UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TRANSIÇÃO DE FASE E UM CRITÉRIO PARA INTERFACE DE PERÍMETRO MÍNIMO

WAGNER XAVIER RIBEIRO

Maceió - AL
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

WAGNER XAVIER RIBEIRO

TRANSIÇÃO DE FASE E UM CRITÉRIO PARA INTERFACES DE PERÍMETRO MÍNIMO

Maceió - AL
2019

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Marcelino de Carvalho

R484t Ribeiro, Wagner Xavier.
Transição de fase e um critério para interface de perímetro mínimo / Wagner Xavier Ribeiro, 2019.
56 f.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 52-53.

1. Funções de variação limitada. 2. Geometria diferencial. 3. Integração numérica. 4. Teoria das medidas. I. Título.

CDU: 517.518.1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

WAGNER XAVIER RIBEIRO

TRANSIÇÃO DE FASE E UM CRITÉRIO PARA INTERFACES DE PERÍMETRO MÍNIMO

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 29 de Março de 2019 à Banca Examinadora, designada pelo colegiado do programa de pós-graduação em matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática

Banca Examinadora

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva - Orientador

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Em memória de Diana Cintra Xavier.

Agradecimentos

A palavra **Ubuntu** para os povos de origem africana possui vários significados ligados a uma filosofia centrada na ideia do crescimento estritamente recíproco. Dentre esses, aquele que traduz essa vereda é: **"eu sou porque nós somos"**. Dito isto, mais uma vez gostaria de deixar meus mais sinceros e profundos agradecimentos a todas as pessoas responsáveis por me fazer ser capaz de ter chegado até aqui. **Eu só sou porque vocês são, sem vocês serem eu jamais seria.**

Registro abaixo **porque eu sou:**

Minha mãe Rosângela Maria Xavier por todos os sacrifícios que passamos para chegarmos até aqui e aquele que sempre nos encheu de paz e alegria, principalmente durante esses momentos de sacrífico, meu sobrinho, Gabriel Xavier Pires, dessa vez, ao lembrar de tudo que passei ao lado de vocês não tenho palavras.

Aos amigos e irmãos de infância e da escola Roberth Rocha e Isac Silva, pelas incontáveis valências em todas as fases e sentidos da vida.

Ao meus grandes mentores e amigos Gerson Bezerra e Lucival Salgueiro, que muitas vezes mesmo contra a minha vontade e ignorância, sempre fizeram um exaustivo esforço para que eu nunca deixasse de buscar o caminho da sabedoria contida nos livros, na vida e principalmente na rua.

Aos meus grandes irmãos do mestrado e da vida: Davis Magalhães, Raphael Omena e Yanderson de Lima. Nesses dois anos, o conjunto das vezes que vocês literalmente tiveram que desenhar os simples fatos para que eu conseguisse entender é não-enumerável. Vocês foram e são incríveis. Muito obrigado pelas incontáveis horas de estudos, as incontáveis explicações e principalmente todos os momentos de companheirismo, em especial, quando comecei a fazer o duro paralelo entre estudos e trabalho. Sem o apoio, dedicação e paciência dos senhores eu teria sem dúvidas ficado no meio do caminho.

Aos grandes responsáveis pela minha graduação, e portanto sem esses não existiria a possibilidade do mestrado: Raquel Paes, Eric Alberto, Arthur Wayne e Pedro Henrique (para este deixo aqui minhas infinitas desculpas por não tê-lo agradecido em outra ocasão), muito obrigado, principalmente por me darem a honra de fazer parte de suas vidas além da universidade.

A todos aqueles que fazem parte do IM-UFAL, em particular aos professores da pós-graduação, em especial ao professor Márcio Batista por mais uma orientação, inúmeras discussões e toda paciência que esses momentos exigiram.

Ao professor do IM-UFAL e hoje amigo Isnaldo Isaac, ao amigo e hoje professor do IM-UFAL Eduardo Santana e a todo o povo brasileiro que através da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) financiou continuamente este trabalho.

Ao Instituto Federal de Alagoas (IFAL) representado aqui pelo professor e grande amigo André Carlos e ao campus Santana do Ipanema-IFAL representado aqui na figura dos professores Levy Brandão, Anny Querubina, Thiago Martins, Anna Sofia, Daniel Fireman, Fabiana Menezes, Jonatas Xavier, Rodolfo Luna, Carlos Santos e Sebastião Júnior.

E finalmente a pessoa que além de ter feito grandes sacrifícios ao meu lado durante os últimos quatro anos, foi literalmente a pessoa responsável para que eu entrasse no mestrado, minha namorada Cilene dos Santos Silva. Muito obrigado! Lembro-me como se fosse hoje, assim que terminei a graduação, por conta das necessidades da vida a continuação dos meus estudos veio a tornar-se literalmente impossível. Jamais vou esquecer sua total discordância ao me ouvir relatar tais fatos e sua total disposição em fazer, e fez, o impossível para que eu continuasse nessa caminhada e portanto chegasse até aqui.

A todos vocês, mais uma vez muito obrigado!

“Malcom deixou de herança para nossa mudança uma trinca:
O povo preto tem que ter dinheiro, educação e auto-estima.
Ser patrões de nós mesmos, dar trabalho gerar emprego.
Sei que tu pode pensar que isso é obrigação do governo...
Mas nós sabe que depender desses cara....
Vou no meu corre, usando as armas que eu tenho fazendo arte,
espalhando cultura, vou fazer minha parte e mostrar pro sistema
que meu lugar não é dentro das viatura.
Atura, tamo acessando os lugares, e os cartões de acesso tá sendo a literatura.
Já falei em outros versos tio, estamos vivos!
E sei que pra eles isso é um perigo mas,
NÓS VAI CHEGAR! NOVA ERA OS PRETO TEM QUE CHEGAR!
NÓS JÁ SOFREU DEMAIS CHEGOU A HORA DE GANHAR!
e o que parecia impossível, hoje eu consigo avistar:
Eles vão ver que MESMO NO ESCURO, UM PRETO É CAPAZ DE BRILHAR!”

Trecho do Poema: Nova Era. Autor: Humberto Marques-Beká.

Resumo

Utilizando teoria de transição de fase apresentaremos um critério para determinação de interfaces mínimas. Para isso veremos como pré-requisito alguns resultados de teoria geométrica da medida e ao final, provaremos o critério para interface de perímetro mínimo conjecturado em GURTIN, E. e provado por MODICA, L.

Palavras Chave: Transição de Fase, Interface Mínima, Medida.

Abstract

Using phase transition theory we will present a criterium to determining minimal interfaces. In order to do this, we will look at the results of geometric measure theory as prerequisite and to conclude the work, we will present a beautiful argument due to MODICA to prove a well known conjecture of GURTIN.

Keywords: Phase Transition, Minimum Interface, Measurement.

Lista de símbolos

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.

$L^p(U)$	$\{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid \ (\int_U f^p(x)dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \text{com } f \text{ mensurável a Lebesgue}\}$
$V \subset\subset U$	V é pré-compacto, isto é, $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset U$.
$L^p_{loc}(U)$	$\{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^p(V) \text{ para todo } V \subset\subset U\}$
χ_E	Função característica do conjunto E.
$f\|_E$	Função f restrita ao conjunto E.
Df	Derivada da função f.
$\mathrm{spt}(f)$	Suporte da função f, isto é, $\mathrm{spt}(f)=\overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}}$.
$C(U)$	$\{f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ é contínua}\}$
$C_c(U)$	Conjunto das funções com suporte compacto em U.
$C^k(U)$	$\{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ é k vezes derivável em U e suas k derivadas são contínuas.$\}$
$C(U, \mathbb{R}^m)$	$\{f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid f = (f^1, \ldots, f^m) \text{ com } f^i \in \ C(U)\}$

Sumário

Introdução

A teoria de transição de fase teve seu início quando em 1893 no trabalho intitulado: **The Thermodynamic Theory of Capillarity Under The Hypothesis Of A Continuous Variation Of Density.** O físico prêmio nobel neerlandês **Johannes Diderik Van Der Waals** (1837-1923), conseguiu explicar o comportamento de um fluido mostrando que a energia livre do mesmo em um recipiente sob condições isotérmicas não depende apenas da densidade do fluido mas também da densidade do gradiente.

Em 1957, **John W. Carn e John E. Hilliard,** a luz das teorias desenvolvidas por Van der Waals pulicaram o artigo **Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy,** e nele conseguiram obter resultados importantes sobre a energia da interface entre fases e campos senoidais. A relevância dos estudo de **Canh-Hiliard** foi tamanha que hoje a teoria de transição de fase também pode ser dita teoria de **Van Der Waals-Cahn-Hilliard**.

Para entender como funciona as ideias gerais da teoria de transição de fase utilizadas nesse trabalho considere um fluído em condições isotérmicas limitado a um recipiente $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com energia livre de Gibbs, por unidade de volume, descrita por uma função $W_0(y)$ e densidade de distribuição $u(x)$. Um problema clássico está em determinar as condições de estabilidade do fluido, ou seja, minimizar a energia total do fluido que é dada pelo funcional

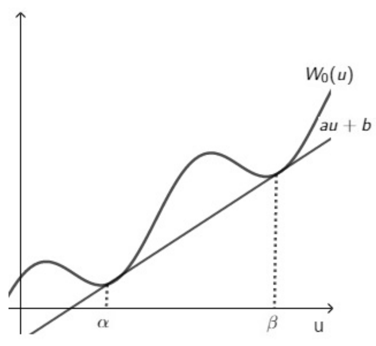
$$E(u) = \int_{\Omega} W_0(u(x))dx$$

entre todas as densidades de distribuição considere aquelas cuja massa total é m, ou seja

$$\int_{\Omega} u(x)dx = m.$$

Vejamos a intuição geométrica da situação.

Suponha que W_0 tem dois mínimos relativos como na figura abaixo



Observe que os valores de mínimo da função $W_0(x)$ também minimizam a função $W(u) = W_0(u) - (au+b)$ a não ser por uma constante. Se α e β são os mínimos **absolutos** de W, temos que o problema admite soluções constantes por partes no intervalo $[\alpha, \beta]$. Além disso, para $\alpha|\Omega| < m < \beta|\Omega|$, existem infinitas soluções do problema sem nenhum tipo de restrição da interface entre os conjuntos $\{x \in \Omega|\ u(x) = \alpha\}$ e $\{x \in \Omega|\ u(x) = \beta\}$. Sendo assim, não há como determinar quando a interface terá área mínima. A ideia dada pelos estudos de **Van Der Waals-Cahn-Hilliard** para contornar essa dificuldade é minimizar o funcional

$$E_\epsilon(u) = \int_\Omega \Big[\epsilon|Du|^2 + W_0(u) - (au + b)\Big]\, dx,$$

ou equivalente

$$\mathcal{E}_\epsilon(u) = \int_\Omega \Big[\epsilon|Du|^2 + W(u)\Big]\, dx$$

com isso, vemos de forma explícita que a energia da interface depende, de fato, da densidade do gradiente para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Neste trabalho, estudaremos o funcional acima definido e como consequência da dependência da densidade do gradiente, mostraremos que a interface entre os conjuntos $\{x \in \Omega|\ u(x) = \alpha\}$ e $\{x \in \Omega|\ u(x) = \beta\}$ dada pela minimização do funcional energia acima será de fato um conjunto de área mínima, pois advém de um conjunto de perímetro mínimo no sentido de medida dado pelo

Teorema (Modica, L.) Fixe $m \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha|\Omega| \leq m \leq \beta|\Omega|$, e suponha que para todo $\epsilon > 0$ a sequência de funções (u_ϵ) seja solução do problema variacional

$$\mathcal{E}_\epsilon(u_\epsilon) = \min\left\{\mathcal{E}_\epsilon(u) : u\ \in L^1(\Omega),\ u \geq 0,\ \int_\Omega u\ dx = m\right\}.$$

Se (ϵ_h) é uma sequência de números positivos tal que ϵ_h converge para zero e (u_{ϵ_h}) para uma função u_0 em $L^1(\Omega)$ quando $h \to +\infty$, então
i. $W(u_0(x)) = 0$, isto é, $u_0(x) = \alpha$ *ou* $u_0(x) = \beta$ q.t.p.
ii. O conjunto $E = \{x \in \Omega : u_0(x) = \alpha\}$ é solução do problema variacional, isto é,

$$P_\Omega(E) = \min\left\{P_\Omega(F) : F \subset \Omega \ mensur\acute{a}vel\ e\ \ |F| = \frac{\beta|\Omega| - m}{\beta - \alpha}\right\};$$

iii. $2c_0 P_\Omega(E) = \lim\limits_{h\to\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\epsilon_h}(u_{\epsilon h})$.

1 Resultados Preliminares

Neste capítulo veremos os principais resultados da teoria da medida, pois estes serão base para o pleno entendimento dos capítulos seguintes. Para maiores a respeito dos resultados expostos neste capítulo vide capítulo 1 da referência Evans-Gariepy.

1.1 Medida e Integração

1.1.1 Medida

Definição 1.1. *Dado um conjunto X, dizemos que a função $\mu : 2^X \longrightarrow [0,\infty]$ é uma medida em X quando:*
i. $\mu(\emptyset) = 0$;
ii. *Dada uma sequência $\{A_k\}_{k=0}^{\infty} \in 2^X$ tal que $A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ tem-se*

$$\mu(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k).$$

Definição 1.2. *Um conjunto $A \subseteq X$ é dito μ-mensuarável se para cada $B \subseteq X$ tem-se*

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A).$$

Teorema 1.1 (Propriedades elementares da medida). *Seja μ uma medida em X.*
i. *Se $A \subseteq B \subseteq X$ então $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
ii. *Um conjunto A é $\mu-$mensurável se, e somente se $X - A$ é $\mu-$mensurável.*
iii. *Os conjuntos $\emptyset$ e X. Mais geralmente, se $\mu(A) = 0$ então A é $\mu-$mensurável.*
iv. *Se C é um subconjunto qualquer de X, então para cada subconjunto mensurável $\mu|_C$ também é mensurável.*

Prova 1.1. *Ver Evans-Gariepy* □

Teorema 1.2 (Sequências de conjuntos mensuráveis). *Seja $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos $\mu-$mensuráveis.*
i. *Os conjuntos $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ são $\mu-$mensuráveis.*
ii. *Se os conjuntos $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ são disjuntos, então*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

iii. *Se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots A_k \subseteq A_{k+1} \ldots$, então*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

iv. *$A_1 \supset \dots A_k \supset \dots$ e $\mu(A_1) < +\infty$, então*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Prova 1.2. *Ver Evans-Gariepy pág. 3.* □

Definição 1.3. *Uma coleção $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ é dita uma $\sigma-$álgebra de X, quando:*
i. $\emptyset,\ X \in \mathcal{A}$
ii. *Se $A \in \mathcal{A}$, então $X - A \in \mathcal{A}$;*
iii. *Se $A_k \in \mathcal{A}(k = 1, \dots)$ então*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Teorema 1.3 (Conjuntos mensuráveis e $\sigma-$álgebra). *Se μ é uma medida no conjunto não vazio X, então a coleção de todos os subconjuntos mensurávéis de X, formam uma $\sigma-$álgebra.*

Prova 1.3. *Aplicação direta do teorema anterior.* □

Definição 1.4. *Se $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ é uma coleção não vazia de subconjuntos de X, a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{C}$, denotada por*

$$\sigma\left(\mathcal{C}\right)$$

é a menor $\sigma-$álgebra que contém $\mathcal{C}$.

