

Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

# **Estimativa da Curvatura de Subvariedades Limitadas**

Roney Pereira dos Santos

Roney Pereira dos Santos

# **Estimativa da Curvatura de Subvariedades Limitadas**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas em 06 de março de 2018 como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S237e Santos, Roney Pereira dos.  
Estimativa da curvatura de subvariedades limitadas / Roney Pereira dos Santos . – 2018.  
47 f.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto.  
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2018.

Bibliografia: f. 46.  
Índice: f. 47.

1. Geometria Riemanniana. 2. Subvariedade limitada - Curvatura.  
3. Hessiana, função de. 4. Geodésica. I. Título.

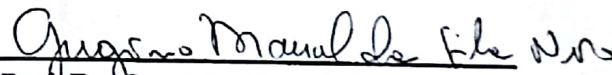
CDU: 514.76


Roney Pereira dos Santos

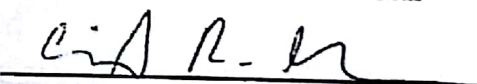
## Estimativa da Curvatura de Subvariedades Limitadas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas em 06 de março de 2018 como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Maceió-AL, 2018

  
Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto  
Orientador - Ufal

  
Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar  
Vitório  
Examinador Interno - Ufal

  
Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa  
Examinador Externo - UFMG

Maceió-AL, 2018

# Agradecimentos

Agradecemos a todas as pessoas que até aqui nos acompanharam e ajudaram, percebendo ou não suas devidas importâncias no caminho.

Meu primeiro e mais importante agradecimento destina-se a Deus. Alguém que, apesar de nunca ter visto da mesma forma que enxergo as letras que agora digito, tenho conhecido em diversos momentos, a sós ou com os que me rodeiam, desde 2005.

Não poderei esquecer de agradecer aos meus familiares por todo apoio e dedicação manifestados de variadas formas, quase nenhuma delas tradicionais.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Gregório Manoel da Silva Neto, por toda paciência, diversos direcionamentos, socorros em momentos onde as técnicas mais simples me fugiam a mente.

Agradeço ao Prof. Feliciano Vitório pelas diversas ajudas durante o mestrado e por ter despertado em mim curiosidades relacionadas à matemática.

Agradeço ao Prof. Francisco Vieira Barros, um grande incentivador pra que eu chegasse até aqui.

Agradeço aos amigos que fiz no Instituto de Matemática desde 2010, alguns que certamente levarei por toda vida em lembranças carinhosas.

Agradeço à Ana Maria Santos de Mendonça, secretária da pós-graduação do Instituto de Matemática, pelas muitas ajudas principalmente em ocasiões burocráticas.

Um menino nos nasceu, um filho se nos deu; o governo está sobre os seus ombros; e o seu nome será: Maravilhoso, Conselheiro, Deus Forte, Pai da Eternidade, Príncipe da Paz.

Isaías 9:6

# Resumo

Nesta dissertação estamos interessados em demonstrar o Teorema de Jorge-Koutrofiotis. Para isso, usaremos o Teorema de Omori, que também será demonstrado. H. Omori demonstrou que, dada uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional limitada inferiormente, se uma função diferenciável nessa variedade for limitada superiormente, então podemos escolher pontos da variedade de modo que esta função não atinge seu supremo e o comprimento do vetor gradiente e a Hessiana da função podem ficar arbitrariamente pequenos. Como uma aplicação do Teorema de Omori, L. Jorge e D. Koutrofiotis demonstraram que, dadas uma variedade Riemanniana completa e com curvatura escalar limitada inferiormente, uma variedade de Hadamard e um imersa isométrica da primeira variedade na variedade de Hadamard tal que a curvatura seccional da primeira variedade seja sempre menor do que a curvatura seccional da variedade de Hadamard quando calculadas no mesmo ponto, então a imagem da primeira variedade pela imersão é ilimitada na variedade de Hadamard.

**Palavras-chave:** Variedade Riemanniana completa; Variedade de Hadamard; imersão isométrica; curvatura; geodésica; Hessiana; subvariedade limitada.

# Abstract

In this monography, we are interested in to demonstrate the Theorem of Jorge-Koutrofiotis. For this, we use the Theorem of Omori, too demonstrated. H. Omori demonstrated that, for all complete Riemannian manifold with scalar curvature bounded below, if a differentiable function on this manifold has an upper bound, we can choose points on this manifold such that this function does not reach your supreme and the lenght of the gradient vector and the Hessian may be arbitrarily small. L. Jorge and D. Koutrofiotis as an application of the Theorem of Omori, according to which, for a complete Riemannian manifold with scalar curvature bounded below, a Hadamard manifold and an isometric immersion for the first manifold on the Hadamard manifold such that the seccional curvature of the first manifold is always smaller than the seccional curvature of the Hadamard manifold when calculated at the same points, we have that the image of the first manifold for the imersion is ilimited in the Hadamard manifold.

**Keywords:** Complete Riemannian manifold; Hadamard manifold; isometric immersion; curvature; geodesic; Hessian; bounded submanifold.



