^{n+1}, \bar{g})$  uma variedade Riemanniana orientada e  $B$  um domínio compacto com fronteira suave em  $\bar{M}$  difeomorfo a uma bola euclidiana. Seja  $x : (M^n, g) \rightarrow (B, \bar{g})$  uma imersão isométrica de uma variedade compacta orientável  $M$  com bordo  $\partial M$  em  $B$  que aplica  $\text{int } M$  em  $\text{int } B$  e  $\partial M$  em  $\partial B$ . Denotaremos por  $\bar{\nabla}$ ,  $\bar{\Delta}$  e  $\bar{\text{Hess}}$  o gradiente, o laplaciano e o hessiano sobre  $\bar{M}$ , respectivamente, enquanto  $\nabla$ ,  $\Delta$  e  $\text{Hess}$  denotam o gradiente, o laplaciano e o hessiano sobre  $M$ , respectivamente.

Denotamos por  $\nu$  um campo normal unitário ao longo de  $x$ , por  $\bar{N}$  o campo normal unitário de  $\partial B$  em  $B$  apontando para fora de  $B$  e por  $\mu$  o campo normal unitário de  $\partial M$  em  $M$  apontando para fora de  $M$ . Seja  $\bar{\nu}$  o campo normal unitário de  $\partial M$  em  $\partial B$  tal que as bases  $\{\nu, \mu\}$  e  $\{\bar{\nu}, \bar{N}\}$  têm a mesma orientação no fibrado normal de  $\partial M$  em  $\bar{M}$  (veja a Figura 2). Indicaremos por  $h$  e  $H$  a segunda forma fundamental e a curvatura média da imersão  $x$ , respectivamente. Mais precisamente,  $h(X, Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \nu, Y)$  e  $H = \text{tr}(h)$ . Para as hipersuperfícies com curvatura média constante, nós sempre escolhemos  $\nu$  de modo que a curvatura média seja não-negativa.

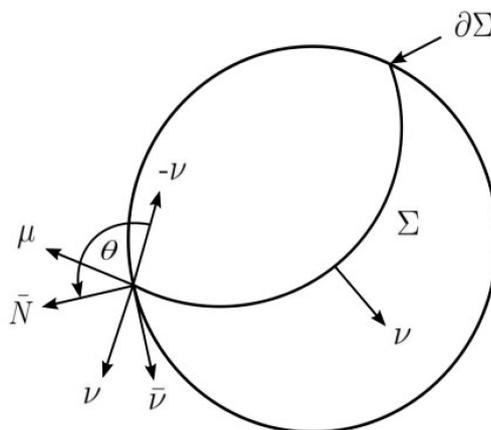


Figura 2 –  $\Sigma = x(M)$  e  $\partial\Sigma = x(\partial M)$

**Definição 3.1.1.** Uma **variação admissível** de  $x : M \rightarrow B$  é uma aplicação suave  $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow B$  tal que  $x(t, \cdot) : M \rightarrow B$  é uma imersão satisfazendo  $x(t, \text{int } M) \subset \text{int } B$  e  $x(t, \partial M) \subset \partial B$  para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  e  $x(0, \cdot) = x$ .

Para uma variação admissível de  $x$ , o **funcional área**  $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  e o **funcional volume**  $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  são definidos por

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_M dA_t, \\ V(t) &= \int_{[0,t] \times M} x^* dV_{\bar{M}}, \end{aligned}$$

onde  $dA_t$  é o elemento de área de  $M$  com respeito à métrica induzida por  $x(t, \cdot)$  e  $dV_{\bar{M}}$  é o elemento de volume de  $\bar{M}$ .

**Definição 3.1.2.** Uma variação  $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow B$  **preserva volume** se  $V(t) = V(0) = 0$  para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Outro funcional área  $W(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por

$$W(t) = \int_{[0,t] \times \partial M} x^* dA_{\partial B},$$

onde  $dA_{\partial B}$  é o elemento de área de  $\partial B$ . Este é chamado de **funcional wetting área**.

Fixe um número real  $\theta \in (0, \pi)$ . O **funcional energia**  $E(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por

$$E(t) = A(t) - \cos \theta W(t).$$

As fórmulas da primeira variação de  $V(t)$  e  $E(t)$  para uma variação admissível com campo variacional  $Y = \frac{\partial x}{\partial t}|_{t=0}$  são dadas por

$$\begin{aligned} V'(0) &= \int_M \bar{g}(Y, \nu) dA, \\ E'(0) &= \int_M H \bar{g}(Y, \nu) dA + \int_{\partial M} \bar{g}(Y, \mu - \cos \theta \bar{\nu}) ds, \end{aligned}$$

onde  $dA$  e  $ds$  são os elementos de área de  $M$  e  $\partial M$ , respectivamente. Ver (LÓPEZ, 2013).

**Definição 3.1.3.** Uma imersão  $x : M \rightarrow B$  é dita **capilar** se ela é ponto crítico do funcional energia  $E$  para qualquer variação admissível de  $x$  que preserva volume.

A seguinte proposição segue diretamente das fórmulas da primeira variação do volume e energia.

**Proposição 3.1.4.** *Uma imersão  $x$  é capilar se, e somente se,  $x$  tem curvatura média constante e  $\partial M$  intersecta  $\partial B$  em um ângulo  $\theta$  constante.*

Assumindo que  $x$  é capilar, temos que o ângulo entre  $-\nu$  e  $\bar{N}$  ao longo de  $\partial M$  é constante igual a  $\theta$ . Da mesma forma o ângulo entre  $\mu$  e  $\bar{\nu}$  é constante igual a  $\theta$ . Mais precisamente, no fibrado normal de  $\partial M$ , temos as seguintes relações:

$$\nu = \sin \theta \bar{\nu} - \cos \theta \bar{N}, \tag{3.1}$$

$$\mu = \cos \theta \bar{\nu} + \sin \theta \bar{N}. \tag{3.2}$$

**Proposição 3.1.5.** *Para cada função suave  $\varphi$  sobre  $M$  com  $\int_M \varphi dA_M = 0$  existe uma variação admissível de  $x$  que preserva volume cuja parte normal do campo variacional é dada por  $\varphi\nu$ .*

*Demonstração.* Ver (BARBOSA; DO CARMO, 1984). □

Denotando por  $D$  a derivada covariante em  $\bar{M}$  e por  $h^{\partial B}$  a segunda forma fundamental de  $\partial B$  em  $\bar{M}$ , temos o seguinte lema que nos auxiliará na demonstração da fórmula da segunda variação do funcional energia.

**Lema 3.1.6.** *Seja  $x : M \rightarrow B$  uma hipersuperfície capilar. Considere uma variação admissível  $x_t(\cdot) = x(t, \cdot)$  de  $x$  cuja parte normal do campo variacional  $Y = \frac{\partial x}{\partial t}|_{t=0}(t, \cdot)$  é dada por  $\varphi\nu$ ,  $\varphi \in C^\infty(M)$ . Sejam  $\nabla^{\partial M}\varphi$  o gradiente de  $\varphi|_{\partial M}$  e  $Y_0$  (respectivamente  $Y_1$ ) a parte tangente de  $Y$  em  $M$  (respectivamente  $\partial M$ ). Sejam também  $A$ ,  $A_1$  e  $A_2$  os operadores de Weingarten de  $M$  em  $\bar{M}$  com respeito a  $\nu$ , de  $\partial M$  em  $M$  com respeito a  $\mu$  e de  $\partial M$  em  $\partial B$  com respeito a  $\bar{\nu}$ , respectivamente. Então,*

- (1)  $\frac{D}{dt}|_{t=0}\nu_t = -\nabla\varphi + A(Y_0)$ ,
- (2)  $\frac{D}{dt}|_{t=0}\mu_t = (\nabla_\mu\varphi - h(Y_0, \mu))\nu - \varphi A(\mu) + \varphi h(\mu, \mu)\mu + A_1(Y_1) - \cotg\theta\nabla^{\partial M}\varphi$ ,
- (3)  $\frac{D}{dt}|_{t=0}\bar{\nu}_t = -h^{\partial B}(\bar{\nu}, Y)\bar{N} + A_2(Y_1) - \frac{1}{\text{sen}\theta}\nabla^{\partial M}\varphi$ .

*Demonstração.* Para provar o item (1), seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $T_pM$  para algum  $p \in M$  fixado. Considere  $e_i(t) = (dx_t)_p e_i$  e denote a derivada covariante ao longo da curva  $t \mapsto x(t, p)$  simplesmente por um apóstrofo '. Então, usando o fato que  $\nu$  tem norma um, temos

$$\begin{aligned} \langle \nu, \bar{\nabla}_{e_i} Y \rangle &= \langle \nu, \bar{\nabla}_{e_i}(Y_0 + \varphi\nu) \rangle \\ &= \langle \nu, \bar{\nabla}_{e_i} Y_0 + e_i(\varphi)\nu + \varphi \bar{\nabla}_{e_i} \nu \rangle \\ &= e_i(\varphi) + \langle \nu, \bar{\nabla}_{e_i} Y_0 \rangle. \end{aligned}$$

Seja  $Y_t = \frac{\partial x}{\partial t}(t, \cdot)$ . Como  $\langle \nu_t, e_i(t) \rangle = 0$  e  $[e_i(t), Y_t] = 0$  então, em  $t = 0$ , nós temos

$$\begin{aligned} \nu' &= \sum_{i=1}^n \langle \nu', e_i \rangle e_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle \nu, e_i' \rangle e_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle \nu, \bar{\nabla}_{e_i} Y \rangle e_i \\ &= -\sum_{i=1}^n e_i(\varphi) e_i - \sum_{i=1}^n \langle \nu, \bar{\nabla}_{e_i} Y_0 \rangle e_i \\ &= -\nabla\varphi + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{Y_0} \nu, e_i \rangle e_i \\ &= -\nabla\varphi + A(Y_0), \end{aligned}$$

o que demonstra o item (1). Como consequência, em  $t = 0$ ,

$$\langle \mu', \nu \rangle = -\langle \mu, \nu' \rangle = \langle \mu, \nabla \varphi \rangle - \langle \mu, A(Y_0) \rangle = \nabla_\mu \varphi - h(Y_0, \mu). \quad (3.3)$$

Seja agora  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  uma base ortonormal de  $T_q \partial M$  para algum  $q \in \partial M$  fixado. Novamente, considere  $v_i(t) = (dx_t)_q v_i$ . Observe que, ao longo de  $\partial M$ , nós temos

$$Y = \varphi \nu + Y_1 + \cotg \theta \varphi \mu.$$

Portanto, em  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mu', v_i \rangle &= -\langle \mu, v_i' \rangle \\ &= -\langle \mu, \bar{\nabla}_{v_i} Y \rangle \\ &= -\langle \mu, \bar{\nabla}_{v_i} (\varphi \nu + Y_1 + \cotg \theta \varphi \mu) \rangle \\ &= -\varphi \langle \mu, \bar{\nabla}_{v_i} \nu \rangle - \langle \mu, \bar{\nabla}_{v_i} Y_1 \rangle - \cotg \theta v_i(\varphi) \\ &= -\varphi \langle v_i, \bar{\nabla}_\mu \nu \rangle + \langle \bar{\nabla}_{Y_1} \mu, v_i \rangle - \cotg \theta v_i(\varphi) \\ &= -\varphi \langle A(\mu), v_i \rangle + \langle A_1(Y_1), v_i \rangle - \cotg \theta v_i(\varphi) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle \mu', v_i \rangle v_i = -\varphi A(\mu) + \varphi \langle A(\mu), \mu \rangle \mu + A_1(Y_1) - \cotg \theta \nabla^{\partial M} \varphi. \quad (3.4)$$

O item (2) segue de (3.3) e (3.4) e do fato que  $\langle \mu', \mu \rangle = 0$ . Para provar o item (3), observe que

$$Y = Y_1 + \frac{1}{\text{sen } \theta} \varphi \bar{\nu} \quad (3.5)$$

ao longo de  $\partial M$ . Portanto, em  $t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nu}', v_i \rangle &= -\langle \bar{\nu}, v_i' \rangle \\ &= -\langle \bar{\nu}, \bar{\nabla}_{v_i} Y \rangle \\ &= -\langle \bar{\nu}, \bar{\nabla}_{v_i} Y_1 \rangle - \frac{1}{\text{sen } \theta} v_i(\varphi) \\ &= \langle \bar{\nabla}_{Y_1} \bar{\nu}, v_i \rangle - \frac{1}{\text{sen } \theta} v_i(\varphi) \\ &= \langle A_2(Y_1), v_i \rangle - \frac{1}{\text{sen } \theta} v_i(\varphi). \end{aligned}$$