Definição 1.5.
i. *A $\sigma-$álgebra de Borel do $\mathbb{R}^n$ é a $\sigma-$álgebra que contém todos os abertos do $\mathbb{R}^n$.*
ii. *Uma medida μ em $\mathbb{R}^n$ é dita de Borel se todo conjunto de Borel, isto é, todo conjunto da $\sigma-$álgebra de Borel for $\mu-$mensurável.*

Definição 1.6.
i. *Uma medida μ em X é dita regular se para cada conjunto $A \subseteq X$ existe um conjunto $\mu-$mensurável B tal que $A \subseteq B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.*
ii. *Uma medida μ em $\mathbb{R}^n$ é dita Borel regular se μ é Borel e para cada conjunto de Borel $A \subseteq \mathbb{R}^n$ existe um conjunto de Borel B tal que $A \subseteq B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.*
iii. *Uma medida μ em $\mathbb{R}^n$ é dita de Radon se μ é Borel regular e para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ ter-se $\mu(K) < +\infty$.*

Teorema 1.4. *Seja μ uma medida regular em X. Se $A_1 \subseteq \dots A_k \subseteq A_{k+1} \dots$ (não necessariamente mensuráveis), então*

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Prova 1.4. *Ver Evans-Gariepy.* □

Teorema 1.5 (**Medidas de Radon e restrição**). *Seja μ uma medida de Borel regular em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é $\mu-$mensurável e $\mu(A) < +\infty$. Então*

$$\mu|_A$$

é uma medida de Radon.

Prova 1.5. *Ver Evans-Gariepy pág. 10.* □

1.1.2 Funções Mensuráveis

Sejam X e Y espaços topológicos e μ uma medida em X.

Definição 1.7.
i. *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita $\mu-$mensurável se para cada aberto $U \subseteq Y$, o conjunto*

$$f^{-1}(U)$$

é $\mu-$mensurável.
ii. *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita Borel mensurável se para cada aberto $U \subseteq Y$, o conjunto*

$$f^{-1}(U)$$

é Borel mensurável.

Teorema 1.6 (**Imagem Inversa**).
i. *Se $f : X \longrightarrow Y$ é $\mu-$mensurável, então $f^{-1}(B)$ é $\mu-$mensurável para cada conjunto de Borel $B \subseteq Y$.*
ii. *Uma função $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ é $\mu-$mensurável se, e somente se $f^{-1}([-\infty, a))$ é $\mu-$mensurável para cada $a \in \mathbb{R}$.*
iii. *Se $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^m$ são funções mensurávéis, então*

$$(f, g) : X \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$$

é $\mu-$mensurável.

Prova 1.6. *Ver Evans-Gariepy pág. 16.* □

Teorema 1.7 (**Propriedades das funções mensuráveis**).
i. *Se $f, g : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ são $\mu-$mensuráveis então*

$$f + g,\ \ fg,\ \ |f|,\ \min(f, g) \text{ e} \max(f, g)$$

o são $\mu-$mensuráveis. Além disso se $g \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é $\mu-$mensurável.
ii. *Se $f_k : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ é $\mu-$mensurável ($k = 1, \ldots.$), então*

$$\inf_{k\geq 1} f_k,\ \sup_{k\geq 1} f_k,\ \liminf_{k\to+\infty} f_k \ e\ \limsup_{k\to+\infty} f_k$$

são $\mu-$mensuráveis.

Prova 1.7. *Ver Evans-Gariepy pág. 17.* □

Teorema 1.8 (**Decomposição de uma função mensurável não negativa**). *Suponha que $f : X \longrightarrow [0, \infty]$ é $\mu-$mensurável. Então existem conjuntos $\mu-$mensuráveis $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ de X tais que*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\chi_{A_k}$$

.

Prova 1.8. *Ver Evans-Gariepy pág. 19* □

Teorema 1.9 (**Aproximação por funções continuas**). *Seja μ Borel regular em $\mathbb{R}^n$ e suponha que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é $\mu-$mensurável. Suponha $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mu-$mensurável tal que $\mu(A) < +\infty$ e fixe $\epsilon > 0$. Então existe uma função contínua $\bar{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que*

$$\mu\left(\left\{x \in A | \bar{f}(x) \neq f(x)\right\}\right) < \epsilon$$

Prova 1.9. *Ver Evans-Gariepy pág. 22* □

1.1.3 Integração

Definição 1.8. *Uma função $g : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ é chamada função simples se $g(X)$ for enumerável.*

Definição 1.9. *Se g é uma função não negativa, simples e $\mu-$mensurável, definimos a integral de g com relação a μ por*

$$\int g d\mu := \sum_{0\leq y\leq\infty} y\mu(g^{-1}\{y\}).$$

Denotando por $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = \max\{-f, 0\}$, temos que $f = f^+ - f^-$. Dito isto, temos a seguinte definição.

Definição 1.10.
i. *Se g é uma função simples, $\mu-$mensurável e $\int g^+ d\mu < \infty$ ou $\int g^+ d\mu < \infty$, dizemos que g é uma função $\mu-$integrável simples e definimos*

$$\int g d\mu := \int g^+ d\mu + \int g^+ d\mu$$

Tal expressão pode ser igual a $\pm\infty$. Deste modo, tempos que se g é $\mu-$integrável simples, então

$$\int g d\mu := \sum_{-\infty\leq y\leq\infty} y\mu(g^{-1}\{y\}).$$

Definição 1.11.

i. *Seja $f : X \longrightarrow [-\infty,\infty]$. Definimos a integral superior e inferior de f respectivamente do seguinte modo*

$$\int^* f d\mu := \inf\left\{\int g d\mu \ |g \text{ é } \mu - integrável,\ simples,\ g \geq f\ q.t.p\right\}$$

$$\int_* f d\mu := \sup\left\{\int g d\mu \ |g \text{ é } \mu - integrável,\ simples,\ g \leq f\ q.t.p\right\}.$$

ii. *Uma função $\mu-$mensurável $f : X \longrightarrow [-\infty,\infty]$ é dita $\mu-$integrável quando*

$$\int^* f d\mu = \int_* f d\mu$$

nesse caso denotamos por

$$\int f d\mu := \int^* f d\mu = \int_* f d\mu$$

Definição 1.12.

i. *Uma função $f : X \longrightarrow [-\infty,\infty]$ é dita $\mu-$somável se f é $\mu-$integrável e*

$$\int |f| d\mu < +\infty.$$

ii. *Uma função $f : X \longrightarrow [-\infty,\infty]$ é dita localmente $\mu-$somável se $f|_K$ é $\mu-$somável para todo conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Definição 1.13. *Dizemos que ν é uma medida com sinal em $\mathbb{R}^n$ se existe uma medida de Radon μ e uma função localmente $\mu-$somável $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\nu(K) = \int_K f d\mu$$

para todo conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

Observação: A medida com sinal ν associada a medida de Radon μ e a função $\mu-$somável f por

$$\nu = \mu\lfloor f$$

Teorema 1.10 (Lema de Fatou). *Seja $f_k : X \longrightarrow [0,\infty]$ uma sequência de funções $\mu-$mensuráveis $(k = 1,\ldots)$. Então*

$$\int \liminf_{k\to\infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k d\mu$$

Prova 1.10. *Ver Evans-Gariepy pág. 26.* □

Teorema 1.11 (**Convergência Monótona**). *Seja* $f_k : X \longrightarrow [0,\infty]$ *uma função* $\mu-$*mensurável* $(k = 1, \ldots)$.*, com*

$$f_1 \leq \ldots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \ldots.$$

Então,

$$\lim_{k\to+\infty} \int f_k d\mu = \int \lim_{k\to+\infty} f_k d\mu.$$

Prova 1.11. *Ver Evans-Gariepy pág. 27.* □

Teorema 1.12 (**Convergência Dominada**). *Sejam* g, f *funções* $\mu-$*somáveis com* $g \geq 0$ *e* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *uma sequência de funções mensuráveis tal que*

$$f_k \longrightarrow f, \;\; \mu - q.t.p$$

e

$$|f_k| \leq g.$$

Então

$$\lim_{k\to+\infty} \int |f_k - f| d\mu = 0.$$

Prova 1.12. *Ver Evans-Gariepy pág. 28.* □

1.1.4 Medida produto, Teorena de Fubini e Medida de Lebesgue

Considerando X e Y, conjuntos não vazios, veremos os resultados basilares para a compreensão da fórmula da Coarea, teorema muito útil no desenvolvimento do capítulo 3 deste trabalho.

Definição 1.14 (**Medida Produto**). *Sejam* μ *uma medida em* X *e* ν *uma medida em* Y. *Definimos a medida produto* $\mu \times \nu : 2^{X\times Y} \longrightarrow [0,\infty]$ *como sendo*

$$(\mu \times \nu)(S) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i) \right\}$$

para cada $S \subseteq X \times Y$, *com o ínfimo sendo tomado sobre todas as coleções de subconjuntos* $\mu-$*mensuráveis* $A_i \subseteq X$ *e* $\nu-$*mensuráveis* $B_i \subseteq Y$ *tais que*

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i).$$

Definição 1.15.

i. *Um subconjunto* $A \subseteq X$ *é* $\sigma-$*finito com respeito a* μ *se podemos escrever*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

onde B_k é $\mu-$mensurável e $\mu(B_k) < +\infty$ para $k = 1, 2, \ldots$.

ii. *Uma função $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ é dita $\sigma-$finita com respeito a μ se f é $\mu-$mensurável e $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ for $\sigma-$finito com respeito a μ.*

Teorema 1.13 (**Fubini**). *Seja μ uma medida em X e ν uma medida em Y.*

i. *Então $\mu \times \nu$ é uma medida regular, mesmo que μ e ν, não sejam.*

ii. *Se $A \subseteq X$ é $\mu-$mensurável e $B \subseteq Y$ é $\nu-$mensurável, então o produto cartesiano $A \times B$ é $(\mu \times \nu)-$mensurável e*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

iii. *Se $S \subseteq X \times Y$ é $\sigma-$finito com respeito a $\mu \times \nu$, então a secção transversal*

$$S_y := \{x \mid (x, y) \in S\}$$

é $\mu-$mensurável para $\nu-$q.t.p, e

$$S_x := \{y \mid (x, y) \in S\}$$

é $\nu-$mensurável para $\mu-$q.t.p, $\mu(S_y)$ é $\nu-$integrável e $\nu(S_x)$ é $\mu-$integrável. Além disso,

$$(\mu \times \nu)(S) = \int_Y \mu(S_x) d\nu(y) = \int_X \nu(S_y) d\mu(x).$$

iv. *Se f é $(\mu \times \nu)-$mensurável e f é $\sigma-$finita com respeito a $\mu \times \nu$(em particular, se f é $(\mu \times \nu)-$ somável), então a aplicação*

$$y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

é $\nu-$integrável, e a aplicação

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

é $\mu-$integrável. Além disso

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_X f(x, y) d\mu(x)\right] d\nu(y) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\nu(y)\right] d\mu(x.)$$

Prova 1.13. *Ver Evans-Gariepy pág. 31.* □

Definição 1.16 (**Medida de Lebesgue**).

i. *A Medida de Lebesgue unidimensional em $\mathbb{R}$ é definida do seguinte modo*

$$\mathcal{L}^1(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} diam\ C_i \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,\ C_i \subseteq \mathbb{R}\right\},$$

para todo $A \subseteq \mathbb{R}$.

ii. *Indutivamente, definimos a **Medida de Lebesgue** n **-dimensional** $\mathcal{L}^n$ em $\mathbb{R}^n$ do seguinte modo*

$$\mathcal{L}^n := \mathcal{L}^{n-1} \times \mathcal{L}^1 = \underbrace{\mathcal{L}^1 \times \ldots \times \mathcal{L}^1}_{n-vezes}$$

Teorema 1.14 (**Caracterização da Medida de Lebesgue**).
Para todo $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *temos*

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n-k} \times \mathcal{L}^k.$$

Prova 1.14. *Ver Evans-Gariepy pág. 35.* □

1.1.5 Derivadas, Integração de Derivadas, Decomposição de Lebesgue e Representação de Riez.

Sejam μ e ν medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.17. *Para cada ponto* $x \in \mathbb{R}^n$ *defina*

$$\overline{D}_\mu \nu(x) := \begin{cases} \limsup\limits_{r \to 0} \dfrac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r)}, & \text{se } \mu(B(x,r)) > 0 \text{ para todo } r > 0 \\ +\infty, & \text{se } \mu(B(x,r)) = 0 \text{ para algum } r > 0 \end{cases}$$

e

$$\underline{D}_\mu \nu(x) := \begin{cases} \liminf\limits_{r \to 0} \dfrac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r)}, & \text{se } \mu(B(x,r)) > 0 \text{ para todo } r > 0 \\ +\infty, & \text{se } \mu(B(x,r)) = 0 \text{ para algum } r > 0 \end{cases}$$

Definição 1.18 (**Derivada da Medida**). *Se* $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) < +\infty$, *dizemos que* ν *é diferenciável com respeito a* μ *em* x *e escrevemos*

$$D_\mu \nu(x) := \overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x).$$

$D_\mu \nu$ *significa a derivada da medida* ν *com respeito a medida* μ.