# Sumário

	<b>Sumário</b> . . . . .	<b>14</b>
	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>RUDIMENTOS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA</b> . . . . .	<b>17</b>
1.1	Métricas e Conexões Riemannianas . . . . .	17
1.2	Geodésicas; Aplicação Exponencial . . . . .	19
1.3	Curvaturas . . . . .	21
1.4	Pontos Conjugados . . . . .	22
1.5	Segunda Forma Fundamental . . . . .	25
1.6	Variações do Comprimento de Arco e da Energia; Lema do Índice . . . . .	28
<b>2</b>	<b>HESSIANA DA FUNÇÃO DISTÂNCIA; TEOREMA DE OMORI</b> . . . . .	<b>35</b>
2.1	Limitação da Hessiana da Função Distância . . . . .	35
2.2	O Teorema de Omori . . . . .	38
<b>3</b>	<b>ESTIMATIVA DA CURVATURA DE UMA SUBVARIEDADE LIMITADA</b> . . . . .	<b>47</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>53</b>
	<b>Índice</b> . . . . .	<b>55</b>

# Introdução

Interessados em estimar a curvatura de subvariedades Riemannianas, L. Jorge e D. Koutrofiotis demonstraram em [JK] o seguinte Teorema.

**Teorema A.** *Sejam  $M^m$  uma variedade Riemanniana completa cuja curvatura escalar é limitada inferiormente,  $\bar{M}^{m+n}$  uma variedade Riemanniana,  $n \leq m - 1$ ,  $B_\lambda \subset \bar{M}$  uma bola normal fechada de raio  $\lambda$  e  $\delta$  um número positivo. Suponha que a imersão isométrica  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  é tal que sua imagem está contida em  $B_\lambda$ .*

$$(i) \text{ Se } \max_{B_\lambda} \bar{K} = \delta^2 \text{ e } \lambda < \frac{\pi}{2\delta}, \text{ então } \min_{B_\lambda} \bar{K} + \delta^2 \cotg^2(\delta\lambda) \leq \sup_M K.$$

$$(ii) \text{ Se } \max_{B_\lambda} \bar{K} = 0, \text{ então } \min_{B_\lambda} \bar{K} + \frac{1}{\lambda^2} \leq \sup_M K.$$

$$(iii) \text{ Se } \max_{B_\lambda} \bar{K} = -\delta^2, \text{ então } \min_{B_\lambda} \bar{K} + \delta^2 \coth^2(\delta\lambda) \leq \sup_M K.$$

Como consequência da demonstração desse teorema, eles concluíram o resultado que hoje é conhecido como Teorema de Jorge-Koutrofiotis.

**Teorema de Jorge-Koutrofiotis.** *Sejam  $M^m$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura escalar limitada inferiormente,  $\bar{M}^{m+n}$ ,  $n < m - 1$ , uma variedade de Hadamard e  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão isométrica satisfazendo  $K(\tau) \leq \bar{K}(\tau)$  em todo ponto de  $M$  e para todos os planos que passam por ele. Então  $\varphi(M)$  é ilimitada em  $\bar{M}$ .*

Na demonstração do Teorema A, utilizou-se o resultado introduzido por H. Omori em [O]:

**Teorema de Omori.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa e com curvatura seccional limitada inferiormente. Considere a função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  limitada superiormente. Então, dados  $q \in M$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in M$  tal que*

$$(i) f(p) \geq f(q),$$

$$(ii) |\text{grad } f(p)| < \varepsilon,$$

$$(iii) \nabla^2 f(X, X) < \varepsilon \text{ para todo } X \in T_p M, X \neq 0.$$

# 1 Rudimentos de Geometria Riemanniana

Neste primeiro capítulo estabeleceremos alguns resultados, definições e notações básicos. Escreveremos  $M^m$ ,  $m = \dim M$ , quando houver a necessidade de expressar a dimensão da variedade  $M$ . Nossas principais referências são [dC1] e [dC2].

Os símbolos  $\mathcal{X}(M)$  e  $\mathcal{D}(M)$  sempre denotarão, respectivamente, os conjuntos dos campos de vetores diferenciáveis em  $M$  e das funções reais diferenciáveis definidas em  $M$ .

## 1.1 Métricas e Conexões Riemannianas

Uma *métrica Riemanniana* numa variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação que a cada ponto  $p \in M$  associa um produto interno (forma bilinear, simétrica e positiva definida)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que, qualquer que seja o par de vetores  $X, Y$  em  $T_p M$ , a função  $\langle X, Y \rangle_p$  é diferenciável. Chamaremos de *variedade Riemanniana* uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana.

Vê-se que a definição acima não depende da parametrização escolhida para a variedade diferenciável  $M$ , bastando, para isso, observar que as representações dos vetores de  $T_p M$  em qualquer base, ainda irá gerar um produto interno diferenciável.

**Exemplo 1.1.** O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , cuja base é formada pelos vetores da forma  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  ( $i = 1, \dots, n$ ), é uma variedade Riemanniana quando munido da métrica

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

De fato, esse é produto interno usual do  $\mathbb{R}^n$ , o qual sabemos ser bilinear, simétrico e positivo definido.