Assim, em  $t = 0$ ,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle \bar{\nu}', v_i \rangle v_i = A_2(Y_1) - \frac{1}{\text{sen } \theta} \nabla^{\partial M} \varphi. \quad (3.6)$$

Além disso, como  $\langle Y, \bar{N} \rangle = 0$  ao longo de  $\partial M$ , nós temos

$$\langle \bar{\nu}', \bar{N} \rangle = -\langle \bar{\nu}, \bar{N}' \rangle = -\langle \bar{\nu}, \bar{\nabla}_Y \bar{N} \rangle = -h^{\partial B}(\bar{\nu}, Y).$$

Portanto, o item (3) segue da última equação acima juntamente com (3.6).  $\square$

**Proposição 3.1.7** (Fórmula da Segunda Variação da Energia). *Dadas uma hipersuperfície capilar  $x : M \rightarrow B$  e uma variação admissível de  $x$  que preserva volume,  $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow B$ , cuja parte normal do campo variacional  $Y = \frac{\partial x}{\partial t}|_{t=0}$  é dada por  $\varphi\nu$ , temos que*

$$E''(0) = \int_M -\varphi(\Delta\varphi + (\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + |h|^2)\varphi)dA + \int_{\partial M} \varphi(\nabla_\mu\varphi - q\varphi)ds, \quad (3.7)$$

onde

$$q = \frac{1}{\text{sen } \theta} h^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cotg \theta h(\mu, \mu).$$

*Demonstração.* Sabemos que

$$E'(t) = \int_M H(t)\langle Y_t, \nu_t \rangle dA_t + \int_{\partial M} \langle Y_t, \mu_t - \cos \theta \nu_t \rangle ds_t,$$

onde  $Y_t = \frac{\partial x}{\partial t}(t, \cdot)$ . Assim,

$$\begin{aligned} E''(0) &= \int_M H'(0)\varphi dA + H \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \int_M \langle Y_t, \nu_t \rangle dA_t \right) \\ &+ \int_{\partial M} \left\langle \frac{D}{dt} \Big|_{t=0} Y_t, \mu - \cos \theta \bar{\nu} \right\rangle ds + \int_{\partial M} \left\langle Y, \frac{D}{dt} \Big|_{t=0} (\mu_t - \cos \theta \bar{\nu}_t) \right\rangle ds \\ &+ \int_{\partial M} \langle Y, \mu - \cos \theta \bar{\nu} \rangle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ds_t. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \int_M \langle Y_t, \nu_t \rangle dA_t \right) = V''(0) = 0$$

e que  $\langle Y, \mu - \cos \theta \bar{\nu} \rangle = 0$ , pois  $Y$  é tangente a  $\partial B$  ao longo de  $\partial M$  e  $\mu - \cos \theta \bar{\nu} = \text{sen } \theta \bar{N}$ .

Como

$$H'(0) = -\left( \Delta\varphi + (\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + |h|^2)\varphi \right),$$

ver (AMBROZIO, 2015). Precisamos calcular apenas

$$\int_{\partial M} \left\langle \frac{D}{dt} \Big|_{t=0} Y_t, \mu - \cos \theta \bar{\nu} \right\rangle ds + \int_{\partial M} \left\langle Y, \frac{D}{dt} \Big|_{t=0} (\mu_t - \cos \theta \bar{\nu}_t) \right\rangle ds.$$

Combinando os itens (2) e (3) do lema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \langle Y, \mu' - \cos \theta \bar{\nu}' \rangle &= \varphi \nabla_\mu \varphi - \varphi h(Y_0, \mu) - \varphi \langle A(\mu), Y \rangle \\ &+ \varphi h(\mu, \mu) \langle \mu, Y \rangle + \langle A_1(Y_1), Y \rangle - \cotg \theta \langle \nabla^{\partial M} \varphi, Y \rangle \\ &- \cos \theta \left( \langle A_2(Y_1), Y \rangle - \frac{1}{\text{sen } \theta} \langle \nabla^{\partial M} \varphi, Y \rangle \right) \\ &= \varphi \nabla_\mu \varphi - 2\varphi h(Y_0, \mu) + \varphi h(\mu, \mu) \langle \mu, Y \rangle + \langle A_1(Y_1) - \cos \theta A_2(Y_1), Y_1 \rangle \\ &= \varphi \nabla_\mu \varphi - 2\varphi h(Y_0, \mu) + \varphi h(\mu, \mu) \langle \mu, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_{Y_1}(\mu - \cos \bar{\nu}), Y_1 \rangle. \end{aligned}$$

Usando que  $\langle \mu, Y \rangle = \cotg \theta \varphi$  e que  $\mu - \cos \theta \bar{\nu} = \text{sen } \theta \bar{N}$ , nós temos

$$\langle Y, \mu' - \cos \theta \bar{\nu}' \rangle = \varphi \nabla_\mu \varphi - 2\varphi h(Y_0, \mu) + \varphi^2 \cotg \theta h(\mu, \mu) + \text{sen } \theta h^{\partial B}(Y_1, Y_1). \quad (3.8)$$

Além disso, a relação  $Y_0 = Y_1 + \cotg \theta \varphi \mu$  implica que

$$h(Y_0, \mu) = h(Y_1, \mu) + \cotg \theta \varphi h(\mu, \mu).$$

Substituindo essa última equação em (3.8), obtemos

$$\langle Y, \mu' - \cos \theta \bar{\nu}' \rangle = \varphi \nabla_\mu \varphi - 2\varphi h(Y_1, \mu) - \varphi^2 \cotg \theta h(\mu, \mu) + \sen \theta h^{\partial B}(Y_1, Y_1). \quad (3.9)$$

Por outro lado,  $\langle Y', \mu - \cos \theta \bar{\nu} \rangle = \sen \theta \langle \bar{\nabla}_Y Y, \bar{N} \rangle = -\sen \theta \langle Y, \bar{\nabla}_Y \bar{N} \rangle = -\sen \theta h^{\partial B}(Y, Y)$ .

Usando (3.5), temos que

$$h^{\partial B}(Y, Y) = h^{\partial B}(Y_1, Y_1) + \frac{2}{\sen \theta} \varphi h^{\partial B}(Y_1, \bar{\nu}) + \frac{1}{\sen^2 \theta} \varphi^2 h^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}). \quad (3.10)$$

Usando (3.1) e (3.2), é fácil verificar que

$$h(Y_1, \mu) + h^{\partial B}(Y_1, \bar{\nu}) = 0. \quad (3.11)$$

Desta forma, segue de  $\langle Y', \mu - \cos \theta \bar{\nu} \rangle = -\sen \theta h^{\partial B}(Y, Y)$ , juntamente com (3.9), (3.10) e (3.11), que

$$\begin{aligned} \langle Y', \mu - \cos \theta \bar{\nu} \rangle + \langle Y, \mu' - \cos \theta \bar{\nu}' \rangle &= \varphi \nabla_\mu \varphi - \varphi^2 \cotg \theta h(\mu, \mu) - \frac{1}{\sen \theta} \varphi^2 h^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) \\ &= \varphi (\nabla_\mu \varphi - q\varphi), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

**Definição 3.1.8.** Uma hipersuperfície capilar  $x$  é dita **estável** se  $E''(0) \geq 0$  para toda variação admissível de  $x$  que preserva volume.

Segue da Proposição 3.1.5 e da Fórmula da Segunda Variação da Energia, juntamente com o Teorema da Divergência, que uma hipersuperfície capilar  $x : M \rightarrow B$  é estável se, e somente se,

$$\int_M (|\nabla \varphi|^2 - (\text{Ric}(\nu, \nu) + |h|^2)\varphi^2) dA - \int_{\partial M} q\varphi^2 ds \geq 0$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{F} := \{\varphi \in C^\infty(M) \mid \int_M \varphi dA = 0\}$ . Esta é conhecida como **Desigualdade de Estabilidade** para hipersuperfícies capilares.

Podemos então mostrar que os discos totalmente geodésicos e as calotas esféricas na bola euclidiana são capilares estáveis.

**Proposição 3.1.9.** *Seja  $\bar{\mathbb{B}} \subset \mathbb{R}^3$  uma bola euclidiana unitária fechada. Então os discos totalmente geodésicos e as calotas esféricas em  $\bar{\mathbb{B}}$  com bordo em  $\partial \bar{\mathbb{B}}$  são capilares estáveis.*

*Demonstração.* Seja  $\Sigma$  um disco totalmente geodésico ou uma calota esférica em  $\bar{\mathbb{B}}$  com bordo em  $\partial \bar{\mathbb{B}}$ . Suponha que  $\Sigma$  é um disco totalmente geodésico e sejam  $R$  o seu raio e  $\theta$  o ângulo de contato entre  $\Sigma$  e  $\partial \bar{\mathbb{B}}$ , que é o ângulo entre  $\bar{N}$  e  $-\nu$ . Podemos ver facilmente

que  $\text{sen } \theta = R$ . Portanto, como  $h$  é identicamente nula e  $h^{\partial\bar{\mathbb{B}}} = 1$ , dizer que  $\Sigma$  é estável equivale a dizer que

$$\int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 dA \geq \frac{1}{R} \int_{\partial\Sigma} \varphi^2 ds,$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{F}$ . Considere a bola  $\bar{\mathbb{B}}'$  de raio  $R$  que contém  $\Sigma$ , ou seja,  $\Sigma$  é um disco totalmente geodésico que passa pela origem de  $\bar{\mathbb{B}}'$  e intersecta  $\partial\bar{\mathbb{B}}'$  ortogonalmente. Sabemos que  $\Sigma$  é estável em  $\bar{\mathbb{B}}'$ , ver (ROS; VERGASTA, 1995). Assim, como  $h^{\partial\bar{\mathbb{B}}'} = \frac{1}{R}$ , nós temos que

$$\int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 dA \geq \frac{1}{R} \int_{\partial\Sigma} \varphi^2 ds,$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{F}$ . Portanto,  $\Sigma$  é estável em  $\bar{\mathbb{B}}$ . Agora, suponha que  $\Sigma$  é uma calota esférica. Sejam  $R$  o raio da esfera que contém  $\Sigma$  e  $\theta$  o ângulo entre  $\Sigma$  e  $\bar{\mathbb{B}}$ . Considere o plano  $\pi$  que contém  $\partial\Sigma$  e denote por  $\theta'$  o ângulo de contato entre  $\Sigma$  e  $\pi$ . Sabemos que  $\Sigma$  é uma superfície capilar estável no semiespaço determinado por  $\pi$  e que contém  $\Sigma$ , ver (GONZALEZ; MASSARI; TAMANINI, 1980). Portanto, como  $|h|^2 = \frac{2}{R^2}$  e  $h(\mu, \mu) = \frac{1}{R}$ , temos que

$$\int_{\Sigma} \left( |\nabla\varphi|^2 - \frac{2}{R^2} \varphi^2 \right) dA \geq \frac{\cotg \theta'}{R} \int_{\partial\Sigma} \varphi^2 ds, \quad (3.12)$$

para cada  $\varphi \in \mathcal{F}$ . Por outro lado, não é difícil demonstrar que

$$\frac{\cotg \theta'}{R} = \frac{1}{\text{sen } \theta} + \frac{\cotg \theta}{R}. \quad (3.13)$$

Assim, substituindo (3.13) em (3.12), obtemos

$$\int_{\Sigma} \left( |\nabla\varphi|^2 - \frac{2}{R^2} \varphi^2 \right) dA \geq \left( \frac{1}{\text{sen } \theta} + \frac{\cotg \theta}{R} \right) \int_{\partial\Sigma} \varphi^2 ds,$$

para cada  $\varphi \in \mathcal{F}$ . Portanto,  $\Sigma$  é capilar estável em  $\bar{\mathbb{B}}$ .  $\square$

A proposição a seguir é importante para o estudo de hipersuperfícies capilares em  $B$  quando  $\partial B$  é totalmente umbílica.