Teorema 1.15 (**Derivada da Medida**). *Seja* μ *e* ν *medidas de Radon em* $\mathbb{R}^n$. *Então*
i. $D_\mu \nu$ *existe e é finita* $\mu - q.t.p$;
ii. $D_\mu \nu$ *é* $\mu-$*mensurável.*

Prova 1.15. *Ver Evans-Gariepy pág. 48.* □

Definição 1.19. *Suponha* μ *e* ν *são medidas de Borel em* $\mathbb{R}^n$
i. *A medida* ν *é dita absolutamente contínua com respeito a medda* μ *e escrevemos*

$$\nu << \mu,$$

se $\mu(A) = 0$ *implicar que* $\nu(A) = 0$ *para todo* $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
ii. *A medida* ν *é dita mutualmente singular com respeito a* μ *e escrevemos*

$$\nu \perp \mu,$$

se existe um conjunto de Borel $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\mu(\mathbb{R}^n - B) = \nu(B) = 0.$$

Teorema 1.16 (Radon-Nikodym). *Sejam μ e ν medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$, com $\nu << \mu$. Então*

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \; d\mu$$

para todo conjunto $\mu-$mensurável $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Prova 1.16. *Ver Evans-Gariepy pág. 50.* □

Teorema 1.17 (Decomposição de Lebesgue). *Sejam μ e ν medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$.*
i. *Então,*

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s$$

onde ν_{ac} e ν_s são medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$ com

$$\nu_{ac} << \mu, \;\; \nu_s \perp \mu.$$

ii. *Além disso,*

$$D_\mu \nu = D_\mu \nu, \;\; D_\mu \nu_s = 0 \;\; \mu - q.t.p$$

e consequentemente

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \; d\mu + \nu_s(A)$$

para cada conjunto de Borel $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.18 (Representação de Riez). *Seja*

$$L : C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$$

um funcional linear satisfazendo

$$\sup \{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), |f| \leq 1, \;\; spt(f) \subseteq K\} < +\infty$$

para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Então existe uma medida de Radon μ e uma função $\mu-$mensurável $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$|\sigma(x)| = 1 \;\; \mu - q.t.p$$

e

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} < f, \sigma > d\mu$$

para toda $f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

1.1.6 Medida de Hausdorff

Definida a medida de Lebesgue e algumas de suas propriedades, vejamos agora a medida de Hausdorff, ou seja, uma medida um pouco mais geral que a medida de Lebesgue, pois através dela, além de conseguirmos medir os conjuntos que já são mensuráveis à Lebesgue, com ela é possível determinar a medida de outros conjuntos, que nesse sentido são mais finos que os conjuntos mensuráveis à Lebesgue

Definição 1.20 (**Medida de Hausdorff**).

i. *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}^n,\ 0 \leq s \leq +\infty,\ 0 < \delta \leq \infty$. *Escrevemos*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^s \ \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta \right\},$$

onde

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}.$$

e

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

ii. *Para todo conjunto A e cada número s como acima defina*

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

$\mathcal{H}^s(A)$ *é dita a* ***medida de Hausdorff s-dimensional****.*

Teorema 1.19 (**Regularidade de** $\mathcal{H}^s$)**.** *Para todo* $0 \leq s < +\infty$ $\mathcal{H}^s$ *é Borel regular em* $\mathbb{R}^n$.

Prova 1.17. *Ver Evans-Gariepy pág. 82.* □

Teorema 1.20 (**Propriedades da Medida de Hausdorff**)**.**
i. $\mathcal{H}^0$ *é uma medida de contagem.*
ii. $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$.
iii. $\mathcal{H}^s = 0$ *em* $\mathbb{R}^n$ *para* $s > n$.
iv. $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$
v. $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ *para toda isometria* $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *e* $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Prova 1.18. *Ver Evans-Gariepy pág. 84.* □

Definição 1.21. *A dimensão de Hausdorff de um conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *é definida do seguinte modo:*

$$H_{dim}(A) := \inf \left\{ 0 \leq s < +\infty \mid \mathcal{H}^s(A) = 0 \right\}.$$

Teorema 1.21 (**Medida Hausforff versus Medida de Lebesgue**)**.** *Para todo* $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Definição 1.22 (**Função Lipschitz**)**.**

i. *Uma função* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *e dita Lipschitz se existe uma constante* C *tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|, \text{ para todo } x, y \in A.$$

ii. *A menor constante* C *satisfazendo o item anterior é denominada a constante de Lipschitz da função* f *e denotada por*

$$Lip(f) := \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \mid x, y \in A, x \neq y \right\}.$$

iii. *Uma função* $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é dita* ***localmente Lipschitz*** *se* $f|_K$ *é Lipschitz para todo compacto* $K \subseteq A$.

Teorema 1.22 (**Extensão de uma Aplicação Lipschitz**)**.** *Sejam* $A \subset \mathbb{R}^n$ *e* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *Lipschitz. Então existe uma função* $\overline{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que*
i. $\overline{f} = f$ *em* A.
ii. $Lip(\overline{f}) \leq \sqrt{m}\ Lip(f)$.

Teorema 1.23 (**Teorema de Radamacher**)**.** *Se* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é localmente Lipschitz, então* f *é diferenciável em* $\mathcal{L}^n-$*q.t.p.*

Prova 1.19. *Ver Evans-Gariepy pág. 103.* □

Definição 1.23. *Para* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *e* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *escrevemos*

$$Graf(f; A) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m};$$

$Graf(f; A)$ *é dito o gráfico de* f *restrito a* A.

Teorema 1.24 (**Medidas de Hausdorff e Gráficos**)**.** *Suponha que* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *e* $\mathcal{L}^n(A) > 0$.
i. *Então* $H_{dim}(Graf(f; A)) \geq n$.
ii. *Se* f *é Lipschitz,* $H_{dim}(Graf(f; A)) = n$.

1.1.7 Fórmula da Coárea

Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, com $(n \geq m)$ e $f = (f^1, \ldots, f^m)$. Nós escrevemos a derivada de f como sendo

$$Df = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x_1} & \cdots & f^m_{x_n} \end{pmatrix}$$

sempre que Df existir. Além disso, denotamos o Jacobiano de f do seguinte modo

$$Jf = \sqrt{\det(Df^t \circ Df)}$$

onde Df^t denota a transposta da matriz Df.

Teorema 1.25 (**Fórmula da Coárea**). *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Lipschitz $n \geq m$. Então para cada conjunto $\mathcal{L}^n-$mensurável $A \subseteq \mathbb{R}^n$,*

$$\int_A Jf dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(y))dy.$$

Prova 1.20. *Ver Evans-Gariepy pág. 134.* □

Teorema 1.26 (**Integração em conjuntos de nível**). *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, com $n \geq m$. Então para cada função $\mathcal{L}^n$-somável $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,*
i. *$g|_{f^{-1}\{y\}}$ é $\mathcal{H}^{n-m}$-somável $\mathcal{L}^n$-q.t.p.*
ii.

$$\int_A gJf dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} gd\mathcal{H}^{n-m}\right] dy.$$

Prova 1.21. *Ver Evans-Gariepy pág. 139.* □

Teorema 1.27 (**Integração em conjuntos de nível para funções Lipschitz**). *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Lipschitz.*
i. *Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df|dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\})dt$$

ii. *Se $essinf|Df| > 0$ e $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{L}^n$-somável então*

$$\int_{\{f>t\}} gdx = \int_t^\infty \left(\int_{f=s} \frac{g}{|Df|}\right) ds.$$

Prova 1.22. *Ver Evans-Gariepy pág. 141.* □

2 Funções de Variação Limitada

Neste capítulo, trataremos da classe das funções de variação limitada, isto é, funções que tem a uma noção de derivada usando o conceito de medida de Radon para tal. O fato dessas funções terem uma noção de derivada associada a uma medida de Radon, nos dá uma direção na procura de conjuntos que sejam minimizantes num certo sentido, como veremos no decorrer deste trabalho.

2.1 Definição e Teorema de Caracterização

Para todos os resultados deste capítulo consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e assumiremos que o leitor tem os conhecimentos elementares referentes aos espaços $L^P(\Omega)$.

Definição 2.1. *Seja $f \in L^1(\Omega)$.*
i. *Dizemos que f tem **variação limitada** em Ω quando*

$$\sup\left\{\int_\Omega f div\ g dx : g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n),\ |g(x)| \leq 1\right\} < +\infty.$$

O conjunto das funções com variação limitada em Ω será denotado por $BV(\Omega)$.
ii. *Dizemos que um conjunto $\mathcal{L}^n$-mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$ tem **perímetro finito** em Ω se $\chi_E \in BV(\Omega)$.*

Conhecimentos básicos de análise funcional que pode ser encontrado em [9].

Definição 2.2. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.*
i. *Dizemos que f tem **variação localmente limitada** em Ω se para cada conjunto aberto $U \subset\subset \Omega$*

$$\sup\left\{\int_\Omega f div\ g dx : g \in C_c^1(U, \mathbb{R}^n),\ |g(x)| \leq 1\right\} < +\infty.$$

O conjunto das funções com variação localmente limitada em Ω será denotado por $BV_{loc}(\Omega)$.
ii. *Dizemos que um conjunto $\mathcal{L}^n$-mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$ tem **perímetro localmente finito** em Ω se $\chi_E \in BV_{loc}(\Omega)$.*

Definida a variação limitada de uma função, passemos agora a um teorema de caracterização da funções de varição localmente limitada.

Teorema 2.1 (Caracterização Local). *Suponha que $f \in BV_{loc}(\Omega)$.*
Então existe uma medida de Radon μ em Ω e uma função μ-mensurável

$$\sigma : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que

i. $|\sigma(x)| = 1$ μ *q.t.p e*

ii. *Para toda* $g \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *tem-se*

$$\int_\Omega f divg dx = -\int_\Omega g \cdot \sigma d\mu.$$

Prova 2.1. *Ver Evans-Gariepy pág. 195.* □

NOTAÇÃO.

i. Dada uma função $f \in BV_{loc}(\Omega)$ denotamos por $\|Df\|$ a medida μ e definiremos

$$[Df] := \|Df\| \lfloor \sigma$$

e assim na notação do Teorema 2.1.1

$$\int_\Omega f divg dx = -\int_\Omega g \cdot \sigma d\mu = -\int_\Omega g \cdot d\,[Df]\,.$$

ii. Em particular, se $f = \chi_E$ e E tem perímetro localmente finito, denotaremos por $\|\partial E\|$ para a medida de Radon μ e definiremos

$$\nu_E := -\sigma$$

e assim na notação do Teorema 2.1.1

$$\int_\Omega \chi_E divg dx = \int_E divg dx = \int_E d \cdot \nu_E d\|\partial E\|.$$

iii. Se $f \in BV_{loc}(\Omega)$, escrevemos

$$\mu^i = \|Df\| \lfloor \sigma^i, \ (i = 1, \ldots, n)$$

onde $\sigma = (\sigma^i, \cdots, \sigma^n)$. Pelo Teorema de Decomposição de Lebesgue podemos escrever cada medida μ^i do seguinte modo

$$\mu^i = \mu^i_{ac} + \mu^i_s$$

onde

$$\mu^i_{ac} << \mathcal{L}^n, \quad \mu^i_s \perp \mathcal{L}^n.$$

Então

$$\mu^i_{ac} = \mathcal{L}^n \lfloor f_i$$

para $f_i \in BV_{loc}(\Omega)(i = 1, \cdots, n)$.

Dito isto, fica compreensível a seguinte notação:

$$\begin{array}{lcl} f_{x_i} & := & f_i \quad (i = 1, \ldots, n); \\ Df & := & (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}); \\ [Df]_{ac} & := & (\mu^1_{ac}, \ldots, \mu^1_{ac}) = \mathcal{L}^n \lfloor Df; \\ [Df]_s & := & (\mu^1_s, \ldots, \mu^1_s). \end{array}$$

Portanto,

$$[Df] = [Df]_{ac} + [Df]_s = \mathcal{L}^n \lfloor Df + [Df]_s$$

de modo que $Df \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é a densidade da parte absolutamente contínua de $[Df]$. Visto o que foi dito acima, podemos organizar tais fatos do seguinte modo:

i. $\|Df\|$ é a medida de variação de f, $\|\partial E\|$ é a medida perímetro de E e $\|\partial E\|(\Omega)$ é a medida do perímetro de E em Ω

ii. No Teorema 2.1.1 a medida de Radon μ advém do Teorema da Representação de Riez, e sendo assim, podemos escrever

$$\|Df\|(V) = \sup\left\{\int_\Omega f div\ gdx : g \in C^1_c(V, \mathbb{R}^n),\ |g(x)| \leq 1\right\}$$
$$\|\partial E\|(V) = \sup\left\{\int_E div\ gdx : g \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n),\ |g(x)| \leq 1\right\}$$

para todo aberto $V \subset\subset \Omega$.
Utilizando de forma direta o teorema de caracterização, conseguimos um importante corolário que diz respeito à convergência da seminorma $\|Df\|$, como segue

Teorema 2.2 (**Semicontinuidade Inferior**). *Suponha que* $\{f_k\}_{k=1}^\infty \in BV_{loc}(\Omega)$.
Se

$$f_k \longrightarrow f \ em\ L^1_{loc}(\Omega),$$

então

$$\|Df\|(\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(\Omega).$$

Prova 2.2. *Ver Evans-Gariepy pág. 199.* □

A seguir, utilizando a semicontinuidade inferior, vamos demostrar que $BV(\Omega)$ além de possuir uma norma natural, dada por:

$$\|f\|_{BV(\Omega)} := \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|Df\|(\Omega),$$

e munido com está norma, $BV(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Definição 2.3 (**Função suavizante(Mollifers)**). *Uma função $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita suavizante se*

i. $\eta(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ii. $spt(\eta) \subseteq B(0,1)$.

iii. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1.$

Adicionando as condições:
iv. $\eta(x) \geq 0$.
v. $\eta(x) = \rho(|x|)$, para uma função $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, dizemos que η é uma função suavizante positiva.

Exemplo 2.1 (**Exemplos Clássicos de funções suavizantes**). ***i.***(*Função de Cauchy infinitamente diferenciável.*)

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \\ C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1 \end{cases}$$

ii.(*Função Núcleo de Poisson.*) *Definida sobre o semi-plano positivo e muita usada na teoria da equações diferencias parciais.*

$$P_y(x) = \frac{\pi^{-1}}{x^2 + y^2}$$

iii.(*Função Delta de Dirac*)

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Para mais detalhes a repeito dos exemplos acima ver Stain-Skarmachi [3] pág. 104-108.

Dada uma função suavizante $\eta(x)$, observe que pelo teorema de mudança de variável, a nova função

$$\eta_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

também é uma função suavizante. Dito isto, vamos definir uma família de funções suavizantes, via um tipo de convolução $\eta_\epsilon * f$ de uma função suavizante η_ϵ com uma função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ do seguinte modo

$$f_\epsilon := \eta_\epsilon * f = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)f(y)dy$$

e assim, aplicando o teorema de mudança de variável duas vezes temos

$$f_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right) f(x)dy = (-1)^n\epsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{z}{\epsilon}\right) f(x-z)dz = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(w)f(x+\epsilon w)dw$$

para todo $x \in \Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$

Teorema 2.3 (**Propriedades das funções suavizantes(Mollifers)**). ***i.*** *$f_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f_\epsilon \longrightarrow f$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $f_\epsilon \longrightarrow f$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$;*
ii. *$A \leq f(x) \leq B$ para todo x, $A \leq f_\epsilon(x) \leq B$;*

iii *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_\epsilon g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f g_\epsilon dx$;* ***iv.*** *Se $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$, então $\dfrac{\partial f_\epsilon}{\partial x_k} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right)_\epsilon$;*
v. *$spt\ f \subseteq X \Rightarrow spt\ f_\epsilon \subseteq X_\epsilon = \{x \in X : dist(x, \partial X) > \epsilon\}$*

Prova 2.3. *Ver Evans-Gariepy pág. 146 ou Giust pág. 2*

Teorema 2.4. *Se $f \in BV_{loc}(\Omega) \cap Ł^1(\Omega)$ então $f \in BV(\Omega)$ se, e somente se $\|Df\|(\Omega) < +\infty$.*

Prova 2.4. *Para mostrar que $\|f\|_{BV(\Omega)}$ é uma norma, não há dificuldades pois basta argumentarmos sobre as propriedades da norma $\|f\|_{L^1(\Omega)}$ juntamente com as propriedades da medida de variação de f. Passemos a completude de $BV(\Omega)$. Seja $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $BV(\Omega)$. Então pela definição de $\|f\|_{BV(\Omega)}$ temos que f_k induz uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$. Pelo fato de $L^1(\Omega)$ ser completo, existe $f \in L^1(\Omega)$ tal que $f_k \longrightarrow f$. Ora, $\{f_k\}$ é uma sequência de Cauchy em $BV(\Omega)$, consequentemente, $\|f\|_{BV(\Omega)}$ é limitada e assim $\|Df_k\|$ é limitada, logo pela semicontinuidade inferior $f \in BV(\Omega)$. Dito isso, falta mostrarmos apenas que $f_k \longrightarrow f$ em $BV(\Omega)$, isto é*

$$\|D(f_k - f)\|(\Omega) \longrightarrow 0.$$

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, pela definição de sequência de Cauchy, existe N_0 tal que

$$k, j > N_0 \Rightarrow \|f_k - f_j\|_{BV(\Omega)} < \epsilon \Rightarrow \|f_k - f_j\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon \text{ e } \|D(f_k - f_j)\| < \epsilon$$

Ora, $f_k \longrightarrow f$ em $L^1(\Omega)$ e assim $(f_k - f_j) \longrightarrow (f_k - f)$ em $L^1(\Omega)$, aplicando a semicontinuidade inferior mais uma vez temos que

$$\|D(f_k - f)\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|D(f_k - f_j)\| \leq \epsilon.$$

Logo, como ϵ é artibrário $f_k \longrightarrow f$ em $BV(\Omega)$ e portando $BV(\Omega)$ é completo. □

Vejamos agora alguns exemplos sobre os fatos até aqui discutidos.

Exemplo 2.2 (**Variação de funções** $W^{1,2}(\Omega)$)**.** *Suponha que* $f \in W^{1,2}(\Omega)$*. Então por integração por partes*

$$\int_\Omega f divg dx = -\int_\Omega g \cdot \nabla f dx \leq \int_\Omega |\nabla f| dx.$$

Agora vamos demonstrar a desigualdade contrária.

Para cada $\epsilon > 0$ *escolha* g *como sendo* $\frac{(\nabla f)_\epsilon}{|\nabla f|}$*, onde* $(\nabla f)_\epsilon = \eta_\epsilon * \nabla f$*, a convolução com uma função suavizante. Então*

$$\|Df\|(\Omega) \geq \int_\Omega f divg dx = \int_\Omega div\left(\frac{|(\nabla f)_\epsilon| f}{|\nabla f|}\right) dx + \int_\Omega \frac{|(\nabla f)_\epsilon|) \cdot \nabla f}{|\nabla f|} dx.$$

Fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$ *obtemos*

$$\|Df\|(\Omega) \geq \int_\Omega |\nabla f| dx$$

e portanto

$$\|Df\|(\Omega) = \int_\Omega |\nabla f| dx.$$

$\square$

Note que, pelo exemplo anterior, a função σ dada pelo teorema de caracterização local é exatamente

$$\sigma = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

e a medida μ é precisamente a medida de Lebesgue, isto é, $\mu = \mathcal{L}^n$.

Exemplo 2.3 (**Perímetro de um conjunto com fronteira suave**)**.** *Suponha que* E *tenha fronteira* C^2*. Então, pelo teorema da Divergência*

$$\int_\Omega \chi_E divg dx = \int_E divg dx = \int_{\partial E \cap \Omega} g \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} \leq |g| \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega)$$

consequentemente, se $|g| \leq 1$

$$\|\partial E\|(\Omega) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega) < +\infty.$$

Portanto, $\chi_E \in BV(\Omega)$ *e de fato*

$$\|\partial E\|(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega).$$

Logo, para garantir tal afirmação, basta mostrarmos que

$$\|\partial E\|(\Omega) \geq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega).$$

Com efeito, como E *tem fronteira* C^2*,* $\nu(x)$ *será uma aplicação de classe* C^1 *com* $|\nu(x)| = 1$*. Extendendo tal campo para todo o* $\mathbb{R}^n$*, via Teorema (1.1.22),* $N \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *e* $|N| \leq 1$

para todo x. Agora tomando $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $|\varphi| \leq 1$, fazendo $g = N\varphi$, e aplicando o teorema da Divergência temos

$$\int_E divg dx = \int_{\partial E} \varphi N \cdot N d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial E} \varphi d\mathcal{H}^{n-1}$$

e assim

$$\|\partial E\|(\Omega) \geq \sup\left\{\int_{\partial E} \varphi d\mathcal{H}^{n-1} : \varphi \in C_c^1(\Omega),\ |\varphi(x)| \leq 1\right\} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega).$$

Portanto

$$\|\partial E\|(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega).$$

□

Exemplo 2.4 (Perímetro de um conjunto sem fronteira suave). *Seja, $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ a sequência de todos os pontos do $\mathbb{R}^n$ com coordenadas racionais e*

$$B_k = B(x_k, 2^{-k}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_k - x| < 2^{-k}\}.$$

Definindo $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$, tem- se

$$|E| \leq \sum_{k=0}^\infty |B_k| = \alpha_n \sum_{k=0}^\infty 2^{-kn} = \sum_{k=0}^\infty \frac{\alpha_n}{1-2^{-n}}, \quad \alpha_n = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

onde Γ representa a função gama. Como $\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$, $\overline{E} = \mathbb{R}^n$, $|\partial E| = +\infty$ e consequentemente $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) = +\infty$. □

Vejamos agora um exemplo que nos mostra um caso onde a igualdade na semicontinuidade inferior não é atingida.

Exemplo 2.5. *Tome $\Omega = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ e $f_k(x) = \dfrac{sen(kx)}{k}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$. Assim*

$$\int_\Omega |f_k(x)| dx = \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} |sen(xk)| dx \leq \frac{2\pi}{k} \longrightarrow 0$$

e logo $f_k \longrightarrow 0$ em $L^1(\Omega)$. Por outro lado, para todo k a função $f_k(x)$ é suave, e consequentemente

$$\|Df_k\|(\Omega) = \int_0^{2\pi} |\cos(kx)| = 4.$$

□

2.2 Aproximação e Compacidade

As funções de variação limitada admitem uma aproximação por funções de classe $C^\infty(\Omega)$, dada pelo seguinte resultado.

Teorema 2.5 (**Aproximação Local por funções suave**). *Suponha que $f \in BV(\Omega)$. Então existe uma sequência de funções $\{f_k\} \subset BV(\Omega) \cap C(\Omega)$ tal que*
i. $f_k \longrightarrow f$ *em* $L^1(\Omega)$.
ii. $\|Df_k\|(\Omega) \longrightarrow \|Df\|(\Omega)$.

Prova 2.5. *Ver Evans-Gariepy pág. 199.* □
Vale salientar que a convergência das medidas em **ii** não garante a convergência em $BV(\Omega)$ da sequência f_k para a função f, isto é, $\|D(f_k - f)\|(\Omega) \longrightarrow 0$.

Definição 2.4. *Dizemos que um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ possui fonteira $\partial\Omega$ Lispchitz de classe C^k, ou simplesmente fronteira Lipschitz quando, para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existe $r > 0$ e uma aplicação Lipschitz $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^k tal que, aplicando rotação nos eixos coordenados, quando necessário tal que*

$$\Omega \cap Q(x_0, r) = \{y : \gamma(y_1 \ldots, y_{n-1}) < y_n\} \cap Q(x_0, r)$$

onde $Q(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$.

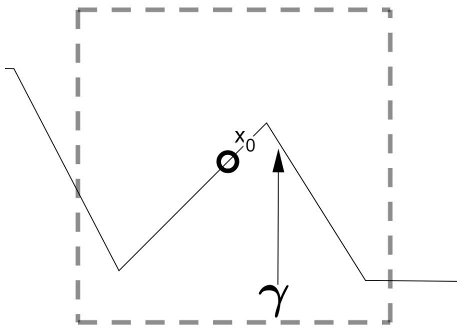


Figura: Fronteira Lipschitz

Lembremos que pela fórmula da Coarea, o volume do gráfico da aplicação γ é dado por

$$\mathcal{H}^{n-2}(Graf(\gamma)) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla\gamma|^2} dx.$$

A seguir, temos um resultado topológico a respeito do espaço $BV(\Omega)$.

Teorema 2.6 (**Compacidade em** $BV(\Omega)$). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado com fronteira froteira Lipschitz. Suponha que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ seja uma sequência em $BV(\Omega)$ satisfazendo*

$$\sup_k \|f_k\|_{BV(\Omega)} < +\infty.$$

Então existe uma subsequência $\left\{f_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ e uma função $f \in BV(\Omega)$ tal que

$$f_{k_j} \longrightarrow f \text{ em } L^1(\Omega).$$

A fórmula da Coarea nos diz que se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ com $n \geq m$ é uma aplicação Lipschitz e $A \subset \mathbb{R}^n$ é $\mathcal{L}^n-$mensurável, tem-se

$$\int_A Jf dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(y))dy.$$

As funções de variação limitada tem um bom comportamento neste sentido, por conta disso, é possível calcular a variação de uma função, via uma fórmula do tipo Coarea. Vejamos a seguir.

Definição 2.5. *Seja* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *definimos* $E_t = \{x \in \Omega : f(x) > t.\}$

Pela definição da medida de variação de $f \in BV(\Omega)$, a aplicação $t \to \|\partial E_t\|$ é $\mathcal{L}^1$ mensurável. Em consequência de tal fato tem-se

Teorema 2.7 (**Fórmula da Coarea para funções BV**)**.** *Se* $f \in BV(\Omega)$*, então* E_t *tem perímetro finito para todo* $t \in \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^1$ *q.t.p, e*

$$\|Df\|(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \|\partial E_t\|(\Omega)dt.$$

Note que se o lado esquerdo da igualdade for finito, pelo Teorema 2.1.3 $f \in BV(\Omega)$.

Prova 2.6. *Ver Evans-Gariepy pág. 212.* □

Vejamos agora um resultado que, assim como as propriedades das funções suavizantes, nos dá uma ótima noção a respeito do comportamento dessas funções.

Teorema 2.8. *Sejam* $f \in (\Omega)$ *e* $U \subset\subset \Omega$*, com* Ω *aberto, satisfazendo*

$$\|Df\|(\partial U) = 0.$$

Então, se f_ϵ *é uma família de funções suavizantes(extendidas para* 0 *fora de* Ω *se necessário) tem-se*

$$\|Df\|(U) = \lim_{\epsilon \to 0} \|Df_\epsilon\|(U).$$

Prova 2.7. *Ver Giusti pág. 12.*

Note que, pelo teorema acima, fazendo $U = \mathbb{R}^n$ temos

$$\|Df\|(\mathbb{R}^n) = \lim_{\epsilon \to 0} \|Df_\epsilon\|(\mathbb{R}^n).$$

Em particular pondo $f = \chi_E$, calculamos o perímetro de E do seguinte modo

$$\|\partial E\|(\mathbb{R}^n) = \lim_{\epsilon \to 0} \|\partial \chi_{\epsilon_E}\|(\mathbb{R}^n).$$

Na literatura clássica das funções de variação limitada as medidas de variação de uma função e a medida perímetro também são denotadas da seguinte forma

$$\|Df\|(\Omega) = \int_\Omega |Df|$$
$$\|\partial E\|(\Omega) = P_\Omega(E)$$

Desse modo a medida μ de Radon, dada pelo teorema estrutural é denotada por

$$\mu = Df$$

e assim,

$$\|Df\|(\Omega) = \int_\Omega |Df| = -\int_\Omega g \cdot \sigma d(Df).$$

Definição 2.6 (**Domínios de Extensão**). *Dizemos que um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio de extensão se $\partial\Omega$ é limitada e para cada conjunto aberto $A \supset \overline{\Omega}$ existe um aplicação $T : BV(\Omega) \longrightarrow BV(\mathbb{R}^n)$ linear e contínua satisfazendo:*
i. *$Tu = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus A$ para todo $u \in BV(\Omega)$*
ii. *$||DTu||(\partial\Omega) = 0$ para todo $u \in BV(\Omega)$*

Proposição 2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto com fronteira $\partial\Omega$ compacta e Lipschitz. Então Ω é um domínio de extensão.*

Prova 2.8. *Ver Ambrosio-Fusco-Pallara pág. 131.*

3 Critério Para Interface de Perímetro Mínimo

Neste capítulo provaremos nosso critério para classificar uma interface de perímetro mínimo. Nosso resultado é geométrico, embora sua demonstração seja analítica. Portanto, para tal feito, enunciaremos e provaremos dois lemas e suas consequências assim como duas proposições, que ao usarmos de forma encaixada concluirão nosso resultado.