**Proposição 3.1.10.** *Suponha que  $\partial B$  é totalmente umbílica em  $B$ . Se  $x : M \rightarrow B$  é uma imersão cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial B$  em um ângulo constante  $\theta$ , então  $\mu$  é uma direção principal de  $M$  em  $B$  ao longo de  $\partial M$ , ou seja,  $\bar{\nabla}_{\mu}\nu = h(\mu, \mu)\mu$ .*

*Demonstração.* Para cada  $e \in \mathfrak{X}(\partial M)$ , usando (3.1) e (3.2), nós temos

$$\begin{aligned} h(e, \mu) &= \langle \bar{\nabla}_e \nu, \mu \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_e (-\cos \theta \bar{N} + \text{sen } \theta \bar{\nu}), \text{sen } \theta \bar{N} + \cos \theta \bar{\nu} \rangle \\ &= -\langle \bar{\nabla}_e \bar{N}, \bar{\nu} \rangle \\ &= -h^{\partial B}(e, \bar{\nu}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Na última igualdade acima usamos o fato de  $\partial B$  ser umbílica em  $B$ . Logo,

$$\bar{\nabla}_\mu \nu = \langle \bar{\nabla}_\mu \nu, \mu \rangle \mu = h(\mu, \mu) \mu.$$

□

**Proposição 3.1.11.** *Sejam  $x : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  uma imersão isométrica e  $f = \langle \nu, X \rangle$ , onde  $X$  é um campo conforme. Então, vale a seguinte equação:*

$$\Delta f = X^T(H) - f(\text{Ric}(\nu, \nu) + |h|^2) + H\psi_X - n\nu(\psi_X). \quad (3.14)$$

*Demonstração.* Fixe  $p \in M$  e seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal sobre um aberto  $U \subset M$ , geodésico em  $p \in U$ , ou seja,  $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ . Estenda os campos  $\{e_1, \dots, e_n\}$  a uma vizinhança de  $p$  em  $\bar{M}$  de maneira que  $(\bar{\nabla}_\nu e_i)(p) = 0$  e escreva

$$X = \alpha_l e_l + f\nu$$

sobre  $U$ . Aqui e ao longo de toda a demonstração estaremos usando a notação de Einstein, de maneira que índices repetidos estarão sendo somados. Então, em  $p$ , nós temos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta \langle \nu, X \rangle \\ &= e_k e_k \langle \nu, X \rangle \\ &= e_k (\langle \bar{\nabla}_{e_k} \nu, X \rangle + \langle \nu, \bar{\nabla}_{e_k} X \rangle) \\ &= e_k \langle Ae_k, X \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_k} \nu, \bar{\nabla}_{e_k} X \rangle + \langle \nu, \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_k} X \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_k} (Ae_k), X \rangle + 2\langle \bar{\nabla}_{e_k} \nu, \bar{\nabla}_{e_k} X \rangle + \langle \nu, \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_k} X \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Agora, escreva  $Ae_k = a_{kl} e_l$  e observe que, em  $p$ , valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{e_k} (Ae_k), X \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_k} (a_{kl} e_l), X \rangle \\ &= \langle e_k (a_{kl}) e_l + a_{kl} \bar{\nabla}_{e_k} e_l, X \rangle \\ &= \alpha_l e_k (a_{kl}) + a_{kl} \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_l, \nu \rangle f \\ &= \alpha_l e_k (a_{kl}) - a_{kl}^2 f \\ &= \alpha_l e_k (a_{kl}) - |h|^2 f. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que  $e_1, \dots, e_n$  são autovetores de  $A$  no ponto  $p$  com autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , respectivamente. Portanto,

$$\langle \bar{\nabla}_{e_k} \nu, \bar{\nabla}_{e_k} X \rangle = \langle Ae_k, \bar{\nabla}_{e_k} X \rangle = \lambda_k \langle e_k, \bar{\nabla}_{e_k} X \rangle = H\psi_X. \quad (3.17)$$

Para calcular  $\langle \nu, \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_k} X \rangle$ , note que

$$\langle \bar{\nabla}_{e_k} X, \nu \rangle + \langle \bar{\nabla}_\nu X, e_k \rangle = 2\psi_X \langle e_k, \nu \rangle = 0. \quad (3.18)$$

Assim, derivando (3.18), temos

$$\langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_k} X, \nu \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_k} X, \bar{\nabla}_{e_k} \nu \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_\nu X, e_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_\nu X, \bar{\nabla}_{e_k} e_k \rangle = 0. \quad (3.19)$$

Como

$$\langle \bar{\nabla}_\nu X, \bar{\nabla}_{e_k} e_k \rangle = \langle \bar{\nabla}_\nu X, \nu \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_k, \nu \rangle = -\psi_X \langle e_k, \bar{\nabla}_{e_k} \nu \rangle = -\psi_X \sum_{k=1}^n \lambda_k = -\psi_X H, \quad (3.20)$$

segue de (3.20) e (3.17) que a equação (3.19) assume a forma

$$\langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_k} X, \nu \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_\nu X, e_k \rangle. \quad (3.21)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_\nu X, e_k \rangle &= \langle R(e_k, \nu)X, e_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_{e_k} X, e_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[e_k, \nu]} X, e_k \rangle \\ &= \bar{\text{Ric}}(\nu, X) + \nu \langle \bar{\nabla}_{e_k} X, e_k \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_k} X, \bar{\nabla}_\nu e_k \rangle \\ &\quad + \langle \bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_{e_k} \nu} X, e_k \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{\nabla}_\nu e_k} X, e_k \rangle \\ &= \bar{\text{Ric}}(\nu, X) + n\nu(\psi_X) + \lambda_k \langle \bar{\nabla}_{e_k} X, e_k \rangle \\ &= \bar{\text{Ric}}(\nu, X) + n\nu(\psi_X) + H\psi_X. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Tudo isto no ponto  $p$ . Usando que  $[e_l, e_k] = 0$  em  $p$ , nós temos

$$\begin{aligned} \bar{\text{Ric}}(\nu, X) &= \bar{\text{Ric}}(\nu, \alpha_l e_l + f\nu) \\ &= f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \alpha_l \bar{\text{Ric}}(\nu, e_l) \\ &= f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \alpha_l \langle R(e_l, e_k)e_k, \nu \rangle \\ &= f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \alpha_l \langle \bar{\nabla}_{e_l} \bar{\nabla}_{e_k} e_k, \nu \rangle - \alpha_l \langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_l} e_k, \nu \rangle \\ &= f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + \alpha_l e_l \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_k, \nu \rangle - \alpha_l \langle \bar{\nabla}_{e_k} e_k, \bar{\nabla}_{e_l} \nu \rangle \\ &\quad - \alpha_l e_k \langle \bar{\nabla}_{e_l} e_k, \nu \rangle + \alpha_l \langle \bar{\nabla}_{e_l} e_k, \bar{\nabla}_{e_k} \nu \rangle \\ &= f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) - \alpha_l e_l \langle e_k, Ae_k \rangle + \alpha_l e_k \langle e_k, Ae_l \rangle \\ &= f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) - X^T(H) + \alpha_l e_k(a_{lk}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Substituindo (3.22) e (3.23) em (3.21), obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_k} X, \nu \rangle = X^T(H) - \alpha_l e_k(a_{kl}) - f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) - H\psi_X - n\nu(\psi_X). \quad (3.24)$$

Portanto, substituindo (3.16), (3.17) e (3.24) em (3.15), obtemos

$$\Delta f = X^T(H) - f(\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + |h|^2) + H\psi_X - n\nu(\psi_X).$$

□

## 4 Hipersuperfícies Capilares em uma Bola Euclidiana

Este capítulo está baseado no trabalho de G. Wang e C. Xia ([WANG; XIA, 2019](#)).

Neste capítulo, consideraremos  $\bar{M}^{n+1}$  como sendo o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$ , de dimensão  $n + 1 \geq 3$ , munido da métrica canônica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $B$  como sendo a bola fechada unitária  $\bar{\mathbb{B}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  centrada na origem. Vamos denotar por  $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Além disso, as coordenadas de um campo  $X$  na base canônica serão denotadas por  $X_1, \dots, X_{n+1}$ .

### 4.1 Uma Nova Fórmula do Tipo Minkowski

Nesta seção, estabeleceremos uma fórmula do tipo Minkowski, a qual será de grande importância para o estudo de hipersuperfícies capilares em  $\bar{\mathbb{B}}$ .

Inicialmente, definiremos uma família de campos conformes em  $\mathbb{R}^{n+1}$  cujas restrições a  $\partial\bar{\mathbb{B}}$  serão tangentes a  $\partial\bar{\mathbb{B}}$ .

De fato, para cada campo constante  $a$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , defina o campo  $X_a$  por

$$X_a = \langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a, \quad (4.1)$$

onde  $x$  é a posição em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Proposição 4.1.1.**  $X_a$  é um campo conforme e sua restrição a  $\partial\bar{\mathbb{B}}$  é tangente a  $\partial\bar{\mathbb{B}}$ . De fato,  $X_a$  satisfaz

$$\frac{1}{2}[\langle \bar{\nabla}_{E_i} X_a, E_j \rangle + \langle \bar{\nabla}_{E_j} X_a, E_i \rangle] = \langle x, a \rangle \delta_{ij}, \quad (4.2)$$

$$\langle X_a, x \rangle|_{\partial\bar{\mathbb{B}}} = 0. \quad (4.3)$$

*Demonstração.* Observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(\bar{\nabla}_i X_a)_j + (\bar{\nabla}_j X_a)_i] &= \frac{1}{2}[\langle \bar{\nabla}_{E_i} (\langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a), E_j \rangle \\ &\quad + \langle \bar{\nabla}_{E_j} (\langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a), E_i \rangle] \\ &= \frac{1}{2}[\langle E_i, a \rangle \langle x, E_j \rangle + \langle x, a \rangle \langle E_i, E_j \rangle - \langle E_i, x \rangle \langle a, E_j \rangle \\ &\quad + \langle E_j, a \rangle \langle x, E_i \rangle + \langle x, a \rangle \langle E_j, E_i \rangle - \langle E_j, x \rangle \langle a, E_i \rangle] \\ &= \langle x, a \rangle \delta_{ij}, \end{aligned}$$

o que demonstra a primeira afirmação.

Para demonstrar a segunda afirmação, basta observar que  $|x|^2 = 1$  sobre  $\partial\bar{\mathbb{B}}$ . Portanto,  $X_a|_{\partial\bar{\mathbb{B}}} = \langle x, a \rangle x - a$ , o que implica  $\langle X_a, x \rangle|_{\partial\bar{\mathbb{B}}} = \langle x, a \rangle - \langle a, x \rangle = 0$ .  $\square$

**Lema 4.1.2.** *Sejam  $x : M^n \rightarrow \bar{\mathbb{B}}$  uma imersão isométrica cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial\bar{\mathbb{B}}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$  e  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante. Então, vale a seguinte relação:*

$$n \int_M \langle \nu, a \rangle dA = \int_{\partial M} \langle \bar{\nu}, a \rangle ds.$$

*Demonstração.* Defina  $Z_a = \langle \nu, a \rangle x - \langle x, \nu \rangle a$  sobre  $M$  e observe que  $Z_a \in \mathfrak{X}(M)$ . Considere um referencial ortonormal local  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em  $M$ . Temos então que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M Z_a &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} Z_a, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} (\langle \nu, a \rangle x - \langle x, \nu \rangle a), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, a \rangle \langle x, e_i \rangle + \langle \nu, a \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} x, e_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} x, \nu \rangle \langle a, e_i \rangle - \langle x, \bar{\nabla}_{e_i} \nu \rangle \langle a, e_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{a^T} \nu, e_i \rangle \langle x^T, e_i \rangle + \langle \nu, a \rangle - \langle e_i, \nu \rangle \langle a, e_i \rangle - \langle e_i, \bar{\nabla}_{x^T} \nu \rangle \langle a^T, e_i \rangle) \\ &= h(a^T, x^T) + n \langle \nu, a \rangle - h(x^T, a^T) \\ &= n \langle \nu, a \rangle. \end{aligned}$$

Lembrando que  $\bar{N} = x|_{\partial\bar{\mathbb{B}}}$ , segue das equações (3.1) e (3.2) que, sobre  $\partial M$ , vale o seguinte:

$$\begin{aligned} \langle Z_a, \mu \rangle &= \langle \nu, a \rangle \langle x, \mu \rangle - \langle \nu, x \rangle \langle a, \mu \rangle \\ &= \langle \sin \theta \bar{\nu} - \cos \theta \bar{N}, a \rangle \sin \theta + \cos \theta \langle \cos \theta \bar{\nu} + \sin \theta \bar{N}, a \rangle \\ &= \langle \bar{\nu}, a \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, segue das equações acima, juntamente com o Teorema da Divergência, que

$$n \int_M \langle \nu, a \rangle dA = \int_M \operatorname{div}_M Z_a dA = \int_{\partial M} \langle Z_a, \mu \rangle ds = \int_{\partial M} \langle \bar{\nu}, a \rangle ds,$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