3.1 Lemas

Lema 3.1 (Modica, L.). *Seja Ω um conjunto limitado e aberto no $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz contínua e E um subconjunto mensurável de Ω. Se E e $\Omega \setminus E$ contém uma bola aberta não-vazia, então existe uma sequência $\{E_h\}$ de subconjuntos abertos e limitados do $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave tais que:*

i. $\lim\limits_{h\to\infty} |(E_h \cap \Omega) \bigtriangleup E)| = 0$ *e* $\lim\limits_{h\to+\infty} P_\Omega(E_h) = P_\Omega(E)$.
ii. $|E_h \cap \Omega| = |E|$, *para h suficientemente grande.*
iii. $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_h \cap \partial\Omega) = 0$, *para h suficientemente grande.*

Prova 3.1. *Seja $u = \chi_E$, então pelo fato de Ω ser limitado $\partial\Omega$ é compacta. Logo, pela proposição 2.2.1 temos que existe uma função $\tilde{u} \in BV(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que:*

$$\tilde{u}|_\Omega = u \ \ e \ \|D\tilde{u}\|(\partial\Omega) = 0.$$

Seja (ϕ_ϵ) um sistema usual de mollifiers, isto é, $\phi_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon dx = 1$, spt $\phi_\epsilon \subset B(0,\epsilon)$ e $0 \le \phi_\epsilon \le 1$. Então definindo a sequência $u_\epsilon = \phi_\epsilon * u$ verificamos o seguinte fato

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon - \tilde{u}|dx = 0.$$

Com efeito, note que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\epsilon - \tilde{u}|dx = \int_E |u_\epsilon - \tilde{u}|dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus E} |u_\epsilon - \tilde{u}|dx.$$

A primeira integral é identicamente nula por conta da definição de (ϕ_ϵ); a segunda integral, usamos que fora de E a função $u(x)$ é identicamente nula(característica de E) e tal integral fica dada por

$$\int_{(\mathbb{R}^n\setminus E)\cap B(0,\epsilon)} |u_\epsilon| dx \leq |(\mathbb{R}^n \setminus E) \cap B(0,\epsilon)|$$

fazendo $\epsilon \to 0^+$ *concluímos o desejado.*

Dito isto, temos que quando $\epsilon \to 0^+$*a sequência* $\{u_\epsilon\}$*, converge q.t.p em* $L^1(\Omega)$ *para a função* $\tilde{u}$*, deste modo o conjunto dos pontos em que elas diferem, tem medida nula, ou seja,*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} |\{x \in \mathbb{R}^n : |u_\epsilon(x) - u(x)| \geq \eta\}| = 0 \tag{3.1}$$

para todo $\eta > 0$ *e logo*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |Du_\epsilon| dx = \|D\tilde{u}\|(\mathbb{R}^n)$$

Desta última igualdade e do fato da integral $\int_{\partial\Omega} |D\tilde{u}| = 0$ *juntamente com a semicontinuidade inferior aplicada aos conjuntos* Ω *e* $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$*, concluímos que*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\Omega} |Du_\epsilon| dx = \|D\tilde{u}\|(\Omega) = \|Du\|(\Omega)| = P_\Omega(E). \tag{3.2}$$

Tais argumentos nos dão um direcionamento para prova do lema, isto é, primeiro aproximaremos a função característica de E*, por funções suaves e passaremos a uma sequência* $\{E_\epsilon\}$ *que naturalmente vai aproximar o conjunto* E*, basta fazermos uma escolha adequada das funções* u_ϵ*.*

Passemos então para a prova do lema.

Por hipótese temos que existe $x_1 \in E$*,* $x_2 \in \Omega \setminus E$ *e um* $\delta_0 > 0$ *tal que as bolas* $B_1(x_1, \delta_0)$ *e* $B_2(x_2, \delta_0)$ *satisfazem* $B_1(x_1, \delta_0) \subset E$ *e* $B_1(x_2, \delta_0) \subset \Omega \setminus E$*. Sendo assim, façamos*

$$u_\epsilon = u \text{ em } B_1(x_1, \delta_0) \cup B_2(x_2, \delta_0), \text{ para } \epsilon < \frac{\delta_0}{2}.$$

Agora para cada $h \in \mathbb{N}$*, escolha o número positivo* $\epsilon_h < \min\left\{\frac{1}{h}, \frac{\delta_0}{2}\right\}$ *satisfazendo*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |u_\epsilon(x) - u(x)| \geq \frac{1}{h}\right\}\right| \leq \frac{1}{h},$$

e escrevendo $v_h = essinf_{1\leq t\leq \frac{1}{h}}\ P_\Omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : u_{\epsilon_h}(x) > t)\right\}$ *escolhemos o número* t_h *tal que* $t_h \in \left(\frac{1}{h}, 1 - \frac{1}{h}\right)$ *e*

$$P_\Omega\left(\{x \in \mathbb{R}^n : u_{\epsilon_h}(x) > t_h)\right\} \leq v_h + \frac{1}{h} \tag{3.3}$$

$$Du_{\epsilon_h}(x) \neq 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n \text{ com } u_{\epsilon_h}(x) = t_h \tag{3.4}$$

$$\mathcal{H}^{n-1}\left(\{x \in \partial\Omega : u_{\epsilon_h}(x) = t_h\}\right) = 0 \tag{3.5}$$

Note que a primeira condição vale para conjuntos com medida positiva t_h *e as outras duas são exatamente as teses do teorema de Sard*[1]*, contanto que* $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ *e além*

[1] Para mais detalhes ver referência [6]

disso a terceira significa dizer que os conjuntos de nível intersectam $\partial\Omega$ transversalmente. Escolhidos os números ϵ_h e t_h estamos prontos para efetuar a construção da sequência $\{E_h\}$. Primeiro determine as sequências $\{\widetilde{E_h}\}$ e $\{\lambda_h\}$, por $\widetilde{E}_h = \{x \in \mathbb{R}^n : u_{\epsilon_h}(x) > t_h\}$ e $\lambda_h = |\widetilde{E_h} \cap \Omega| - |E|$ depois defina os conjuntos E_h como segue

$$E_h = \begin{cases} \widetilde{E}_h \setminus B(x_1, r_h) & , se\ \lambda_h > 0, \\ \widetilde{E}_h & , se\ \lambda_h = 0, \\ \widetilde{E}_h \cup B(x_2, r_h) & , se\ \lambda_h < 0. \end{cases}$$

onde o número r_h foi tomado de modo que $|\lambda_h| = |B(x_1, r_h)| = |B(x_2, r_h)|$. Finalizada nossa construção, provemos nossas teses.
Verifiquemos a veracidade de ii, isto é, para h suficientemente grande $|E_h \cap \Omega| = |E|$. Com efeito,

$$Se\ x \in \left(\widetilde{E_h} \cap \Omega\right) \setminus E \Longrightarrow u_{\epsilon_h} > t_h > \frac{1}{h}\ e\ u(x) = 0$$

enquanto que

$$para\ \ x \in E \setminus \left(\widetilde{E_h} \cap \Omega\right) \Longrightarrow u_{\epsilon_h} \leq t_h < 1 - \frac{1}{h}\ e\ u(x) = 1.$$

Sendo assim, pelo fato

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |u_\epsilon(x) - u(x)| \geq \frac{1}{h} \right\} \right| \leq \frac{1}{h},$$

obtemos

$$|\lambda_h| \leq |(\widetilde{E_h} \cap \Omega) \triangle E| \leq \lim_{\epsilon \to 0^+} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |u_\epsilon(x) - u(x)| \geq \frac{1}{h} \right\} \right| \leq \frac{1}{h} \tag{3.6}$$

pois pela nossa construção quando $\epsilon \to 0^+$, $h \to +\infty$ e consequentemente pela nossa definição de r_h, $\lim_{h \to +\infty} r_h = 0$. Disso segue que para h suficientemente grande, $r_h < \delta_0$, e logo $\overline{B_1(x_1, r_h)} \subset B_1(x_1, \delta_0)$ assim como $\overline{B_2(x_2, r_h)} \subset B_1(x_2, \delta_0)$.
Por outro lado, como $\epsilon_h < \frac{\delta_0}{2}$, lembrando da nossa escolha inicial para a função u_ϵ, a saber:

$$u_\epsilon = u\ em\ B_1(x_1, \delta_0) \cup B_2(x_2, \delta_0),\ para\ \epsilon < \frac{\delta_0}{2}$$

garantimos

$$B_1(x_1, \delta_0) \subset \widetilde{E_h} \cap \Omega\ e\ B_2(x_2, \delta_0) \subset \Omega \setminus \widetilde{E_h}$$

e assim

$$|E_h \cap \Omega| = |\widetilde{E_h} \cap \Omega| - |B_1(x_1, r_h)| = |E|,\ para\ \lambda_h > 0$$

mesma forma

$$|E_h \cap \Omega| = |\widetilde{E_h} \cap \Omega| + |B_1(x_1, r_h)| = |E|,\ para\ \lambda_h < 0, \tag{3.7}$$

essas duas últimas igualdades provam ii. Passemos agora ao item iii. Note que:

$$(\partial E_h \cap \partial\Omega) = (\partial\widetilde{E_h} \cup \partial B_1(x_i, r_h)) \cap \partial\Omega),\ para\ i = 1, 2,$$

e como $B(x_1, r_h) \subset (\widetilde{E_h} \cap \Omega)$, $B_2(x_2, r_h) \subset (\Omega \setminus \widetilde{E_h}$ *tem-se* $(\partial B(x_i, r_h) \cap \partial\Omega) = \emptyset$ *para* $i = 1, 2$, *juntamente com* $\mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \partial\Omega : u_{\epsilon_h}(x) = t_h) = 0$ *mais a definição de* $\widetilde{E_h}$ *concluímos que* $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E_h \cap \partial\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\widetilde{E_h} \cap \partial\Omega) = 0$. *Por construção, temos que o conjunto* $\widetilde{E_h}$ *é aberto e limitado, consequentemente pela definição* E_h *é aberto e limitado. Com disso, uma das condições impostas sobre* t_h, *mais precisamente a condição (3.4), vai nos dá que* E_h *tem fronteira suave e logo,* ***iii*** *está provado. Assim, nos resta provar i. Aplicando a definição de diferença simétrica, juntamente com (3.7), tem-se*

$$|(E_h \cap \Omega) \triangle (\widetilde{E}_h \cap \Omega)| = |\lambda_h|$$

e como

$$|\lambda_h| \leq |(\widetilde{E_h} \cap \Omega) \triangle E| \leq \lim_{\epsilon \to 0^+} \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |u_\epsilon(x) - u(x)| \geq \frac{1}{h} \right\} \right| \leq \frac{1}{h}$$

concluímos

$$\lim_{h \to \infty} |(E_h \cap \Omega) \triangle \Omega)| = 0.$$

Para a segunda parte do item i, isto é, $\lim\limits_{h \to \infty} P_\Omega(E_h) = P_\Omega(E)$, *comece observando que pela definição da sequência* $\{E_h\}$, *vale a seguinte igualdade*

$$P_\Omega(E_h) = P_\Omega(\widetilde{E_h}) + \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x_i, r_h)). \tag{3.8}$$

Aplicando a semicontinuidade inferior

$$P_\Omega(E) \leq \liminf_{h \to +\infty} P_\Omega(\widetilde{E_h}). \tag{3.9}$$

Para a desigualdade contrária, por (3.3) juntamente com a definição do número v_h *temos que*

$$P_\Omega(\widetilde{E}_h) \leq v_h + \frac{1}{h} \leq \frac{1}{h} + P_\Omega(\{x \in \mathbb{R}^n : u_{\epsilon_h}(x) > t)\}$$

para todo $h \in \mathbb{N}$ *e quase todo* $t \in \left(\frac{1}{h}, 1 - \frac{1}{h}\right)$. *Integrando essa desigualdade com relação a t e aplicando a fórmula da Coarea, nós obtemos*

$$\left(1 - \frac{2}{h}\right) P_\Omega(\widetilde{E}_h) \leq \frac{1}{h}\left(1 - \frac{2}{h}\right) + \int_\Omega |Du_{\epsilon_h}| dx, \ \forall h \in \mathbb{N}.$$

Usando que $\epsilon_h < \dfrac{1}{h}$ *(3.2) tem-se*

$$\limsup_{h \to +\infty} P_\Omega(\widetilde{E_h}) \leq \int_\Omega |Du| dx = \|D\tilde{u}\|(\Omega) = \|Du\|(\Omega) = P_\Omega(E) \tag{3.10}$$

Por (3.9) e (3.10)

$$P_\Omega(E) \leq \liminf_{h \to +\infty} P_\Omega(\widetilde{E_h}) \leq \limsup_{h \to +\infty} P_\Omega(\widetilde{E_h}) \leq P_\Omega(E)$$

e portanto o lema 1 está provado. □

Lema 3.2 (Modica, L.). *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz contínua e seja E um subconjunto mensurável de Ω tal que $0 < |E| < |\Omega|$. Se fixado um $\lambda \geq 0$ tivermos que $\lambda \leq P_\Omega(A)$, para cada aberto A do $\mathbb{R}^n$ que tem fronteira suave satisfazendo $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \partial\Omega) = 0$ e $|\Omega \cap A| = |E|$, então*

$$\lambda \leq min\left\{P_\Omega(F) : F \text{ mensurável de } \Omega \text{ tal que } |F| = |E|\right\}.$$

Se em particular $\lambda = P_\Omega(E)$, então a igualdade é satisfeita.

Prova 3.2. *Seja $\mathcal{A} = \{F \subset \Omega \text{ mensurável} : |F| = |E|\}$. Defina sobre $\mathcal{A}$ a função*

$$\begin{aligned} P_\Omega : \mathcal{A} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ F &\longmapsto \quad P_\Omega(F) \end{aligned}$$

denote $\alpha = \inf_F P_\Omega \geq 0$. Se λ é zero, não há o que fazer. Assuma que λ é diferente de zero e tome uma sequência $\{F_n\} \in \mathcal{A}$ tal que $P_\Omega(F_n) \to \alpha$, defina $\mathcal{Y} = \{\chi_{F_n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ e $E_0 = \inf \mathcal{A}$

Afirmação: *Existe uma sequência $\{\chi_{F_{n_j}}\} \in \mathcal{Y}$ tal que $\chi_{F_{n_j}} \to \chi_{E_0}$.*

Prova da afirmação: *Note que:*

$$\int_\Omega \chi_{F_n} dx = |F_n| = |E| \tag{3.11}$$

$$\|D\chi_{F_n}\|(\Omega) = P_\Omega(F_n) < +\infty \tag{3.12}$$

(3.11) vem da definiçãode integral e (3.12) segue do fato $P_\Omega(F_n)$ ser convergente e consequentemente limitada. Logo, pelo teorema de compacidade para funções BV existe uma sequência χ_{F_n} tal que

$$\chi_{F_{n_j}} \overset{L^1(\Omega)}{\longrightarrow} w \in BV(\Omega).$$

Como a convergência em L^1 implica em convergência pontual q.t.p temos que

$$\chi_{F_{n_j}}(x) \to w(x)$$

e pelo fato de para todo $n \in \mathbb{N}$, $\chi_{F_{n_j}}(x)$ ser uma função característica, $w(x) \in \{0, 1\}$. Definindo $E_0 = w^{-1}(1)$, tem-se $\chi_{E_0} = w(x)$ e $|E_0| = |E|$ nossa afirmação está provada. Pela nossa afirmação, nós temos que o conjunto E_0 minimiza perímetro e seu volume é constante em Ω. Sendo assim, aplicando o teorema 1 referência [5][2] temos que existem duas bolas $B_1, B_2 \subset\subset \Omega$ e um $\delta > 0$ tal que

$$\min\{dist(B_1, E_0),\ dist(B_2, \Omega \setminus E_0)\} \geq \delta.$$

[2] Se E minimiza perímetro com volume constante em Ω, e se $|E \cap \Omega| > 0$, $|\Omega \cap E|$, então existem duas bolas $B_1, B_2 \subset\subset \Omega$ e $\delta > 0$ tal que $\min\{dist(B_1, E),\ dist(B_2, \Omega \setminus E)\} \geq \delta$.(Para mais detalhes vide referência [5])