**Proposição 4.1.3** (Fórmula do tipo Minkowski). *Seja  $x : M^n \rightarrow \bar{\mathbb{B}}$  uma imersão isométrica cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial\bar{\mathbb{B}}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Considere  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante e  $X_a$  o campo definido por (4.1). Então, vale o seguinte:*

$$n \int_M \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle dA = \int_M H \langle X_a, \nu \rangle dA. \quad (4.4)$$

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal local em  $M$ . Observe que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{e_i} (X_a^T), e_i \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} (X_a - \langle X_a, \nu \rangle \nu), e_i \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_i \rangle - \langle X_a, \nu \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, segue de (4.2) que

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} X_a, e_i \rangle = \langle x, a \rangle.$$

Portanto,

$$\operatorname{div}_M(X_a^T) = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i}(X_a^T), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n (\langle x, a \rangle - \langle X_a, \nu \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \nu, e_i \rangle) = n \langle x, a \rangle - H \langle X_a, \nu \rangle.$$

Agora, segue das equações (3.2) e (4.3) que, sobre  $\partial M$ , valem

$$\begin{aligned} \langle X_a^T, \mu \rangle &= \langle X_a, \mu \rangle \\ &= \langle X_a, \cos \theta \bar{\nu} + \operatorname{sen} \theta \bar{N} \rangle \\ &= \cos \theta \langle X_a, \bar{\nu} \rangle \\ &= \cos \theta (\langle x, a \rangle \langle x, \bar{\nu} \rangle - \langle a, \bar{\nu} \rangle) \\ &= -\cos \theta \langle a, \bar{\nu} \rangle. \end{aligned}$$

Assim, fazendo uso do Teorema da Divergência, juntamente com o Lema 4.1.2, segue das relações acima que

$$\begin{aligned} \int_M (n \langle x, a \rangle - H \langle X_a, \nu \rangle) dA &= \int_M \operatorname{div}_M(X_a^T) dA \\ &= \int_{\partial M} \langle X_a^T, \mu \rangle ds \\ &= -\cos \theta \int_{\partial M} \langle a, \bar{\nu} \rangle ds \\ &= -n \cos \theta \int_M \langle \nu, a \rangle dA, \end{aligned}$$

o que garante o resultado.  $\square$

Essa fórmula do tipo Minkowski (4.4) será fundamental na demonstração da unicidade de hipersuperfícies capilares estáveis na bola euclidiana, que veremos na próxima seção.

## 4.2 Unicidade de Hipersuperfícies Capilares Estáveis em uma Bola Euclidiana

**Proposição 4.2.1.** *Sejam  $x : M^n \rightarrow \bar{\mathbb{B}}$  uma imersão isométrica cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial \bar{\mathbb{B}}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$  e  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante. Então, ao longo de  $\partial M$ , nós temos*

$$\bar{\nabla}_\mu \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle = q \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle, \quad (4.5)$$

$$\bar{\nabla}_\mu \langle X_a, \nu \rangle = q \langle X_a, \nu \rangle, \quad (4.6)$$

onde  $q = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} + \cotg \theta h(\mu, \mu)$ .

*Demonstração.* Segue da Proposição 3.1.10, que

$$\bar{\nabla}_\mu \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle = \langle \mu + \cos \theta h(\mu, \mu) \mu, a \rangle = q \operatorname{sen} \theta \langle \mu, a \rangle.$$

Por outro lado, usando as equações (3.1) e (3.2), nós temos

$$\begin{aligned} \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle &= \langle \bar{N} + \cos \theta (\operatorname{sen} \theta \bar{\nu} - \cos \theta \bar{N}), a \rangle \\ &= \operatorname{sen} \theta \langle \cos \theta \bar{\nu} + \operatorname{sen} \theta \bar{N}, a \rangle \\ &= \operatorname{sen} \theta \langle \mu, a \rangle \end{aligned}$$

sobre  $\partial M$ . Portanto,  $\bar{\nabla}_\mu \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle = q \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle$ , o que demonstra a primeira afirmação.

Agora, usando a definição de  $X_a$  dada pela equação (4.1) e novamente a Proposição 3.1.10, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\mu \langle X_a, \nu \rangle &= \langle \bar{\nabla}_\mu X_a, \nu \rangle + \langle X_a, \bar{\nabla}_\mu \nu \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_\mu (\langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a), \nu \rangle + h(\mu, \mu) \langle X_a, \mu \rangle \\ &= \langle \langle \mu, a \rangle x + \langle x, a \rangle \mu - \langle x, \mu \rangle a, \nu \rangle + h(\mu, \mu) \langle \langle x, a \rangle x - a, \mu \rangle \\ &= -\cos \theta \langle \mu, a \rangle - \operatorname{sen} \theta \langle \nu, a \rangle + h(\mu, \mu) (\operatorname{sen} \theta \langle x, a \rangle - \langle \mu, a \rangle). \end{aligned}$$

Acima nós usamos mais uma vez as equações (3.1) e (3.2) juntamente com  $x|_{\partial \mathbb{B}} = \bar{N}$  e  $X_a|_{\partial \mathbb{B}} = \langle x, a \rangle x - a$ . Note que  $\bar{N} = \operatorname{sen} \theta \mu - \cos \theta \nu$ , ou seja,  $\mu = \operatorname{cosec} \theta \bar{N} + \cotg \theta \nu$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_\mu \langle X_a, \nu \rangle &= -(\cos \theta \operatorname{cosec} \theta - \operatorname{sen} \theta h(\mu, \mu) + \operatorname{cosec} \theta h(\mu, \mu)) \langle x, a \rangle \\ &\quad - (\cos \theta \cotg \theta + \operatorname{sen} \theta + \cotg \theta h(\mu, \mu)) \langle \nu, a \rangle \\ &= -\cotg \theta (1 + \cos \theta h(\mu, \mu)) \langle x, a \rangle - \operatorname{cosec} \theta (1 + \cos \theta h(\mu, \mu)) \langle \nu, a \rangle \\ &= -q(\cos \theta \langle x, a \rangle + \langle \nu, a \rangle). \end{aligned}$$

Além disso, sobre o bordo de  $M$ , nós temos

$$\langle X_a, \nu \rangle = \langle x, a \rangle \langle x, \nu \rangle - \langle a, \nu \rangle = -(\cos \theta \langle x, a \rangle + \langle \nu, a \rangle).$$

Portanto,  $\bar{\nabla}_\mu \langle X_a, \nu \rangle = q \langle X_a, \nu \rangle$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

**Proposição 4.2.2.** *Sejam  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica e  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante. Então, valem as seguintes identidades sobre  $M$ :*

$$\Delta x = -H\nu, \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{2} \Delta |x|^2 = n - H \langle x, \nu \rangle, \tag{4.8}$$

$$\Delta \nu = \nabla H - |h|^2 \nu, \tag{4.9}$$

$$\Delta \langle x, \nu \rangle = \langle x, \nabla H \rangle + H - |h|^2 \langle x, \nu \rangle, \tag{4.10}$$

$$\Delta \langle \nu, X_a \rangle = \langle \nabla H, X_a \rangle - |h|^2 \langle X_a, \nu \rangle + H \langle x, a \rangle - n \langle \nu, a \rangle. \tag{4.11}$$

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal definido em uma vizinhança de  $p \in M$ , o qual é geodésico em  $p$ , ou seja,  $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ . Portanto, em  $p$ , nós temos

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \sum_{j=1}^n e_j(e_j(x_i)) = \sum_{j=1}^n e_j(e_j \langle x, E_i \rangle) = \sum_{j=1}^n e_j \langle \bar{\nabla}_{e_j} x, E_i \rangle = \sum_{j=1}^n e_j \langle e_j, E_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_j} e_j, E_i \rangle = \sum_{j=1}^n (\langle \nabla_{e_j} e_j, E_i \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_j} e_j, \nu \rangle \langle \nu, E_i \rangle) = - \sum_{j=1}^n \langle e_j, \bar{\nabla}_{e_j} \nu \rangle \langle \nu, E_i \rangle \\ &= -H \langle \nu, E_i \rangle, \end{aligned}$$

donde

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{n+1} (\Delta x_i) E_i = -H \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nu, E_i \rangle E_i = -H \nu,$$

o que demonstra (4.7).

Para provar (4.8), vamos mostrar que  $\langle \nabla x, \nabla x \rangle = n$  e utilizar (4.7). Observe que

$$\nabla x_j = \sum_{i=1}^n e_i(x_j) e_i = \sum_{i=1}^n e_i \langle x, E_j \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} x, E_j \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle e_i, E_j \rangle e_i.$$

Assim,

$$\langle \nabla x, \nabla x \rangle = \sum_{j=1}^{n+1} \langle \nabla x_j, \nabla x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} \langle e_i, E_j \rangle^2 = n.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \Delta |x|^2 = \frac{1}{2} \Delta \langle x, x \rangle = \langle x, \Delta x \rangle + \langle \nabla x, \nabla x \rangle = \langle \nabla x, \nabla x \rangle - H \langle x, \nu \rangle = n - H \langle x, \nu \rangle.$$

Seja  $\nu_j = \langle \nu, E_j \rangle$ . Como  $E_j$  é um campo de Killing, segue da Proposição 3.1.11 que

$$\Delta \nu_j = \langle \nabla H, E_j \rangle - |h|^2 \nu_j.$$

Portanto,

$$\Delta \nu = \sum_{j=1}^{n+1} (\Delta \nu_j) E_j = \sum_{j=1}^{n+1} (\langle \nabla H, E_j \rangle - |h|^2 \nu_j) E_j = \nabla H - |h|^2 \nu.$$

Isto demonstra (4.9).

Agora, sendo  $\bar{\nabla}_{e_i} x = e_i$  temos que  $x$  é conforme com fator conforme  $\psi_x = 1$ , então pela proposição 3.1.11 temos que

$$\Delta \langle x, \nu \rangle = \langle x, \nabla H \rangle + H - |h|^2 \langle x, \nu \rangle.$$

De acordo com (4.2),  $X_a$  é um campo conforme com fator conforme  $\psi_{X_a} = \langle x, a \rangle$ . Assim, segue da Proposição 3.1.11 que

$$\Delta \langle X_a, \nu \rangle = \langle X_a, \nabla H \rangle - |h|^2 \langle X_a, \nu \rangle + H \langle x, a \rangle - n \nu \langle x, a \rangle,$$

o que garante (4.11), pois  $\nu \langle x, a \rangle = \langle \nu, a \rangle$ .

□

**Proposição 4.2.3.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \bar{\mathbb{B}}$  uma imersão isométrica cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial \bar{\mathbb{B}}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Para cada campo constante  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ , defina*

$$\varphi_a = n\langle x + \cos \theta \nu, a \rangle - H\langle X_a, \nu \rangle$$

sobre  $M$ . Então,  $\varphi_a$  satisfaz

$$\int_M \varphi_a dA = 0. \quad (4.12)$$

Além disso, se  $M$  possui curvatura média constante, então

$$\nabla_\mu \varphi_a - q\varphi_a = 0, \quad (4.13)$$

$$\Delta \varphi_a + |h|^2 \varphi_a = (n|h|^2 - H^2)\langle x, a \rangle. \quad (4.14)$$

*Demonstração.* A identidade (4.12) segue diretamente da Proposição 4.1.3. Por outro lado, se  $H$  é constante, segue da Proposição 4.2.1 que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \varphi_a &= \nabla_\mu (n\langle x + \cos \theta \nu, a \rangle - H\langle X_a, \nu \rangle) \\ &= n\nabla_\mu \langle x + \cos \theta \nu, a \rangle - H\nabla_\mu \langle X_a, \nu \rangle \\ &= nq\langle x + \cos \theta \nu, a \rangle - Hq\langle X_a, \nu \rangle \\ &= q\varphi_a, \end{aligned}$$

o que demonstra (4.13). Finalmente, segue da Proposição 4.2.2 que

$$\begin{aligned} (\Delta + |h|^2)\langle x, a \rangle &= -H\langle \nu, a \rangle + |h|^2\langle x, a \rangle, \\ (\Delta + |h|^2)\langle \nu, a \rangle &= 0, \\ (\Delta + |h|^2)\langle X_a, \nu \rangle &= H\langle x, a \rangle - n\langle \nu, a \rangle. \end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_a + |h|^2 \varphi_a &= (\Delta + |h|^2)(n\langle x + \cos \theta \nu, a \rangle - H\langle X_a, \nu \rangle) \\ &= n(\Delta + |h|^2)\langle x, a \rangle + n \cos \theta (\Delta + |h|^2)\langle \nu, a \rangle - H(\Delta + |h|^2)\langle X_a, \nu \rangle \\ &= (n|h|^2 - H^2)\langle x, a \rangle, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Antes de enunciarmos o principal teorema deste capítulo sobre a unicidade de hipersuperfícies capilares estáveis na bola euclidiana unitária, observe que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \langle x, E_i \rangle X_{E_i} &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle x, E_i \rangle \left( \langle x, E_i \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)E_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle x, E_i \rangle^2 x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1) \sum_{i=1}^{n+1} \langle x, E_i \rangle E_i \\ &= |x|^2 x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)x \\ &= \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)x. \end{aligned}$$