Isso significa que $B_1 \subset E_0$ e $B_2 \subset \Omega \setminus E_0$, então aplicando o lema 1 temos que existe uma sequência $\{E_h\}$ tal que

$$\lim_{h\to+\infty} P_\Omega\,(E_h) = P_\Omega(E_0)$$

mas pela definição de α, juntamente com a semicontiuidade inferior

$$\alpha \leq P_\Omega(E_0) \leq \liminf_{h\to+\infty} P_\Omega(F_{n_j}) = \alpha$$

e portanto $P_\Omega(E_0) = \alpha$. Para a igualdade, basta lembrar que garantida a compacidade do conjunto conjunto $\mathcal{A}$ tem-se $\alpha \in \mathcal{A}$ e consequentemente o lema 2 está provado. □

Definição 3.1. *Dizemos que um conjunto A do $\mathbb{R}^n$ satisfaz a condição de interior esférico, quando, para cada $y_0 \in \partial A$ existe uma bola B dependendo de y_0 tal que $\overline{B} \cap (\mathbb{R}^n - \Omega) = \{x_0\}$.*

Lema 3.3 (Gilbarg, D.). *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega$ é localmente o gráfico de uma função de classe C^k com $k \geq 2$, $d : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a função distância para a fronteira de Ω, isto é, $d(x) = dist(x, \partial\Omega)$ e $\Gamma_\alpha = \left\{x \in \overline{\Omega} | \; d(x) < \alpha\right\}$ com $\alpha > 0$. Então existe uma constante positiva β dependendo de Ω tal que $d \in C^k(\Gamma_\beta)$.*

Prova 3.3. *Dado $y_0 \in \partial\Omega$, seja $n(y_0)$ o vetor normal que aponta para dentro(vetor normal interno) e $T(y_0)$ o hiperplano tangente a $\partial\Omega$ em y_0. Sem perda de generalidade, aplicando uma rotação de eixos, podemos assumir que a coordenada x_n está na direção do vetor $n(y_0)$ e pelo teorema da função implícita, obtemos uma vizinhança de y_0, denotada por $V(y_0)$, tal que $x_n = \phi(x')$, onde $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ e $\phi \in C^{n-1}(T(y_0) \cap V(y_0))$. Como $\partial\Omega$ é localmente o gráfico de de uma função Lipschitiziana de classe C^{n-1} q.t.p, temos que $\partial\Omega$ satisfaz a condição de interior esférico e assim existe uma bola B de raio α tal que $\overline{B} \cap (\mathbb{R}^n - \Omega) = \{y_0\}$. Vamos mostrar que para cada $y_0 \in \partial\Omega$, o número $\beta = \alpha^{-1}$ limita as curvaturas principais de $\partial\Omega$ em y_0. Para cada ponto $x_0 \in \{x \in \overline{\Omega} | \; d(x) < \alpha\}$, seja $y_0 = y(x_0)$ e escolha um sistema de coordenadas principais em y_0. Agora defina a aplicação $\mathcal{G} : (T(x_0) \cap V(y_0)) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por*

$$\mathcal{G}(y, d(x)) = y + n(y)d(x), \text{ onde } y = (y', \phi(y')). \tag{3.13}$$

Por definição temos que $\mathcal{G} \in C^{n-1}((T(x_0) \cap V(y_0)))$ e a matriz Jacobiana de $\mathcal{G}$ em $(y_0', d(x_0))$

$$diag\,[J\mathcal{G}] = [1 - k_1 d, \cdots, 1 - k_{n-1}d, 1]$$

pois num sitema de coordenadas principais temos que os $k_i, i = 1, \cdots, n-1$ são as curvaturas principais de $\partial\Omega$ em y_0, e o vetor normal interno $n(y) = (n_1(y), \cdots, n_n(y))$ é dado por

$$n_i = -\frac{D_i\phi(y')}{\sqrt{1 + |D\phi|^2}}, i = 1 \cdots, n-1, \;\; n_n = \frac{1}{\sqrt{1 + |D\phi|^2}} \; \text{ e } D_j n_i(y_0') = k_i\delta_{ij}, \; j = 1, \cdots, n-1.$$

Consequentemente, tem-se

$$det[J\mathcal{G}] = (1 - k_1 d(x_0)) \cdots (1 - k_{n-1} d(x_0)) > 0 \tag{3.14}$$

pois $x_0 \in \Gamma_\alpha = \left\{x \in \overline{\Omega} |\ d(x) < \alpha\right\}$. *Dito isto, pelo teorema da aplicação inversa, temos que existe uma vizinhança* $V'(x_0)$ *de* (y_0', x_0) *tal que* $y' \in C^{k-1}(V')$. *Sendo assim de (3.13)*

$$x = y + n(y)d(x)$$

e assim, denotando por $Dd(x)$, *o gradiente da função distância, temos* $Dd(x) = n(y(x)) = n(y'(x)) \in C^{k-1}(V'(x_0))$ *para todo* x *em* $V'(x_0)$ *ou seja* $d(x) \in C^k(\Gamma_\alpha)$. *Por (3.14) fazendo* $\beta = \alpha^{-1}$ *temos que* $k_i < \beta$, $i = 1, \cdots, n-1$. □

Prova 3.4. *Primeiro vejamos para* $\Omega = \mathbb{R}^n$. *Para* $t > 0$, *seja* $V_t = \{x \in A : 0 < g(x) < t\}$, *pelo lema 3.1.3, encontramos* t *suficientemente grande e um difeomorfismo* ϕ *sobre* V_t *e* $\partial A \times (0, t)$ *tal que:*

$$\det[J\phi(x)] = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - k_i(\hat{\phi}(x))g(x),\ \forall x \in V_t$$

onde $k_1 \cdots, k_{n-1}$ *representam as curvaturas principais de* ∂A *e* $\hat{\phi}(x)$ *a componente de* $\phi(x)$ *em* ∂A . *Consequentemente, temos que* $g(x)$ *é suave em* $\overline{V_t}$ *e*

$$Dg(x) = -n(\hat{\phi}(x))\ \forall x \in \overline{V_t} \tag{3.15}$$

onde $n(\hat{\phi}(x))$ *denota o vetor normal externo em* x *de* ∂A. *Dito isto, temos que se* $n_t(x)$ *denota o vetor normal de* S_t *externo com respeito à* V_t, *tem-se*

$$v_t(x) = Dg(x), \forall\ x \in S_t \tag{3.16}$$

e logo, denotando por $n'(x)$ *o vetor normal a* ∂A, *observando que* $\partial V_t = \partial A \cup S_t$ *e aplicando o teorema da divergência*

$$\begin{aligned}\int_{V_t} \mathrm{div} Dg(x)dx &= \int_{\partial V_t} Dg(x).n'(x) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \int_{\partial A} Dg(x).n(x) d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{S_t} Dg(x).n_t(x), d\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}$$

De (3.15) e (3.16), obtemos que $Dd(x) = -n(x)$ *em* ∂A *e* $Dd(x) = n_t(x)$ *em* S_t, *assim*

$$\begin{aligned}\int_{V_t} \mathrm{div} Dg(x)dx = \int_{\partial A} -n(x).n(x) d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{S_t} n(x).n_t(x) d\mathcal{H}^{n-1} &= \int_{\partial A} -d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{S_t} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= \mathcal{H}^{n-1}(S_t) - \mathcal{H}^{n-1}(\partial A).\end{aligned}$$

Isto é suficiente para verificar que $|V_t|$ *tende para zero quando* $t \longrightarrow 0$, *pois dessa última igualdade temos que* $|V_t| \geq 0$. *Por outro lado, pela suavidade de* $\det[J\phi(x)]$ *associada a* *compacidade de* ∂A *e o lema anterior, obtemos* $\det[J\phi(x)] \geq \alpha$ *para* $x \in V_t$ *e* t *suficientemente pequeno. Deste modo,*

$$|V_t| = \int_{\phi^{-1}\circ\phi(V_t)} 1dx = \int_{\phi(V_t)} \det[J\phi^{-1}(y,s)]d(y,s) = \int_{\partial A} d\mathcal{H}^{n-1}(y) \int_0^t \det[J\phi^{-1}(y,s)]ds$$

lembrando que $\det[J\phi(x)] > \alpha$ *e passando o limite em (3.17), obtemos*

$$\lim_{t\to 0^+} |V_t| = \lim_{t\to 0^+} \int_{\partial A} d\mathcal{H}^{n-1}(y) \int_0^t \det[J\phi^{-1}(y,s)]ds \tag{3.17}$$

$$\lim_{t\to 0^+} |V_t| \leq \lim_{t\to 0^+} \mathcal{H}^{n-1}(\partial A)\beta t = 0 \tag{3.18}$$

logo para t *suficientemente pequeno temos que* $|V_t| = 0$ *e assim quando* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *o resultado é válido. Passemos agora ao caso* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Note que pelo fato de* $S_t = \partial(A \setminus V_t)$, *tem-se* $\mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \partial A) = P_\Omega(A \setminus V_t)$. *Com efeito, pela fato de* A *ter fronteira compacta,* $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap K) < \infty$ *para todo compacto* K, *e assim*

$$S_t = \partial(A \setminus V_t) \Longrightarrow \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial(A \setminus V_t) \cap \Omega) = P_\Omega(A \setminus V_t) \tag{3.19}$$

Além disso de (3.18)

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_A - \chi_{A\setminus V_t}|dx = \lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{V_t} dx = 0$$

e pela semicontinuidade inferior

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega) = P_\Omega(A) \leq \liminf_{t\to 0^+} P_\Omega(A \setminus V_t) = \liminf_{t\to 0^+} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) \tag{3.20}$$

Por outro lado, pelo fato de $\mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})) = \mathcal{H}^{n-1}(S_t) - \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \overline{\Omega})$ *assim como* $-\mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) \geq -\mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \overline{\Omega})$, *obtemos*

$$\mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) \leq \mathcal{H}^{n-1}(S_t) - \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})) \tag{3.21}$$

e logo pelo mesmo argumento de (3.20) tem-se

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})) \leq \liminf_{t\to 0^+} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}))$$

mas $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A) - \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega) - \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \partial\Omega)$, *e por hipótese* $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \partial\Omega) = 0$ *e assim*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A) - \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega),$$

com isso, aplicando o $\limsup$ *em (3.21)*

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to 0^+} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) &\leq \limsup_{t\to 0^+} [\mathcal{H}^{n-1}(S_t) - \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}))] \\
&\leq \limsup_{t\to 0^+} \mathcal{H}^{n-1}(S_t) - \limsup_{t\to 0^+} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \\
&\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial A) - \liminf_{t\to 0^+} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})) \\
&\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial A) - \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega})) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega) \\
&\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

portanto de (3.20) e (3.22), segue-se

$$\lim_{t \to 0^+} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega)$$

□

Corolário 3.2 (Modica, L.). *Nas condições do corolário anterior, temos que a função* $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *defina por*

$$h(x) = \begin{cases} -dist(x, \partial A), & se\ x \in A \\ dist(x, \partial A), & se\ x \notin A \end{cases}$$

h é Lipschitz e $|Dh(x)| = 1$ q.t.p $\in \mathbb{R}^n$ e se, $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = t\}$ vale também que

$$\lim_{t \to 0^+} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega).$$

Prova 3.5. *Dado $h(x)$, é fato conhecido que $|h(x)-h(y)| \leq |x-y|$(desigualdade triangular), para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, consequentemente $h(x)$ é Lipschitz e $|Dh(x)| \leq 1$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, pela compacidade da ∂A, temos que dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus \partial A$, existe $x_0 \in \partial A$ tal que $h(x) = \pm|x - x_0|$ e o vetor $(x - x_0)$ é ortogonal a ∂A. Então para cada y no segmento $[x, x_0]$ temos $h(x) = \pm|y - x_0|$, consequência direta disso $|h(x) - h(y)| = |x - y|$ para cada $y \in [x, x_0]$ e $|Dh(x)| = 1$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para mostrar que*

$$\lim_{t \to 0^+} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega)$$

basta aplicar o corolário anterior duas vezes: primeiro como feito em sua demostração para o conjunto Ω, e depois utilizando o mesmo argumento porém ao conjunto aberto $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$. □

3.2 Proposições

Nos próximos resultados estaremos considerando o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira Lipschitz e $W : [0, \infty] \longrightarrow [0, \infty)$, uma função contínua, com somente dois zeros α, β satisfazendo $0 < \alpha < \beta$ e para cada $\epsilon > 0$ e $u \in L^1(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ definimos o funcional energia como sendo

$$\mathcal{E}_\epsilon(u) = \int_\Omega [\epsilon |Du(x)|^2 + W(u(x))] dx.$$

De outra forma, diremos que $\mathcal{E}_\epsilon(u) = +\infty$ e além disso vamos introduzir a constante c_0 como sendo

$$c_0 = \int_\alpha^\beta W^{\frac{1}{2}}(s) ds$$

Proposição 3.1 (Modica, L.). *Seja $(v_\epsilon)_{\epsilon>0}$ uma família de funções em $L^1(\Omega)$ tal que $v_{\epsilon\epsilon}$ converge para v_0 em $L^1(\Omega)$ quando $\epsilon \longrightarrow 0^+$.*

i. *Se* $\liminf_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) < +\infty$, *então* $W(v_0(x)) = 0$ *para quase todo* $x \in \Omega$.

ii. *Se* $W(v_0(x)) = 0$, *então* $P_\Omega(E) \leq \dfrac{1}{2c_0} \liminf_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon)$, *com* $E = \{x \in \Omega : v_0(x) = \alpha\}$.

Prova 3.6. *Primeiro item. Como* $\liminf_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}(v_\epsilon) < +\infty$ *tome uma sequência de números positivos* (ϵ_h) *convergindo para* 0 *quando* $h \longrightarrow +\infty$, *tal que* (v_{ϵ_h}) *converge pontualmente para* v_0 *q.t.p em* Ω *e* $\lim_{h\to+\infty} \mathcal{E}_{\epsilon_h}(v_{\epsilon_h}) = 0$. *Então pelo lema de Fatou, juntamente coma definição do funcional energia tem-se:*

$$\int_\Omega W(v_0(x))dx \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega W(v_{\epsilon_h}(x))(\Omega) \leq \liminf_{h\to+\infty} \mathcal{E}_{\epsilon_h}(v_{\epsilon_h}) = \lim_{h\to+\infty} \mathcal{E}_{\epsilon_h}(v_{\epsilon_h}) = 0.$$

Ora $W(x)$ *é uma função contínua, não negativa, cuja integral é menor ou igual que zero, isto implica* $W(v_0(x)) = 0$. *Logo o item i está provado.*

Passemos ao item ii.

Vale observar que $W(v_0(x)) = 0$ *não nos garante que* $\mathcal{E}(v_\epsilon) < +\infty$ *e nem que* $v_\epsilon \in W^{1,2}(\Omega)$ *com* $\alpha \leq v_\epsilon(x) \leq \beta$ *para cada* $\epsilon > 0$. *De fato considerando as funções truncadas*

$$\tilde{v_\epsilon}(x) = \max\ \{\alpha, \min\{v_\epsilon, \beta\}\}$$

sem muito esforço nós concluímos que quando $\epsilon \longrightarrow 0^+$, $\tilde{v_\epsilon}$ *converge para* v_0 *em* $L^1(\Omega)$. *Com efeito, pela definição de* $\tilde{v_\epsilon}(x)$ *temos que*

$$\int_\Omega |\widetilde{v_\epsilon(x)} - v_\epsilon(x)|dx = \int_{\{x\in\Omega:\tilde{v}_\epsilon(x)<\alpha\}} |\alpha - v_\epsilon(x)|dx + \int_{\{x\in\Omega:\tilde{v}_\epsilon(x)>\beta\}} |\beta - v_\epsilon(x)|dx$$

mas v_ϵ *converge para* v_0 *em* $L^1(\Omega)$ *e como* W *só tem tem dois zeros, temos que* $v_0(x) = \alpha$ *ou* $v_0(x) = \beta$ *q.t.p, logo* $\tilde{v_\epsilon}(x)$ *converge para* $v_\epsilon(x)$ *e pela desigualdade triangular* $\tilde{v_\epsilon}(x)$ *converge para* $v_0(x)$ *e consequentemente* $\mathcal{E}_\epsilon(\tilde{v_\epsilon}(x)) \leq \mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon(x))$. *Dito isto, defina as funções*

$$\phi(t) = \int_0^t W^{\frac{1}{2}}(s)ds,\ w_\epsilon(x) = \phi(v_\epsilon(x))$$

Como a família de funções v_ϵ *converge para* v_0 *em* $L^1(\Omega)$, *temos que* v_ϵ *é equilimitada e pelo fato de* $W(x)$ *ser contínua,* $\phi(t)$ *é de classe* C^1, *consequência disso: quando* $\epsilon \longrightarrow 0^+$, w_ϵ *converge para uma função, digamos* w_0 *em* $L^1(\Omega)$. *Assim, pela semicontinuidade inferior*

$$\|Dw_0\|(\Omega) \leq \liminf_{\epsilon\to 0^+} \|Dw_\epsilon\|(\Omega). \tag{3.23}$$

Pela fórmula da Coarea para funções BV *tem-se*

$$\int_\Omega |Dw_0|dx = \int_\mathbb{R} P_\Omega(\{x \in \Omega : \phi(v_0(x)) > t\})dt. \tag{3.24}$$

Para facilitar a compreensão, defina os números A_0, A_1, A_2 e A_3 como sendo:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int_{\mathbb{R}} P_\Omega(\{x \in \Omega : \phi(v_0(x)) > t\})dt \\
A_1 &= \int_{\mathbb{R}} P_\Omega(\{x \in \Omega : \phi(v_0(x)) > t, 0 < v_0(x) < \alpha\})dt \\
A_2 &= \int_{\mathbb{R}} P_\Omega(\{x \in \Omega : \phi(v_0(x)) > t, v_0(x) > \beta\})dt \\
A_3 &= \int_{\alpha}^{\beta} P_\Omega(\{x \in \Omega : \phi(v_0(x)) = \alpha\}dt.
\end{aligned}$$

Ora,

$$A_0 = A_1 + A_2 + A_3$$

e o fato de $v_0(x) = \alpha$ ou $v_0(x) = \beta$ q.t.p em Ω, nos dá que os conjuntos $\{x \in \Omega : v_0(x) < \alpha\}$ e $\{x \in \Omega : v_0(x) > \beta\}$ tem medida nula, consequentemente $A_1 = A_2 = 0$ e assim $A_0 = A_3$ ou seja

$$\int_{\mathbb{R}} P_\Omega(\{x \in \Omega : \phi(v_0(x)) > t\})dt = \int_{\alpha}^{\beta} P_\Omega(\{x \in \Omega : \phi(v_0(x)) = \alpha\}dt$$

e consequentemente, (3.24) pode ser escrita como

$$\int_\Omega |Dw_0|dx = \int_{\mathbb{R}} P_\Omega(\{x \in \Omega : \phi(v_0(x)) > t\})dt = \int_{\alpha}^{\beta} P_\Omega(\{x \in \Omega : \phi(v_0(x)) = \alpha\}dt$$

isto é,

$$\int_\Omega |Dw_0|dx = (\phi(\beta) - \phi(\alpha))P_\Omega(E).$$

Daí

$$P_\Omega(E) = \frac{1}{c_0}\int_\Omega |Dw_0|dx \tag{3.25}$$

Por outro lado, se $v_\epsilon \in W^{1,2}(\Omega)$, temos que $Dw_\epsilon(x) = \phi'(v_\epsilon(x))Dv_\epsilon(x)$, e pelo fato de $\phi'(v_\epsilon(x)) = W^{\frac{1}{2}}(v_\epsilon(x)) \geq 0$ tem-se,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Dw_\epsilon|dx &= \int_\Omega |\phi'(v_\epsilon)||Dv_\epsilon(x)|dx \\
\int_\Omega |Dw_\epsilon|dx &= \int_\Omega W^{\frac{1}{2}}(v_\epsilon(x))|Dv_\epsilon(x)|dx.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

E como $W(x), |Dv_\epsilon(x)| \geq 0$, aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica obtemos

$$\frac{\epsilon|Dv_\epsilon(x)|^2 + W(v_\epsilon(x))}{2} \geq \sqrt{\epsilon|Dv_\epsilon(x)|^2 W(v_\epsilon(x))} = \epsilon^{\frac{1}{2}}|Dv_\epsilon(x)|W^{\frac{1}{2}}(v_\epsilon(x))$$

isto é

$$\frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}|Dv_\epsilon(x)|^2 + \epsilon^{-\frac{1}{2}}W(v_\epsilon(x))}{2} \geq |Dv_\epsilon(x)|W^{\frac{1}{2}}(v_\epsilon(x)). \tag{3.27}$$

Assim, integrando (3.27) e substituindo em (3.26)

$$\int_\Omega |Dw_\epsilon|dx = \int_\Omega W^{\frac{1}{2}}(v_\epsilon(x))|Dv_\epsilon(x)|dx \leq \frac{1}{2}\epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon(x)) \tag{3.28}$$

Deste modo, substituindo (3.28) em (3.25) e usando a semicontiuidade inferior

$$P_\Omega(E) = \frac{1}{c_0}\int_\Omega |Dw_0|dx \leq \frac{1}{c_0}\liminf_{\epsilon\to 0^+}\int_\Omega |Dw_\epsilon|dx \leq \liminf_{\epsilon\to 0^+}\frac{1}{2c_0}\epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon(x))$$

portanto a proposição está provada.

Proposição 3.2 (**Modica, L.**). *Seja A um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ com ∂A fronteira hiper-superfície suave e compacta $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \partial\Omega) = 0$. Defina a função $v_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$v_0(x) = \begin{cases} \alpha, & se\ x \in \Omega \cap A \\ \beta, & se\ x \in (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap \Omega. \end{cases}$$

Então existe uma família de funções Lipschitz $(v_\epsilon)_{\epsilon>0}$ em Ω tal que v_ϵ converge para v_0 em $L^1(\Omega)$ quando $\epsilon \longrightarrow 0^+$, $\alpha \leq v_\epsilon \leq \beta$ para todo $\epsilon > 0$ e

i.

$$\int_\Omega v_\epsilon(x)dx = \int_\Omega v_0(x)dx = \alpha|A\cap\Omega| + \beta|\Omega\setminus A|.$$

ii.

$$\frac{1}{2c_0}\limsup_{\epsilon\to 0^+}\epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \leq P_\Omega(A).$$

Prova 3.7. *Seja $: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ a função do corolário (3.1.2), ou seja,*

$$h(x) = \begin{cases} -dist(x,\partial A), & se\ x \in A \\ dist(x,\partial A), & se\ x \notin A \end{cases}$$

e $\chi_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$\chi_0(x) = \begin{cases} \alpha, & se\ t < 0 \\ \beta & se\ t \geq 0. \end{cases}$$

Deste modo temos que $v_0(x) = \chi_0(h(x))$. A prova deste resultado é feita por construção do seguinte modo: vamos construir a família v_ϵ usando uma sequência χ_ϵ que aproxima χ_0, onde χ_ϵ será obtida pela solução da equação diferencial

$$\epsilon\chi_\epsilon'(x) = \sqrt{\epsilon} + W(\chi_\epsilon(x)).$$

A ideia de usar a equação vem do do seguinte fato: queremos aproximar as funções χ_0 por funções Lipschitz que se aproximam de α e β e ao mesmo tempo minimizem o funcional energia de uma variável

$$\int_\mathbb{R} \left[\epsilon{\chi_\epsilon'}^{\,2} + W(\chi_\epsilon)\right]dt \tag{3.29}$$

A equação de E.D.O de Euler-Lagrange correspondente a (3.29) é $2\epsilon\chi_\epsilon'' = W(\chi_\epsilon)$, *multiplicando-a por* χ_ϵ', *tem-se* $2\epsilon\chi_\epsilon''\chi_\epsilon' = W(\chi_\epsilon)\chi_\epsilon'$, *e integrando com relação a* t *obtemos*

$$\epsilon\chi_\epsilon'^2 = c_\epsilon + W(\chi_\epsilon).$$

Note que a constante c_ϵ *não pode ser igual a zero, pois nesse caso, pelo teorema de existência e unicidade teríamos* $\chi_\epsilon'(t) = 0$ *e consequentemente* $\chi_\epsilon(t) = \alpha$ *ou* $\chi_\epsilon(t) = \beta \ \ \forall\ t \in \mathbb{R}$. *Por outro lado, precisamos que* c_ϵ *seja suficientemente maior que* ϵ, *para que assim,* χ_ϵ *possa preencher o espaço entre* α *e* β. *Assim pelo fato de* $\chi_\epsilon'^2 \geq \frac{c_\epsilon}{\epsilon}$, *uma possível escolha para* c_ϵ *é* $c_\epsilon = \sqrt{\epsilon}$.

Comecemos então a construção da sequência $(\chi_\epsilon)_{\epsilon>0}$. *Fixemos* $\epsilon > 0$ *e para* $\alpha \leq t \leq \beta$ *defina a função* $\psi_\epsilon : [\alpha, \beta] \longrightarrow [0, \eta_\epsilon]$ *do seguinte modo*

$$\psi_\epsilon(t) = \int_\alpha^t \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon} + W(s)} \right)^{\frac{1}{2}} ds, \ \ onde\ \eta_\epsilon = \psi_\epsilon(\beta).$$

Naturalmente temos que ψ_ϵ *é de classe* C^1 *pois* W *é contínua e não negativa. Deste modo, seja* $\phi_\epsilon : [0, \eta_\epsilon] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ *a função inversa de* ψ_ϵ. *A condição* $W \geq 0$ *nos dá*

$$0 \leq \eta_\epsilon \leq \epsilon^{\frac{1}{4}}(\beta - \alpha) \tag{3.30}$$

e pelo fato de ψ_ϵ *ser de classe* C^1 *e inversível nos dá que*

$$\begin{aligned} (\phi_\epsilon \circ \psi_\epsilon)(t) &= t \\ \Rightarrow \phi_\epsilon'(t) &= \frac{1}{\psi_\epsilon'(t)} = \frac{(\sqrt{\epsilon} + W(t))^{\frac{1}{2}}}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \\ \Rightarrow \epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'(t) &= \left(\sqrt{\epsilon} + W(t)\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Agora vamos estender a função ϕ_ϵ *para todo* $\mathbb{R}$ *de modo que* ϕ_ϵ *seja Lipschitz, definindo-a como segue*

$$\phi_\epsilon(t) = \begin{cases} \alpha, & se\ t < 0 \\ \beta, & se\ t > \eta_\epsilon \end{cases}$$

Note que pela nossa construção, para todo $t \in \mathbb{R}$, *tem-se* $\phi_\epsilon(t) \leq \chi_0(t)$ *e* $\phi_\epsilon(t+\eta_\epsilon) \geq \chi_0(t)$. *Dito isto, perceba que se* $F : [0, \eta_\epsilon] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é tal que*

$$F(s) = \int_\Omega \phi_\epsilon(h(x) + s)dx$$

tem-se

$$F(0) = \int_\Omega \phi_\epsilon(h(x))dx \leq \int_\Omega \chi_0(h(x))dx$$

e além disso

$$F(\eta_\epsilon) = \int_\Omega \phi_\epsilon(h(x) + \eta_\epsilon)dx \geq \int_\Omega \chi_0(h(x) + \eta_\epsilon)dx.$$

Assim, pelo fato de ϕ_ϵ ser de classe C^1, F também é, e portanto contínua. Logo pelo teorema do valor intermediário existe $\delta_\epsilon \in (0, \eta_\epsilon)$ tal que

$$F(\delta_\epsilon) = \int_\Omega \phi_\epsilon(h(x) + \delta_\epsilon) = \int_\Omega \chi_0(h(x))dx = \int_\Omega v_0(x)dx.$$

Para finalizar, defina as sequências $(\chi_\epsilon)_{\epsilon>0}$ e $(v_{\epsilon>0})$ como sendo

$$\chi_\epsilon(t) = \phi_\epsilon(t + \delta_\epsilon) \ \forall \ t \in \mathbb{R} \ e \ v_\epsilon(x) = \chi_\epsilon(h(x)) \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.32}$$

Note que pela nossa construção, segue direto que $v_\epsilon(x)$ é Lipschitz e $\alpha \le v_\epsilon \le \beta$. Como $|Dh(x)| = 1$, tem-se

$$\int_\Omega |v_\epsilon(x) - v_0(x)|dx = \int_\Omega |\chi_\epsilon(h(x)) - \chi_0(h(x))|Dh(x)|dx$$

e pela fórmula da Coarea[3]

$$\int_\Omega g(f(x))|D(f(x))|dx = \int_\mathbb{R} g(t)\mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega : f(x) = t\})dt$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v_\epsilon(x) - v_0(x)|dx &= \int_\mathbb{R} |\chi_\epsilon(t) - \chi_0(t)|\mathcal{H}^{n-1}(\{x \in \Omega : h(x) = t\})dt \\ &= \int_{-\delta_\epsilon}^{\eta_\epsilon - \delta_\epsilon} |\chi_\epsilon(t) - \chi_0(t)|\mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega)dt \\ &\le (\beta - \alpha) \sup_{|t| \le \eta_\epsilon} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega).\end{aligned}$$

Sendo assim, pela limitação de η_ϵ juntamente com o corolário (3.1.2) concluímos

$$\int_\Omega |v_\epsilon(x) - v_0(x)|dx \le \epsilon^{\frac{1}{4}}(\beta - \alpha)^2 \sup_{|t| \le \eta_\epsilon} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) \longrightarrow 0$$

e portanto v_ϵ converge para v_0 em $L^1(\Omega)$ e assim, i está provado.
Passemos a ii calculando