**Teorema 4.2.4** (Wang-Xia, 2019). *Seja  $x : M^n \rightarrow \bar{\mathbb{B}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície capilar estável imersa na bola euclidiana unitária com curvatura média constante  $H \geq 0$  cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial \bar{\mathbb{B}}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então, ou  $x$  é totalmente geodésica ou uma calota esférica.*

*Demonstração.* Segue da estabilidade de  $M$  que

$$-\int_M \varphi(\Delta\varphi + |h|^2\varphi)dA + \int_{\partial M} \varphi(\nabla_\mu\varphi - q\varphi)ds \geq 0$$

para toda função  $\varphi \in \mathcal{F}$ , onde  $q$  é dada na Proposição 4.2.1. Para cada campo constante  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ , considere  $\varphi_a$  definida na Proposição 4.2.3. Segue desta mesma proposição que  $\varphi_a \in \mathcal{F}$ . Portanto, inserindo  $\varphi_a$  acima e fazendo uso de (4.14), nós temos

$$\int_M (n\langle x + \cos\theta\nu, a \rangle - H\langle X_a, \nu \rangle)\langle x, a \rangle(n|h|^2 - H^2)dA \leq 0$$

para todo  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Então, tomando  $a = E_1, \dots, E_{n+1}$ , temos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_M (n\langle x + \cos\theta\nu, E_i \rangle - H\langle X_{E_i}, \nu \rangle)\langle x, E_i \rangle(n|h|^2 - H^2)dA \leq 0,$$

ou seja,

$$\int_M \left( n|x|^2 + n\cos\theta\langle \nu, x \rangle - \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)H\langle x, \nu \rangle \right) (n|h|^2 - H^2)dA \leq 0. \quad (4.15)$$

Aqui usamos a equação  $\sum_{i=1}^{n+1} \langle x, E_i \rangle X_{E_i} = \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)x$ .

Considere a função  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\Phi = \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)H - n(\langle x, \nu \rangle + \cos\theta).$$

Usando (4.8) e (4.10), podemos verificar que  $\Phi$  satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Delta\left(\frac{1}{2}(|x|^2 - 1)H - n(\langle x, \nu \rangle + \cos\theta)\right) \\ &= H\frac{1}{2}\Delta|x|^2 - n\Delta\langle x, \nu \rangle \\ &= H(n - H\langle x, \nu \rangle) - n(H - |h|^2\langle x, \nu \rangle) \\ &= (n|h|^2 - H^2)\langle x, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Sendo  $|x|^2 = 1$  e  $\langle x, \nu \rangle = -\cos\theta$  em  $\partial M$ , temos que  $\Phi = 0$  sobre  $\partial M$ . Assim,

$$\int_M \Phi\Delta\Phi + |\nabla\Phi|^2dA = \frac{1}{2} \int_M \Delta(\Phi^2)dA = \int_{\partial M} \Phi\langle \nabla\Phi, \mu \rangle ds = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M \left( n|x|^2 + n\cos\theta\langle x, \nu \rangle - \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)H\langle x, \nu \rangle \right) (n|h|^2 - H^2)dA \\ &= \int_M \left( n|x|^2 - (\Phi + n\langle x, \nu \rangle)\langle x, \nu \rangle \right) (n|h|^2 - H^2)dA \\ &= \int_M \left( n(|x|^2 - \langle x, \nu \rangle^2)(n|h|^2 - H^2) - \Phi\Delta\Phi \right) dA \\ &= \int_M \left( n|x^T|^2(n|h|^2 - H^2) + |\nabla\Phi|^2 \right) dA \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Na expressão acima,  $x^T$  é a componente tangente de  $x$ . A última desigualdade ocorre pois, sendo  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  as curvaturas principais de  $M$ , considere os vetores  $u = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$  e  $v = (1, \dots, 1)$  em  $\mathbb{R}^n$ . Portanto, a desigualdade de Cauchy-Schwarz  $\langle u, v \rangle^2 \leq |u|^2 \cdot |v|^2$  nos fornece  $n|h|^2 - H^2 \geq 0$ . Isto nos diz que  $|x^T|^2(n|h|^2 - H^2) = 0$  e  $|\nabla\Phi|^2 = 0$ , o que implica que  $\Phi$  é constante. Em particular,  $(n|h|^2 - H^2)\langle x, \nu \rangle = \Delta\Phi = 0$ , ou seja,  $(n|h|^2 - H^2)\langle x, \nu \rangle^2 = 0$ . Então, somando as equações

$$(n|h|^2 - H^2)|x^T|^2 = 0$$

$$(n|h|^2 - H^2)\langle x, \nu \rangle^2 = 0,$$

segue que  $|x|^2(n|h|^2 - H^2) = 0$ .

Suponha que existe um  $p \in M$  tal que  $n|h|^2 - H^2$  não é nula neste ponto. Então, existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $p$  em  $M$  tal que  $n|h|^2 - H^2$  não é nula em  $V$ , donde  $x$  é nula em  $V$ , o que é uma contradição pois  $x$  é uma imersão. Portanto, temos que  $n|h|^2 - H^2 = 0$  sobre  $M$ . Mas esta igualdade só ocorre quando os vetores acima  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes, o que implica que  $\kappa_1 = \dots = \kappa_n$ . Portanto,  $M$  é totalmente umbílica. Neste caso pode ser visto em detalhes no apêndice que  $x$  é totalmente geodésica (quando  $H = 0$ ) ou  $x$  é uma calota esférica (quando  $H > 0$ ).  $\square$

## 5 Hipersuperfícies Capilares em uma Bola no Espaço Hiperbólico

Neste capítulo, estudaremos o caso em que  $\bar{M}^{n+1}$  é o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^{n+1}$  e  $B$  é uma bola geodésica em  $\mathbb{H}^{n+1}$ . Devido a sua similaridade com o caso hiperbólico, não apresentaremos uma demonstração detalhada para o caso esférico, mas indicaremos o caminho da prova.

### 5.1 Uma Nova Fórmula do Tipo Minkowski no Espaço Hiperbólico

Seja  $\mathbb{H}^{n+1}$  o espaço hiperbólico, ou seja, a variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa de curvatura seccional constante igual a  $-1$  e dimensão  $n + 1 \geq 3$ . Usaremos aqui o modelo da bola de Poincaré, o qual é dado por

$$(\mathbb{H}^{n+1}, \bar{g}) = (\mathbb{B}^{n+1}, e^{2u}\delta), \quad e^{2u} = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2},$$

onde  $\mathbb{B}$  é a bola aberta unitária do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$  centrada na origem e  $\delta$  é a métrica canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Outros modelos também podem ser usados. A vantagem do modelo da bola consiste na facilidade de se encontrar o campo conforme em  $\mathbb{H}^{n+1}$  análogo ao campo  $X_a$  do capítulo anterior.

Nesta seção, denotaremos a métrica euclidiana por  $\delta$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Além disso,  $\bar{\nabla}$  denotará a conexão de Levi-Civita de  $\bar{g}$ . Usaremos  $r = r(x)$  para denotar a distância hiperbólica em relação à origem e denotaremos  $\cosh r$  por  $V_0$ . Vamos verificar que

$$V_0 = \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}, \quad \sinh r = \frac{2|x|}{1 - |x|^2}.$$

Sendo  $r$  a distância hiperbólica, sabemos que  $r(x) = \log\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right)$  ver (HITCHMAN, 2009), então temos que

$$\begin{aligned} \cosh r &= \frac{e^r + e^{-r}}{2} = \frac{\frac{1+|x|}{1-|x|} + \frac{1-|x|}{1+|x|}}{2} \\ &= \frac{(1+|x|)^2 + (1-|x|)^2}{2(1-|x|^2)} = \frac{1+|x|^2}{1-|x|^2}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sinh r &= \frac{e^r - e^{-r}}{2} = \frac{\frac{1+|x|}{1-|x|} - \frac{1-|x|}{1+|x|}}{2} \\ &= \frac{(1+|x|)^2 - (1-|x|)^2}{2(1-|x|^2)} = \frac{2|x|}{1-|x|^2}. \end{aligned}$$

Seja  $B_R^{\mathbb{H}}$  uma bola geodésica em  $\mathbb{H}^{n+1}$  de raio hiperbólico  $R > 0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $B_R^{\mathbb{H}}$  está centrada na origem. Olhando para  $B_R^{\mathbb{H}}$  como um subconjunto de  $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , temos que  $B_R^{\mathbb{H}}$  coincide com a bola euclidiana centrada na origem de raio  $R_{\mathbb{R}} = \sqrt{\frac{\cosh R - 1}{\cosh R + 1}} \in (0, 1)$ . O campo unitário  $\bar{N}$  normal a  $\partial B_R^{\mathbb{H}}$  com respeito à métrica  $\bar{g}$  é dado por

$$\bar{N} = \frac{1}{\sinh R} x.$$

Como no caso euclidiano, para cada campo constante  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ , definimos um correspondente campo de vetores  $X_a$  em  $\mathbb{H}^{n+1}$  por

$$X_a = \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \left( \langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2)a \right). \quad (5.1)$$

Além disso, definiremos outro campo de vetores  $Y_a$  em  $\mathbb{H}^{n+1}$  por

$$Y_a = \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a - \langle x, a \rangle x. \quad (5.2)$$

Na próxima proposição, apresentaremos algumas identidades fundamentais para este capítulo.

**Proposição 5.1.1.** *Para qualquer campo de vetores  $Z$  em  $\mathbb{H}^{n+1}$ , valem as seguintes identidades:*

$$\bar{\nabla}_Z x = V_0 Z, \quad (5.3)$$

$$\bar{\nabla}_Z a = e^{-u}(\bar{g}(x, Z)a + \bar{g}(x, a)Z - \bar{g}(Z, a)x), \quad (5.4)$$

$$\bar{\nabla}_Z(e^{-u}a) = e^{-u}(\bar{g}(x, e^{-u}a)Z - \bar{g}(Z, e^{-u}a)x), \quad (5.5)$$

$$\bar{\nabla}_Z X_a = -\cosh R(e^{-u}\bar{g}(x, Z)a - e^{-u}\bar{g}(Z, a)x) + e^{-u}\bar{g}(x, a)Z, \quad (5.6)$$

$$\bar{\nabla}_Z Y_a = e^{-u}\bar{g}(x, Z)a - e^{-u}\bar{g}(Z, a)x. \quad (5.7)$$

*Demonstração.* Seja  $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$  o referencial canônico de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Observe que o gradiente de  $u = 2 - \ln(1 - |x|^2)$  com respeito à métrica euclidiana é dado por  $\frac{2}{1-|x|^2}x$ . Portanto, segue de (2.2) que

$$\bar{\nabla}_{E_i} x = E_i + \frac{2x_i}{1-|x|^2}x + \frac{2|x|^2}{1-|x|^2}E_i - \frac{2x_i}{1-|x|^2}x = V_0 E_i,$$

o que demonstra (5.3).

Mais uma vez, segue de (2.2) que

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{E_i} a &= \frac{2x_i}{1-|x|^2}a + \frac{2\langle x, a \rangle}{1-|x|^2}E_i - \frac{2a_i}{1-|x|^2}x \\ &= e^{-u}(\bar{g}(x, E_i)a + \bar{g}(x, a)E_i - \bar{g}(E_i, a)x),\end{aligned}$$

o que demonstra (5.4).

A equação (5.5) segue diretamente de (5.4). De fato,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_Z(e^{-u}a) &= -e^{-u}Z(u)a + e^{-u}\bar{\nabla}_Z a \\ &= -e^{-u}\frac{2\langle x, Z \rangle}{1-|x|^2}a + e^{-u}\bar{\nabla}_Z a \\ &= -e^{-2u}\bar{g}(x, Z)a + e^{-2u}(\bar{g}(x, Z)a + \bar{g}(x, a)Z - \bar{g}(Z, a)x) \\ &= e^{-u}(\bar{g}(x, e^{-u}a)Z - \bar{g}(Z, e^{-u}a)x).\end{aligned}$$

Segue de (5.1) juntamente com (5.3) e (5.4) que

$$\begin{aligned}\frac{(1-R_{\mathbb{R}}^2)}{2}\bar{\nabla}_Z X_a &= \bar{\nabla}_Z \left( \langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2)a \right) \\ &= \langle Z, a \rangle x + \langle x, a \rangle \bar{\nabla}_Z x - \langle Z, x \rangle a - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2)\bar{\nabla}_Z a \\ &= e^{-2u}\bar{g}(Z, a)x + e^{-2u}V_0\bar{g}(x, a)Z - e^{-2u}\bar{g}(Z, a)x \\ &\quad - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2)e^{-u}(\bar{g}(x, Z)a + \bar{g}(x, a)Z - \bar{g}(Z, a)x) \\ &= -\left( e^{-u} + \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2) \right) e^{-u}(\bar{g}(x, Z)a - \bar{g}(Z, a)x) \\ &\quad + \left( e^{-u}V_0 - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2) \right) e^{-u}\bar{g}(x, a)Z \\ &= -\frac{(1+R_{\mathbb{R}}^2)}{2}e^{-u}(\bar{g}(x, Z)a - \bar{g}(Z, a)x) + \frac{(1-R_{\mathbb{R}}^2)}{2}e^{-u}\bar{g}(x, a)Z,\end{aligned}$$

o que garante (5.6), tendo em vista que  $\cosh R = \frac{1+R_{\mathbb{R}}^2}{1-R_{\mathbb{R}}^2}$ .

Analogamente, segue de (5.2) juntamente com (5.3) e (5.4) que

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_Z Y_a &= \langle x, Z \rangle a + \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)\bar{\nabla}_Z a - \langle Z, a \rangle x - \langle x, a \rangle \bar{\nabla}_Z x \\ &= e^{-2u}\bar{g}(x, Z)a + \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)e^{-u}(\bar{g}(x, Z)a + \bar{g}(x, a)Z - \bar{g}(Z, a)x) \\ &\quad - e^{-2u}\bar{g}(Z, a)x - e^{-2u}V_0\bar{g}(x, a)Z \\ &= \left( e^{-u} + \frac{1}{2}(|x|^2 + 1) \right) (e^{-u}\bar{g}(x, Z)a - e^{-u}\bar{g}(Z, a)x) \\ &\quad + \left( \frac{1}{2}(|x|^2 + 1) - e^{-u}V_0 \right) e^{-u}\bar{g}(x, a)Z \\ &= e^{-u}\bar{g}(x, Z)a - e^{-u}\bar{g}(Z, a)x,\end{aligned}$$

o que demonstra (5.7). □

**Proposição 5.1.2.**

i)  $X_a$  é um campo conforme em  $\mathbb{H}^{n+1}$ , cujo fator conforme é dado por

$$V_a = \frac{2\langle x, a \rangle}{1 - |x|^2}.$$

ii)  $X_a|_{\partial B_R^{\mathbb{H}}}$  é tangente a  $\partial B_R^{\mathbb{H}}$ , ou seja,  $\bar{g}(X_a, \bar{N}) = 0$  ao longo de  $\partial B_R^{\mathbb{H}}$ .

iii)  $Y_a$  é um campo de Killing em  $\mathbb{H}^{n+1}$ .

*Demonstração.* Segue de (5.6) que

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_i} X_a, E_j) &= \bar{g}(-\cosh R(e^{-u}\bar{g}(x, E_i)a - e^{-u}\bar{g}(E_i, a)x) + e^{-u}\bar{g}(x, a)E_i, E_j) \\ &= -\cosh R(e^{-u}\bar{g}(x, E_i)\bar{g}(a, E_j) - e^{-u}\bar{g}(E_i, a)\bar{g}(x, E_j)) \\ &\quad + e^{-u}\bar{g}(x, a)\bar{g}(E_i, E_j), \end{aligned}$$

donde

$$\frac{1}{2} \left( \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_i} X_a, E_j) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_j} X_a, E_i) \right) = e^{-u}\bar{g}(x, a)\bar{g}(E_i, E_j) = \frac{2\langle x, a \rangle}{1 - |x|^2} \bar{g}(E_i, E_j),$$

o que demonstra o item i).

Agora, observe que  $X_a|_{\partial B_R^{\mathbb{H}}} = \frac{2}{1-R_{\mathbb{R}}^2}(\langle x, a \rangle - R_{\mathbb{R}}^2 a)$ , pois  $|x|^2 = R_{\mathbb{R}}^2$  sobre  $\partial B_R^{\mathbb{H}}$ . Assim,

$$\langle X_a, x \rangle|_{\partial B_R^{\mathbb{H}}} = \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} (\langle x, a \rangle |x|^2 - R_{\mathbb{R}}^2 \langle a, x \rangle)|_{\partial B_R^{\mathbb{H}}} = 0.$$

Portanto,

$$\bar{g}(X_a, \bar{N}) = \frac{1}{\sinh R} \bar{g}(X_a, x) = \frac{4}{\sinh R(1 - R_{\mathbb{R}}^2)^2} \langle X_a, x \rangle = 0.$$

Isto garante o item ii).

Por fim, segue de (5.7) que

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_i} Y_a, E_j) &= \bar{g}(e^{-u}\bar{g}(x, E_i)a - e^{-u}\bar{g}(E_i, a)x, E_j) \\ &= e^{-u}\bar{g}(x, E_i)\bar{g}(a, E_j) - e^{-u}\bar{g}(E_i, a)\bar{g}(x, E_j). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{E_i} Y_a, E_j) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{E_j} Y_a, E_i) = 0,$$

o que demonstra o item iii). □

**Proposição 5.1.3.** *As funções  $V_0$  e  $V_a$  satisfazem*

$$\text{Hess} V_0 = V_0 \bar{g}, \tag{5.8}$$

$$\text{Hess} V_a = V_a \bar{g}. \tag{5.9}$$

*Demonstração.* Em primeiro lugar, nós afirmamos que o gradiente de  $V_0$  em relação a  $\bar{g}$  é dado por

$$\bar{\nabla} V_0 = x. \quad (5.10)$$

De fato,

$$E_i(V_0) = \frac{2\langle x, E_i \rangle(1 - |x|^2) + 2\langle x, E_i \rangle(1 + |x|^2)}{(1 - |x|^2)^2} = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \langle x, E_i \rangle = \bar{g}(x, E_i),$$

ou seja,  $\bar{g}(\bar{\nabla} V_0, E_i) = E_i(V_0) = \bar{g}(x, E_i)$  para todo  $i = 1, \dots, n + 1$ , o que demonstra a afirmação.

Portanto, segue de (5.3) que

$$\text{Hess } V_0(X, Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla} V_0, Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X x, Y) = V_0 \bar{g}(X, Y),$$

garantindo (5.8).

Agora, nós afirmamos que

$$\bar{\nabla} V_a = e^{-u} a + \langle x, a \rangle x = e^{-u} a + e^{-2u} \bar{g}(x, a) x. \quad (5.11)$$

De fato,

$$\begin{aligned} E_i(V_a) &= \frac{2\langle E_i, a \rangle(1 - |x|^2) + 4\langle E_i, x \rangle \langle x, a \rangle}{(1 - |x|^2)^2} \\ &= \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \left\langle \frac{(1 - |x|^2)}{2} a + \langle x, a \rangle x, E_i \right\rangle \\ &= \bar{g}(e^{-u} a + \langle x, a \rangle x, E_i), \end{aligned}$$

o que demonstra a afirmação.

Portanto, segue de (5.3) e (5.5) que

$$\begin{aligned} \text{Hess } V_a(X, Y) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla} V_a, Y) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X (e^{-u} a + \langle x, a \rangle x), Y) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X (e^{-u} a) + (X \langle x, a \rangle) x + \langle x, a \rangle \bar{\nabla}_X x, Y) \\ &= \bar{g}(e^{-u} (\bar{g}(x, e^{-u} a) X - \bar{g}(X, e^{-u} a) x) + \langle X, a \rangle x + \langle x, a \rangle \bar{\nabla}_X x, Y) \\ &= \bar{g}(\langle x, a \rangle X + \langle x, a \rangle V_0 X, Y) \\ &= \langle x, a \rangle (1 + V_0) \bar{g}(X, Y) \\ &= V_a \bar{g}(X, Y), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

A partir de agora, vamos considerar uma imersão isométrica  $x : M^n \rightarrow B_R^{\mathbb{H}}$  cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial B_R^{\mathbb{H}}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Como no caso euclidiano, temos uma fórmula do tipo Minkowski.

**Proposição 5.1.4** (Fórmula do tipo Minkowski). *Considere uma imersão isométrica  $x : M^n \rightarrow B_R^{\mathbb{H}}$  cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial B_R^{\mathbb{H}}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Sejam  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante e  $X_a$  e  $Y_a$  definidos por (5.1) e (5.2), respectivamente. Então,*

$$n \int_M (V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) dA = \int_M H \bar{g}(X_a, \nu) dA. \quad (5.12)$$

*Demonstração.* Seja  $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$  um referencial ortonormal local em  $M^n$ . Observe que

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_\alpha}(X_a^T), e_\alpha) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_\alpha}(X_a - \bar{g}(X_a, \nu)\nu), e_\alpha) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_\alpha}X_a, e_\alpha) - \bar{g}(X_a, \nu)\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_\alpha}\nu, e_\alpha). \end{aligned}$$

Utilizando o item i) da Proposição 5.1.2, temos que

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_\alpha}(X_a^T), e_\alpha) = V_a - \bar{g}(X_a, \nu)\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_\alpha}\nu, e_\alpha).$$

Portanto,

$$\operatorname{div}_M(X_a^T) = \sum_{\alpha=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_\alpha}(X_a^T), e_\alpha) = nV_a - H\bar{g}(X_a, \nu).$$

Por outro lado, segue do item ii) da Proposição 5.1.2 juntamente com (3.2) que

$$\bar{g}(X_a^T, \mu) = \bar{g}(X_a, \mu) = \bar{g}(X_a, \cos \theta \bar{\nu} + \sin \theta \bar{N}) = \cos \theta \bar{g}(X_a, \bar{\nu}).$$

Como  $X_a|_{\partial B_R^{\mathbb{H}}} = \frac{2}{1-R_{\mathbb{R}}^2}(\langle x, a \rangle x - R_{\mathbb{R}}^2 a)$ ,  $\sinh R \bar{N} = x$  e  $\bar{g}(\bar{N}, \bar{\nu}) = 0$ , segue da equação acima que

$$\bar{g}(X_a^T, \mu) = -\frac{2R_{\mathbb{R}}^2}{1-R_{\mathbb{R}}^2} \cos \theta \bar{g}(a, \bar{\nu}).$$

Portanto, pelo Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned} \int_M (nV_a - H\bar{g}(X_a, \nu)) dA &= \int_M \operatorname{div}_M(X_a^T) dA \\ &= \int_{\partial M} \bar{g}(X_a^T, \mu) ds \\ &= -\frac{2R_{\mathbb{R}}^2}{1-R_{\mathbb{R}}^2} \cos \theta \int_{\partial M} \bar{g}(a, \bar{\nu}) ds. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Agora, considere  $Z_a = \bar{g}(\nu, e^{-u}a)x - \bar{g}(\nu, x)e^{-u}a$  e observe que  $Z_a \in \mathfrak{X}(M)$ . Nós afirmamos que

$$\operatorname{div}_M Z_a = n\bar{g}(Y_a, \nu). \quad (5.14)$$

De fato, segue de (5.3) e (5.5) que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M(\bar{g}(\nu, e^{-u}a)x^T) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_\alpha}(\bar{g}(\nu, e^{-u}a)x^T), e_\alpha) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_\alpha}\nu, e^{-u}a)\bar{g}(x^T, e_\alpha) + \bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{e_\alpha}(e^{-u}a))\bar{g}(x^T, e_\alpha) \\ &\quad + \bar{g}(\nu, e^{-u}a)\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_\alpha}(x^T), e_\alpha) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{x^T}\nu, e^{-u}a^T) + \bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{x^T}(e^{-u}a)) \\ &\quad + \bar{g}(\nu, e^{-u}a)\bar{g}(\bar{\nabla}_{e_\alpha}(x - \bar{g}(x, \nu)\nu), e_\alpha) \\ &= h(x^T, e^{-u}a^T) - e^{-u}\bar{g}(x^T, e^{-u}a)\bar{g}(\nu, x) \\ &\quad + nV_0\bar{g}(\nu, e^{-u}a) - H\bar{g}(\nu, e^{-u}a)\bar{g}(x, \nu). \end{aligned}$$