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) &= \int_\Omega \epsilon v_\epsilon'^2(x) + W(v_\epsilon(x))dx, \ v_\epsilon(x) = \chi_\epsilon(h(x)) \\ \mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) &= \int_\Omega \epsilon\chi_\epsilon'^2(h(x)) + W(\chi_\epsilon(h(x))dx\end{aligned}$$

mais uma vez pela fórmula da Coarea

$$\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) = \int_\Omega \epsilon\chi_\epsilon'^2(h(x)) + W(\chi_\epsilon(h(x))dx = \int_\mathbb{R} \left[\epsilon\chi_\epsilon'^2(t) + W(\chi_\epsilon(t)\right] \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega)dt$$

e daí

$$\epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) = \int_\mathbb{R} \left[\epsilon^{\frac{1}{2}}\chi_\epsilon'^2(t) + \epsilon^{-\frac{1}{2}}W(\chi_\epsilon(t)\right] \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega)dt$$

$$\epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) = \int_\mathbb{R} \left[\epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'^2(t + \delta_\epsilon) + \epsilon^{-\frac{1}{2}}W(\phi_\epsilon(t + \delta_\epsilon))\right] \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega)dt \tag{3.33}$$

[3] onde $g(x)$ é mensurável a Lebesgue e $f(x)$ é Lipschitz.

com $\chi_\epsilon(t) = \phi_\epsilon(t+\delta_\epsilon)$ *denotando por* $\gamma_\epsilon = \sup_{|t|\le\eta_\epsilon} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega)$, *(3.41) nos dá*

$$\epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \le \gamma_\epsilon \int_{-\delta_\epsilon}^{\eta_\epsilon-\delta_\epsilon} \left[\epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'^2(t+\delta_\epsilon) + \epsilon^{-\frac{1}{2}}W(\phi_\epsilon(t+\delta_\epsilon))\right] dt \tag{3.34}$$

e aplicando o teorema de mudança de variável

$$\epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \le \gamma_\epsilon \int_{-\delta_\epsilon}^{\eta_\epsilon-\delta_\epsilon} \left[\epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'^2(t+\delta_\epsilon) + \epsilon^{-\frac{1}{2}}W(\phi_\epsilon(t+\delta_\epsilon))\right] dt = \gamma_\epsilon \int_0^{\eta_\epsilon} \left[\epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'^2(t) + \epsilon^{-\frac{1}{2}}W(\phi_\epsilon(t)\right] dt$$

$$\epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \le \gamma_\epsilon \int_0^{\eta_\epsilon} \left[\epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'^2(t) + \epsilon^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\epsilon} + W(\phi_\epsilon(t))\right] dt.$$

De (3.39) temos as seguintes implicações

$$\epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'(t) = \left(\sqrt{\epsilon} + W(t)\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \epsilon\phi_\epsilon'^2(t) = \left(\sqrt{\epsilon} + W(t)\right) \Rightarrow \epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'^2(t) = \epsilon^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\epsilon} + W(t)\right)$$

substituindo a última na integral anterior tem-se

$$\begin{aligned}\epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \le \gamma_\epsilon \int_0^{\eta_\epsilon} \left[\epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'^2(t) + \epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'^2(t)\right] dt = 2\gamma_\epsilon \int_0^{\eta_\epsilon} \left[\epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'^2(t)\right] dt = 2\gamma_\epsilon \int_0^{\eta_\epsilon} \left[\phi_\epsilon'(t)\epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'(t)\right] dt \\ = 2\gamma_\epsilon \int_0^{\eta_\epsilon} \left[\left(\sqrt{\epsilon} + W(t)\right)\epsilon^{-\frac{1}{2}}\epsilon^{\frac{1}{2}}\phi_\epsilon'(t)\right] dt\end{aligned}$$

e daí

$$\epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \le 2\gamma_\epsilon \int_0^{\eta_\epsilon} \left[\left(\sqrt{\epsilon} + W(t)\right)^{\frac{1}{2}} \phi_\epsilon'(t)\right] dt$$

aplicando mais uma vez o teorema de mudança de variável nesta última integral obtemos

$$\epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \le 2\gamma_\epsilon \int_\alpha^\beta \left(\sqrt{\epsilon} + W(s)\right)^{\frac{1}{2}} ds.$$

Aplicando o corolário (3.1.2) vale

$$\lim_{\epsilon\to 0} \gamma_\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0} \sup_{|t|\le\eta_\epsilon} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{H}^{n-1}(S_t \cap \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \Omega) = P_\Omega(A)$$

consequentemente, passando o limite em (3.34)

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \le 2P_\Omega(A) \int_\alpha^\beta W(s)ds = 2P_\Omega(A)c_0$$

portanto

$$\frac{1}{2c_0} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_\epsilon) \le P_\Omega(A)$$

e o item ii está provado. □

3.3 O Critério

Teorema 3.1 (Modica, L.). *Fixe $m \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha|\Omega| \leq m \leq \beta|\Omega|$, e suponha que para todo $\epsilon > 0$ a sequência de funções (u_ϵ) seja solução do problema variacional*

$$\mathcal{E}_\epsilon(u_\epsilon) = \min\left\{\mathcal{E}_\epsilon(u) : u \ \in L^1(\Omega),\ u \geq 0,\ \int_\Omega u\ dx = m\right\}.$$

Se (ϵ_h) é uma sequência de números positivos tal que ϵ_h converge para zero e (u_{ϵ_h}) para uma função u_0 em $L^1(\Omega)$ quando $h \to +\infty$, então

i. $W(u_0(x)) = 0$, *isto é, $u_0(x) = \alpha$ ou $u_0(x) = \beta$ q.t.p.*
ii. *O conjunto $E = \{x \in \Omega : u_0(x) = \alpha\}$ é solução do problema variacional, isto é,*

$$P_\Omega(E) = \min\left\{P_\Omega(F) : F \subset \Omega \text{ mensurável e } \ |F| = \frac{\beta|\Omega| - m}{\beta - \alpha}\right\};$$

iii. $2c_0 P_\Omega(E) = \lim\limits_{h\to\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_{\epsilon_h}(u_{\epsilon h})$.

Prova 3.8. *Seja $(v_\epsilon)_{\epsilon>0}$ uma sequência de funções, dependendo apenas da variável x_1, com que podemos aproximar a função u_ϵ para cada $\epsilon > 0$ definida do seguinte modo*

$$v_\epsilon(x) = \begin{cases} \alpha & se, \quad x_1 \leq t_0 - \sqrt{\epsilon}, \\ \dfrac{\beta-\alpha}{\sqrt{\epsilon}}(x_1 - t_0) + \dfrac{\beta - \alpha}{2} & se, \quad t_0 - \sqrt{\epsilon} < x_1 < t_0 + \sqrt{\epsilon}, \\ \beta & se, \quad x_1 \geq t_0 + \sqrt{\epsilon}. \end{cases}$$

onde t_0 é escolhido de modo que

$$\int_\Omega v_\epsilon(x) dx = m.$$

Defina o conjunto $T_\epsilon = \{x \in \Omega : t_0 - \sqrt{\epsilon} < |x| < t_0 + \sqrt{\epsilon}\}$. Pelo fato de Ω ser limitado, para cada $\epsilon > 0$ podemos obter uma constante C tal que $|T_\epsilon| \leq C\sqrt{\epsilon}$. Por hipótese u_ϵ minimiza o funcional energia da seguinte forma

$$\begin{aligned} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_\epsilon(u_{\epsilon_h}) \leq \epsilon_h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_\epsilon(v_{\epsilon_h}) &= \int_\Omega [\epsilon_h^{\frac{1}{2}} |Dv_{\epsilon_h}(x)|^2 + \epsilon^{-\frac{1}{2}} W(v_{\epsilon_h}(x))] dx \\ &= \int_{T_{\epsilon_h}} \sqrt{\epsilon_h} \left(\frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{\epsilon_h}}\right)^2 + \frac{W(v_{\epsilon_h}(x))}{\sqrt{\epsilon_h}} dx \\ &= C\left[\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 + \max_{\alpha \leq t \leq \beta} W(t)\right]. \end{aligned}$$

Pela continuidade de W temos que

$$\epsilon_h^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(u_{\epsilon_h}) \leq \epsilon_h^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon v_{\epsilon_h}) \leq C\left[\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2 + \max_{\alpha\leq t\leq\beta} L\right] < +\infty$$

consequentemente,

$$\liminf_{h\to+\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon v_{\epsilon_h} < +\infty.$$

Logo pela proposição (3.2.1) $W(u_0(x)) = 0$ e logo, $u_0(x) = \alpha$ ou $u_0(x) = \beta$. Portanto i está provado.

Passemos ao item ii. Suponha que $0 < |E| < |\Omega|$. Deste modo, usando o item i e supondo sem perda de generalidade que $u_0(x) = \alpha$ tem-se

$$|E| = \int_\Omega \chi_E dx = \int_\Omega \frac{\beta - u_0(x)}{\beta-\alpha}dx = \frac{\beta|\Omega| - m}{\beta-\alpha}$$

Vamos usar o lema(3.1) em parceria com as duas proposição outrora provadas, ou seja, se mostrarmos que $P_\Omega(E) \leq P_\Omega(A)$ para todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado com fronteira hipersuperficie suave e compacta tal que $\mathcal{H}^{n-1}(\partial A \cap \partial\Omega) = 0$ e $|A\cap\Omega| = |E|$ obtemos ii.. Com efeito, fixe um conjunto A com as hipóteses acima. Pela Proposição(3.2) conseguimos construir uma família de funções (v_ϵ) em $W^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega v_\epsilon(x)dx = \alpha|A\cap\Omega| + \beta||\Omega\setminus A| = \alpha|E| + \beta(|\Omega| - |E|) = m$$

e

$$\frac{1}{2c_0}\limsup_{h\to+\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_{\epsilon_h}) \leq P_\Omega(A). \tag{3.35}$$

Pelo item anterior juntamente com a proposição 2 temos que

$$P_\Omega(E) \leq \frac{1}{2c_0}\liminf_{h\to+\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(u_{\epsilon_h}). \tag{3.36}$$

A hipótese de u_ϵ minimizar o funcional energia nos garante que $\mathcal{E}_\epsilon(u_{\epsilon_h}) \leq \mathcal{E}_\epsilon(v_{\epsilon_h})$, e assim, por (3.35) e (3.36)

$$P_\Omega(E) \leq \frac{1}{2c_0}\liminf_{h\to+\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(u_{\epsilon_h}) \leq \frac{1}{2c_0}\limsup_{h\to+\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_\epsilon(v_{\epsilon_h}) \leq P_\Omega(A) \tag{3.37}$$

portanto, pelo Lema(3.1.2)

$$P_\Omega(E) = \min\left\{P_\Omega(F) : F \subset \Omega \text{ mensurável e } |F| = \frac{\beta|\Omega| - m}{\beta-\alpha}\right\}. \tag{3.38}$$

Os casos $|E| = |\Omega|$ e $|E| = 0$ são diretos. De fato, para o primeiro caso, faça $m = \alpha|\Omega|$ e assim

$$0 \leq \min\{P_\Omega(F) : F\subset\Omega \text{ mensurável e } |F| = \alpha|\Omega|\} \leq P_\Omega(\Omega) = 0$$

mas $|E| = |\Omega| \Rightarrow |\Omega \setminus E| = 0$, *e logo* $P_\Omega(E) = P_\Omega(\Omega) = 0$. *Logo o item ii está provado*

Para finalizar, passemos ao item iii. Por (3.37) tem-se

$$2c_0 P_\Omega(E) \leq \liminf_{h\to+\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_\epsilon(u_{\epsilon_h}) \leq \limsup_{h\to+\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_\epsilon(v_{\epsilon_h}) \leq 2c_0 P_\Omega(A). \tag{3.39}$$

Fazendo $\lambda = \limsup_{h\to+\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_\epsilon(u_{\epsilon_h})$ *em conjunto com o item anterior conclui-se*

$$\limsup_{h\to+\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_\epsilon(v_{\epsilon_h}) = \lambda \leq 2c_0 P_\Omega(E) \leq \liminf_{h\to+\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_\epsilon(u_{\epsilon_h})$$

e logo

$$2c_0 P_\Omega(E) = \lim_{h\to+\infty} \epsilon_h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{E}_\epsilon(u_{\epsilon_h}).$$

Os casos, $|E| = |\Omega|$ *e* $|E| = 0$ *também são diretos pois, de forma análoga a discussão anterior, no primeiro caso fazemos* $u_\epsilon = \alpha$ *e assim* $\mathcal{E}_\epsilon(u_{\epsilon_h}) = 0$ *para todo* $\epsilon > 0$, *logo* $P_\Omega(E) = 0$

Portanto, nosso resultado principal está provado. □

Referências

EVANS, Lawrence C; GARIEPY, Ronald ***Measure Theory and fine propertie of functions*** *(Studies in Advance Mathematics). BOC Raton:CRC Press. 2015*

GIUSTI, Enrico., ***Minimal Surfaces and Funcitons of Bounded Variation.****, Springer, S.A, Madrid, 2. ed., 2002.*

STEIN, Elias M.; SHARCACHI, Rami. ***Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces.****, Princeton, N.J: Princeton University Press 2005;(Princeton Lectues in Analisy III).*

MODICA, Luciano., ***The Gradient Theory of Phase Transitions and the Minimal Interface Criterion.*** *Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, 1986,(124-142)*

GONZALEZ, E.; MASSARI, U. & TAMANINI, I., ***On the regularity of boudaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint.*** *Indiana Univ. Math J., 32 (1983), 25-37.*

Van der Waals, J.D ***The Thermodynamic Theory of Capillarity Under The Hypothesis Of A Continuous Variation Of Density****. Encontrado em http://math.cmu.edu/∼tblass/CNA-PIRE/van-der-Walls-trans1979.pdf*

CAHN, J.W.; HILLIARD, J.E., ***Free Energy of a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy****. The Journal of Chemical Physics. Vol.28, Number 2, February 1958.*

GONZALEZ, E.; MASSARI, U. & TAMANINI, I., ***On the regularity of boudaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint.*** *Indiana Univ. Math J., 32 (1983), 25-37.*

JUDICE, Edson D. ***O Teorema de Sard e Aplicações.*** *Publicações Matemáticas IMPA 2012.*

AMBROSIO, Luigi; FUSCO, Nicola; PALLARA, Diego ***Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems.*** *Oxeford: Clarendon*

Press, 2000. (Oxford Mathematical Monographics)

GURTIN, E. Morton; ***Some Results And Conjectures in The Gradient Theory of Phase Transitions.*** *University of Minnesota, preprint n. 156 (1985).*
BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXERA, Eduardo; Fundamentos de Análise Funcional. SBM, 2015.

GILBARG, David; TRUDINGER, Neil; ***Elliptic Partial Differential Equations of Second Order****. Reprint of the 1998 Edition.*