Acima nós usamos a notação de Einstein. Analogamente,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M \left( \bar{g}(x, \nu)(e^{-u}a)^T \right) &= h(x^T, e^{-u}a^T) + \bar{g}(x, \nu) \left( e^{-u} \left( n\bar{g}(x, e^{-u}a) - \bar{g}(x^T, e^{-u}a) \right) \right) \\ &\quad - H\bar{g}(x, \nu)\bar{g}(\nu, e^{-u}a). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M Z_a &= nV_0\bar{g}(e^{-u}a, \nu) - ne^{-2u}\bar{g}(x, a)\bar{g}(x, \nu) \\ &= n\bar{g}(V_0e^{-u}a - \langle x, a \rangle x, \nu) \\ &= n\bar{g}(Y_a, \nu). \end{aligned}$$

Usando que  $e^{-u} = \frac{R_{\mathbb{R}}}{\sinh R}$  sobre  $\partial B_R^{\mathbb{H}}$  e que  $\bar{N} = \frac{1}{\sinh R}x$ , nós temos

$$Z_a|_{\partial B_R^{\mathbb{H}}} = R_{\mathbb{R}}\bar{g}(\nu, a)\bar{N} - R_{\mathbb{R}}\bar{g}(\nu, \bar{N})a.$$

Logo, segue de (3.1) e (3.2) que

$$\bar{g}(Z_a, \mu) = R_{\mathbb{R}}\bar{g}(\sin \theta \nu + \cos \theta \mu, a) = R_{\mathbb{R}}\bar{g}(\bar{\nu}, a).$$

Assim, segue de (5.14) e da última equação acima que

$$n \int_M \bar{g}(Y_a, \nu) dA = \int_M \operatorname{div}_M Z_a dA = \int_{\partial M} \bar{g}(Z_a, \mu) ds = R_{\mathbb{R}} \int_{\partial M} \bar{g}(a, \bar{\nu}) ds. \quad (5.15)$$

Por fim, fazendo uso de (5.13) e (5.15), obtemos

$$\begin{aligned} \int_M (nV_a - H\bar{g}(X_a, \nu)) dA &= -\frac{2R_{\mathbb{R}}^2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \cos \theta \int_{\partial M} \bar{g}(a, \bar{\nu}) ds \\ &= -n \sinh R \cos \theta \int_M \bar{g}(Y_a, \nu) dA, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

Veremos a seguir uma importante proposição que será usada na próxima seção.

**Proposição 5.1.5.** *Ao longo do bordo de  $M$ , nós temos*

$$\bar{\nabla}_{\mu} (V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) = q (V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)), \quad (5.16)$$

$$\bar{\nabla}_{\mu} \bar{g}(X_a, \nu) = q \bar{g}(X_a, \nu), \quad (5.17)$$

onde

$$q = \frac{1}{\sin \theta} \coth R + \cotg \theta h(\mu, \mu). \quad (5.18)$$

*Demonstração.* Nesta demonstração, tomaremos sempre valores ao longo de  $\partial M$  e usaremos as equações (3.1) e (3.2). Inicialmente, note que

$$\bar{g}(Y_a, x) = e^{2u} \langle Y_a, x \rangle = e^{2u} \frac{1}{2} (1 - |x|^2) \langle x, a \rangle = \frac{2 \langle x, a \rangle}{1 - |x|^2} = V_a.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu) &= \bar{g}(Y_a, x + \sinh R \cos \theta \nu) \\
 &= \bar{g}(Y_a, \sinh R \bar{N} + \sinh R \cos \theta (\sin \theta \bar{\nu} - \cos \theta \bar{N})) \\
 &= \sinh R \sin \theta \bar{g}(Y_a, \mu).
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Pelas equações (5.7) e (5.11), temos

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_\mu(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) &= e^{-u} \bar{g}(\mu, a) + e^{-2u} \bar{g}(x, a) \bar{g}(\mu, x) \\
 &\quad + \sinh R \cos \theta e^{-u} (\bar{g}(x, \mu) \bar{g}(\nu, a) - \bar{g}(\mu, a) \bar{g}(x, \nu)) \\
 &\quad + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, h(\mu, \mu) \mu).
 \end{aligned}$$

Usando  $\cos \theta \nu = -\bar{N} + \sin \theta \mu$  e  $x = \sinh R \bar{N}$ , obtemos

$$\sinh R \cos \theta e^{-u} (\bar{g}(x, \mu) \bar{g}(\nu, a) - \bar{g}(\mu, a) \bar{g}(x, \nu)) = \sinh^2 R e^{-u} \bar{g}(\mu, a) - e^{-u} \bar{g}(x, \mu) \bar{g}(x, a).$$

Donde, temos

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_\mu(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) &= e^{-u} \cosh^2 R \bar{g}(\mu, a) + (e^{-2u} - e^{-u}) \bar{g}(x, a) \bar{g}(x, \mu) \\
 &\quad + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, h(\mu, \mu) \mu) \\
 &= \cosh R \bar{g} \left( \frac{1}{2} (|x|^2 + 1) a - \langle x, a \rangle x, \mu \right) \\
 &\quad + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, h(\mu, \mu) \mu) \\
 &= (\cosh R + \sinh R \cos \theta h(\mu, \mu)) \bar{g}(Y_a, \mu).
 \end{aligned}$$

Portanto, dessa última equação e de (5.19), temos (5.16).

Agora, vamos provar (5.17). Em primeiro lugar, lembre-se que  $\bar{N} = \sin \theta \mu - \cos \theta \nu$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 \bar{g}(X_a, \nu) &= \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \left( e^{-2u} \bar{g}(x, a) \bar{g}(x, \nu) - \frac{1}{2} (|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2) \bar{g}(a, \nu) \right) \\
 &= \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \left( -\cos \theta R_{\mathbb{R}}^2 \bar{g}(\sin \theta \mu - \cos \theta \nu, a) - R_{\mathbb{R}}^2 \bar{g}(a, \nu) \right) \\
 &= -\frac{2R_{\mathbb{R}}^2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \sin \theta \bar{g}(\cos \theta \mu + \sin \theta \nu, a).
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Sendo  $\cos \theta \nu = -\bar{N} + \sin \theta \mu$  e  $X_a \perp \bar{N}$ , temos

$$\bar{g}(X_a, \mu) = \cotg \theta \bar{g}(X_a, \nu). \tag{5.21}$$

Por (5.6) e pela Proposição 3.1.10, temos que

$$\begin{aligned}
 \bar{\nabla}_\mu \bar{g}(X_a, \nu) &= -\cosh R \left( e^{-u} \bar{g}(x, \mu) \bar{g}(a, \nu) - e^{-u} \bar{g}(\mu, a) \bar{g}(x, \nu) \right) + \bar{g}(X_a, h(\mu, \mu) \mu) \\
 &= -R_{\mathbb{R}} \cosh R (\sin \theta \bar{g}(a, \nu) + \cos \theta \bar{g}(\mu, a)) + h(\mu, \mu) \bar{g}(X_a, \mu) \\
 &= -\coth R \frac{2R_{\mathbb{R}}^2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \bar{g}(\cos \theta \mu + \sin \theta \nu, a) + h(\mu, \mu) \bar{g}(X_a, \mu) \\
 &= \frac{1}{\sin \theta} \coth R \bar{g}(X_a, \nu) + h(\mu, \mu) \bar{g}(X_a, \mu),
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

onde nesta última igualdade usamos a equação (5.20). Portanto, de (5.21) e (5.22), segue (5.17).  $\square$

**Proposição 5.1.6.** *Sejam  $x : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$  uma imersão isométrica e  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante. As seguintes identidades ocorrem ao longo de  $M$ .*

$$\Delta V_0 = nV_0 - H\bar{g}(x, \nu), \quad (5.23)$$

$$\Delta V_a = nV_a - H\bar{\nabla}_\nu V_a, \quad (5.24)$$

$$\Delta \bar{g}(x, \nu) = \bar{g}(\nabla H, x) - |h|^2 \bar{g}(x, \nu) + HV_0 \quad (5.25)$$

$$\Delta \bar{g}(X_a, \nu) = \bar{g}(\nabla H, X_a) + n\bar{g}(X_a, \nu) - |h|^2 \bar{g}(X_a, \nu) + HV_a - n\bar{\nabla}_\nu V_a, \quad (5.26)$$

$$\Delta \bar{g}(Y_a, \nu) = \bar{g}(\nabla H, Y_a) + n\bar{g}(Y_a, \nu) - |h|^2 \bar{g}(Y_a, \nu). \quad (5.27)$$

*Demonstração.* Seja  $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$  um referencial ortonormal local em  $M$ . Segue de (2.4), (5.8) e (5.10) que

$$\Delta V_0 = \sum_{\alpha=1}^n \left( \text{Hess} V_0(e_\alpha, e_\alpha) - h(e_\alpha, e_\alpha) \bar{\nabla}_\nu V_0 \right) = nV_0 - H\bar{g}(x, \nu),$$

o que demonstra (5.23).

Trocando  $V_0$  por  $V_a$  acima e utilizando (5.9), obtemos (5.24).

Como  $\bar{\nabla}_Z x = V_0 Z$  para todo campo de vetores  $Z$  (veja (5.3)), temos que  $x$  é um campo conforme em  $\mathbb{H}^{n+1}$ , cujo fator conforme é dado por  $V_0$ . Assim, segue da Proposição 3.1.11 que

$$\Delta \bar{g}(x, \nu) = \bar{g}(\nabla H, x) - (\text{Ric}(\nu, \nu) + |h|^2) \bar{g}(x, \nu) + HV_0 - n\nu(V_0).$$

Adicionalmente, nós sabemos que  $\mathbb{H}^{n+1}$  tem curvatura de Ricci constante igual a  $-n$  e  $\nu(V_0) = \bar{g}(x, \nu)$ , tendo em vista que  $\bar{\nabla} V_0 = x$ . Logo,

$$\Delta \bar{g}(x, \nu) = \bar{g}(\nabla H, x) - |h|^2 \bar{g}(x, \nu) + HV_0.$$

Para obtermos (5.26), basta lembrarmos que  $X_a$  é um campo conforme, cujo fator conforme é dado por  $V_a$ , e utilizarmos, mais uma vez, que  $\mathbb{H}^{n+1}$  tem curvatura de Ricci constante igual a  $-n$  juntamente com a Proposição 3.1.11. O mesmo vale para (5.27), lembrando que  $Y_a$  é um campo de Killing.  $\square$

## 5.2 Unicidade de Hipersuperfícies Capilares Estáveis em uma Bola Geodésica do Espaço Hiperbólico

**Teorema 5.2.1** (Wang-Xia, 2019). *Seja  $x : M^n \rightarrow B_R^{\mathbb{H}} \subset \mathbb{H}^{n+1}$  uma hipersuperfície capilar estável, de curvatura média constante  $H \geq 0$ , imersa em uma bola geodésica  $B_R^{\mathbb{H}} \subset \mathbb{H}^{n+1}$  cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial B_R^{\mathbb{H}}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então,  $x$  é totalmente umbílica.*

*Demonstração.* Em primeiro lugar, observe que a segunda forma fundamental de  $\partial B_R^{\mathbb{H}}$  é dada por  $h^{\partial B_R^{\mathbb{H}}}(X, Y) = \coth R \bar{g}(X, Y)$ . Para isto, basta lembrar que  $\bar{N} = \frac{1}{\sinh R} x$  e  $\bar{\nabla}_Z x = V_0 Z = \cosh R Z$ . Portanto, segue da Desigualdade de Estabilidade que

$$-\int_M \varphi(\Delta \varphi - n\varphi + |h|^2 \varphi) dA + \int_{\partial M} \varphi(\bar{\nabla}_\mu \varphi - q\varphi) ds \geq 0 \quad (5.28)$$

para toda função  $\varphi \in \mathcal{F}$ , onde  $q$  é dado por (5.18).

Para cada campo de vetores constante  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ , considere a função

$$\varphi_a = n(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) - H \bar{g}(X_a, \nu)$$

definida sobre  $M$ . Segue da fórmula do tipo Minkowski da seção anterior que  $\varphi_a \in \mathcal{F}$ . Usando (5.24), (5.26) e (5.27), lembrando que  $H$  é constante, nós temos

$$\Delta \varphi_a - n\varphi_a + |h|^2 \varphi_a = (n|h|^2 - H^2)V_a. \quad (5.29)$$

De (5.16) e (5.17) segue que

$$\nabla_\mu \varphi_a - q\varphi_a = 0. \quad (5.30)$$

Substituindo (5.29) e (5.30) na condição de estabilidade (5.28), para cada  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$\int_M (n(V_a + \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) - H \bar{g}(X_a, \nu)) V_a (n|h|^2 - H^2) dA \leq 0. \quad (5.31)$$

Considere o referencial canônico  $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e suas respectivas entidades

$$\begin{aligned} V_i &= V_{E_i} = \frac{2\langle x, E_i \rangle}{1 - |x|^2}, \\ X_i &= X_{E_i} = \frac{2}{1 - R_{\mathbb{R}}^2} \left( \langle x, E_i \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2) E_i \right), \\ Y_i &= Y_{E_i} = \frac{1}{2}(|x|^2 + 1) E_i - \langle x, E_i \rangle x. \end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} V_i^2 &= \frac{4|x|^2}{(1 - |x|^2)^2} = \bar{g}(x, x) \\ \sum_{i=1}^{n+1} V_i X_i &= \frac{2(|x|^2 - R_{\mathbb{R}}^2)}{(1 - R_{\mathbb{R}}^2)(1 - |x|^2)} x = (V_0 - \cosh R)x \\ \sum_{i=1}^{n+1} V_i Y_i &= x. \end{aligned}$$

Assim, fazendo uso de (5.31) para cada  $E_i$  e somando estas desigualdades, obtemos

$$\int_M \left( n(\bar{g}(x, x) + \sinh R \cos \theta \bar{g}(x, \nu)) - (V_0 - \cosh R) H \bar{g}(x, \nu) \right) (n|h|^2 - H^2) dA \leq 0. \quad (5.32)$$

Como no caso euclidiano, considere a função auxiliar

$$\Phi = (V_0 - \cosh R)H - n(\bar{g}(x, \nu) + \sinh R \cos \theta).$$

De (5.23) e (5.25), temos

$$\Delta\Phi = (n|h|^2 - H^2)\bar{g}(x, \nu). \quad (5.33)$$

Note que  $\Phi|_{\partial M} = 0$ . Portanto, segue de (5.32) e (5.33) que

$$0 \geq \int_M \left( n\bar{g}(x, x) - (\Phi + n\bar{g}(x, \nu))\bar{g}(x, \nu) \right) (n|h|^2 - H^2) dA \quad (5.34)$$

$$= \int_M \left( n\bar{g}(x^T, x^T)(n|h|^2 - H^2) - \Phi\Delta\Phi \right) dA \quad (5.35)$$

$$= \int_M \left( n\bar{g}(x^T, x^T)(n|h|^2 - H^2) + |\nabla\Phi|^2 \right) dA. \quad (5.36)$$

Repetindo o argumento do Teorema 4.2.4, obtemos que  $x$  é totalmente umbílica. No apêndice classificamos as hipersuperfícies totalmente umbílicas no espaço hiperbólico.  $\square$

### 5.3 O Caso Esférico

Nesta seção, apresentaremos as modificações necessárias para o caso cujo espaço ambiente é a esfera  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Usaremos o modelo

$$(\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{S\}, \bar{g}) = (\mathbb{R}^{n+1}, e^{2u}\delta), \quad u(x) = \frac{4}{(1 + |x|^2)^2}.$$

Seja  $B_R^{\mathbb{S}}$  uma bola em  $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{S\}$  com raio  $R \in (0, \pi)$  centrada no polo norte. Temos então a correspondência  $R_{\mathbb{R}} = \sqrt{\frac{1-\cos R}{1+\cos R}} \in (0, \infty)$ . Os campos conformes  $X_a$  e  $Y_a$ , sendo  $Y_a$  de Killing, aqui são dados por

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{2}{1 + R_{\mathbb{R}}^2} \left( \langle x, a \rangle x - \frac{1}{2} (|x|^2 + R_{\mathbb{R}}^2) a \right), \\ Y_a &= \frac{1}{2} (1 - |x|^2) a + \langle x, a \rangle x. \end{aligned}$$

As funções cruciais  $V_0$  e  $V_a$  neste caso são

$$V_0 = \cos r = \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2}, \quad V_a = \frac{2\langle x, a \rangle}{1 + |x|^2}.$$

Usando  $X_a$ ,  $Y_a$ ,  $V_0$  e  $V_a$ , a prova segue paralelamente como no caso hiperbólico.

### 5.4 O Problema Exterior

Nesta seção, daremos uma ideia da prova do problema exterior. Utilizaremos como exemplo o caso hiperbólico.

**Teorema 5.4.1** (Wang-Xia, 2019). *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \setminus \text{int}(B_R^{\mathbb{H}})$  uma hipersuperfície capilar estável compacta, de curvatura média constante  $H \geq 0$ , imersa fora do interior de uma bola geodésica  $B_R^{\mathbb{H}} \subset \mathbb{H}^{n+1}$  cujo bordo  $\partial M$  intersecta  $\partial B_R^{\mathbb{H}}$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então,  $x$  é totalmente umbílica.*

*Demonstração.* Neste caso, temos que  $x = -\sinh R\bar{N}$  e a função  $q$  presente na Fórmula da Segunda Variação da Energia é dada por

$$q = -\frac{1}{\sinh \theta} \coth R + \cotg \theta h(\mu, \mu).$$

De modo análogo ao que foi feito na demonstração da Proposição 5.12, podemos verificar a seguinte fórmula do tipo Minkowski:

$$\int_M n (V_a - \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) dA = \int_M H \bar{g}(X_a, \nu) dA.$$

Tomando a função teste

$$\varphi_a = n (V_a - \sinh R \cos \theta \bar{g}(Y_a, \nu)) - H \bar{g}(X_a, \nu), \quad (5.37)$$

temos  $\int_M \varphi_a dA = 0$ . Seguindo os passos da demonstração da Proposição 5.1.5, chegamos em  $\bar{\nabla}_\mu \varphi_a = q \varphi_a$  ao longo de  $\partial M$ . Segue da Proposição 5.1.6 que  $\varphi_a$  em (5.37) satisfaz (5.29). Então, a demonstração continua de maneira análoga à demonstração do Teorema 5.2.1.  $\square$

## Referências

- AMBROZIO, L. C. Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds. *The Journal of Geometric Analysis*, Springer, v. 25, n. 2, p. 1001–1017, 2015. Nenhuma citação no texto.
- BARBOSA, J. L.; DO CARMO, M. P. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Mathematische Zeitschrift*, v. 185, n. 3, p. 339–353, 1984. Nenhuma citação no texto.
- BARBOSA, J. L.; DO CARMO, M. P.; ESCHENBURG, J. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in riemannian manifolds. *Mathematische Zeitschrift*, v. 197, n. 1, p. 123–138, 1988. Nenhuma citação no texto.
- DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. (Projeto Euclides). Nenhuma citação no texto.
- FINN, R. *Equilibrium capillary surfaces*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 284. Nenhuma citação no texto.
- FINN, R.; MCCUAN, J.; WENTE, H. C. Thomas young’s surface tension diagram: its history, legacy, and irreconcilabilities. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, Springer, v. 14, n. 3, p. 445–453, 2012. Nenhuma citação no texto.
- GONZALEZ, E.; MASSARI, U.; TAMANINI, I. Existence and regularity for the problem of a pendent liquid drop. *Pacific Journal of Mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 88, n. 2, p. 399–420, 1980. Nenhuma citação no texto.
- HITCHMAN, M. P. *Geometry with an introduction to cosmic topology*. [S.l.]: Jones & Bartlett Learning, 2009. Nenhuma citação no texto.
- LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 2003. v. 218. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218). Nenhuma citação no texto.
- LÓPEZ, R. *Constant mean curvature surfaces with boundary*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Nenhuma citação no texto.
- NUNES, I. On stable constant mean curvature surfaces with free boundary. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 287, n. 1-2, p. 473–479, 2017. Nenhuma citação no texto.
- ROS, A.; SOUAM, R. On stability of capillary surfaces in a ball. *pacific journal of mathematics*, Mathematical Sciences Publishers, v. 178, n. 2, p. 345–361, 1997. Nenhuma citação no texto.
- ROS, A.; VERGASTA, E. Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary. *Geometriae Dedicata*, Springer, v. 56, n. 1, p. 19–33, 1995. Nenhuma citação no texto.
- WANG, G.; XIA, C. Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball. *Math. Ann.*, v. 374, n. 3-4, p. 1845–1882, 2019. ISSN 0025-5831. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00208-019-01845-0>>. Nenhuma citação no texto.

YOUNG, T. Iii. an essay on the cohesion of fluids. *Philosophical transactions of the royal society of London*, The Royal Society London, n. 95, p. 65–87, 1805. Nenhuma citação no texto.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Classificação das hipersuperfícies totalmente umbílicas no espaço euclidiano

Seja  $M$  uma hipersuperfície totalmente umbílica em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Vamos demonstrar que o autovalor  $\lambda$  dado na definição de subvariedade totalmente umbílica não depende do ponto  $p \in M$ . Seguindo as notações do texto, dados  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , nós temos

$$\langle \bar{\nabla}_X \nu, Y \rangle = \langle A(X), Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle, \quad (\text{A.1})$$

e

$$\langle \bar{\nabla}_Z \nu, Y \rangle = \lambda \langle Z, Y \rangle. \quad (\text{A.2})$$

Diferenciando (A.1) com respeito a  $Z$  e (A.2) com respeito a  $X$ . Temos

$$\langle \bar{\nabla}_Z \bar{\nabla}_X \nu, Y \rangle = Z(\lambda) \langle X, Y \rangle + \lambda \langle \bar{\nabla}_Z X, Y \rangle \quad (\text{A.3})$$

$$\langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Z \nu, Y \rangle = X(\lambda) \langle Z, Y \rangle + \lambda \langle \bar{\nabla}_X Z, Y \rangle. \quad (\text{A.4})$$

Fazendo (A.3) menos (A.4), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_Z \bar{\nabla}_X \nu - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Z \nu, Y \rangle &= \langle Z(\lambda)X - X(\lambda)Z, Y \rangle + \lambda \langle \bar{\nabla}_Z X - \bar{\nabla}_X Z, Y \rangle \\ &= \langle Z(\lambda)X - X(\lambda)Z, Y \rangle + \lambda \langle [X, Z], Y \rangle \\ &= \langle Z(\lambda)X - X(\lambda)Z, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_{[X, Z]} \nu, Y \rangle, \end{aligned}$$

donde

$$\langle R(Z, X)\nu, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_Z \bar{\nabla}_X \nu - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Z \nu - \bar{\nabla}_{[X, Z]} \nu, Y \rangle = \langle Z(\lambda)X - X(\lambda)Z, Y \rangle.$$

Como  $\mathbb{R}^{n+1}$  tem curvatura seccional zero, temos que  $Z(\lambda)X - X(\lambda)Z = 0$  para todo  $Z, X \in \mathfrak{X}(M)$ , tomando  $X, Z$  linearmente independente, temos que  $X(\lambda) = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Portanto  $\lambda$  é constante.

**Proposição A.1** (Classificação das hipersuperfícies umbílicas no espaço euclidiano). *Se  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é uma imersão totalmente umbílica, então  $x(M)$  está contido em um plano ou em uma esfera.*

*Demonstração.* Seja  $\lambda$  o autovalor do operador de Weingarten de  $x$ . Sabemos que  $\lambda$  não depende de  $p \in M$ . Se  $\lambda = 0$ , temos que

$$\langle \bar{\nabla}_X \nu, Y \rangle = \langle A(X), Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle = 0$$

para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Portanto,  $\bar{\nabla}_X \nu = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Isto mostra que  $\nu$  é constante ao longo de  $M$ . Logo,  $x(M)$  está contido em um hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Se  $\lambda \neq 0$ , defina  $y : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  por  $y(p) = x(p) - \frac{1}{\lambda} \nu$ . Segue que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_X y, Y \rangle &= \left\langle \bar{\nabla}_X x - \frac{1}{\lambda} \bar{\nabla}_X \nu, Y \right\rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - \langle X, Y \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Segue que  $y$  é constante ao longo de  $M$ . Assim, sendo  $y_0 = y(p)$ , temos que  $|x(p) - y_0|^2 = \frac{1}{\lambda^2}$  para todo  $p \in M$ , ou seja,  $x(M)$  está contido em uma esfera de centro  $y_0$  e raio  $1/|\lambda|$ .

□