Sejam  $M^m$  e  $N^n$ ,  $n = m + k$ , variedades diferenciáveis e  $\varphi : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Quando a derivada de  $\varphi$  é injetiva em todos os pontos de  $M$ , dizemos que  $\varphi$  é uma *imersão* e  $M$  está imersa em  $N$ . Se, porém,  $\varphi$  for um difeomorfismo e  $M$  e  $N$  forem variedades Riemannianas tais que

$$\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)}$$

para todo  $p \in M$  e vetores  $u, v \in T_p M$ ,  $\varphi$  será chamada de *isometria*.

**Exemplo 1.2.** Se  $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$  é uma imersão entre a variedade diferenciável  $M$  e a variedade Riemanniana  $\overline{M}$ , então a aplicação  $\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)}$  define uma métrica Riemanniana em  $M$ . De fato, como  $d\varphi_p$  é injetiva, o produto interno entre vetores iguais do lado direito da igualdade será nulo apenas quando  $u = 0$ , logo  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  é positivo definido e as demais condições da definição de produto interno seguem diretamente do fato de a diferencial ser linear. Além disso, como o lado direito da igualdade é diferenciável, o lado esquerdo, posto como está, também o é. A métrica assim definida em  $M$  é a métrica *induzida* por  $\varphi$ , e  $\varphi$  é uma *imersão isométrica*.

Uma *conexão afim*  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

satisfazendo, para  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ ,

$$(i) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ,$$

$$(ii) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$$

$$(iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y.$$

Observe que a definição de conexão afim apresenta certa semelhança com as propriedades de derivada. De fato, a proposição a seguir faz a ligação entre as noções de conexão afim e derivada de um campo ao longo de uma curva na variedade em questão.

**Proposição 1.1.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Então existe uma correspondência que associa cada campo de vetores  $V$  ao longo da curva diferenciável  $c$  sobre  $M$ , definida em um intervalo fechado  $I$ , a outro campo de vetores  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $c$ , tal que, se  $W$  é um campo ao longo de  $c$  e  $f$  é uma função diferenciável em  $I$ , vale:*

$$(i) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

$$(ii) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt},$$

$$(iii) \text{ Se } V(t) = X(c(t)), X \in \mathcal{X}(M), \text{ então } \frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}X.$$

A demonstração da Proposição 1.1 consiste em, a partir de um sistema de coordenadas de  $M$ , definir uma expressão para  $\frac{DV}{dt}$ . O campo  $\frac{DV}{dt}$  é chamado *derivada covariante* de  $V$  ao longo de  $c$ .

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. A conexão afim  $\nabla$  é dita *compatível com a métrica*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  quando dados os campos de vetores  $V$  e  $W$  ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  vale

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

Segue diretamente da definição que a conexão afim  $\nabla$  definida na variedade Riemanniana  $M$  é compatível com a métrica  $g$ , e somente se, tem-se

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

quaisquer que sejam os campos  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ .

Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é chamada *simétrica* quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] = XY - YX$$

para todo campo  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ .

Agora iremos vincular os dois principais conceitos acima definidos, a saber: métricas Riemannianas e conexões afim.

**Teorema 1.1** (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim que é simultaneamente simétrica e compatível com a métrica.*

Para demonstrar o Teorema de Levi-Civita, supomos a existência de uma tal conexão afim  $e$ , a partir daí, utilizamos suas propriedades para chegarmos a uma expressão que, obviamente, irá satisfazer suas hipóteses. Uma conexão como no Teorema de Levi-Civita será chamada *conexão de Levi-Civita*, ou *conexão Riemanniana*.

## 1.2 Geodésicas; Aplicação Exponencial

De agora em diante, a menos de menção explícita em contrário, todas as variedades diferenciáveis  $M$  e todas as conexões afins que aparecerem no texto deverão ser consideradas Riemannianas.

Se  $c : [a, b] \rightarrow M$  é o segmento de uma curva diferenciável na variedade Riemanniana  $M$ , dizemos que o *comprimento* do segmento  $c$  é o número dado pela seguinte integral:

$$\ell(c) = \int_a^b \left| \frac{dc}{dt} \right| dt.$$

Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Um campo de vetores  $V$  ao longo de uma curva  $c : I \rightarrow M$  é *paralelo* quando sua derivada covariante é identicamente nula.

**Proposição 1.2.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Considere a curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  e  $V_0 \in T_{c(t_0)}M$ . Então, existe um único campo paralelo  $V$  ao longo de  $c$  tal que  $V(t_0) = V_0$ .*

De fato, o campo de vetores  $V$  desejado é a solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias subordinado à condição inicial  $V(t_0) = V_0$ . Um tal campo é chamado *transporte paralelo* de  $V_0$  ao longo de  $c$ .

Uma curva diferenciável  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma *geodésica* se o campo  $\frac{d\gamma}{dt}$  for paralelo para todo  $t \in I$ . A restrição de uma geodésica ao intervalo  $[a, b] \subset I$  é chamada *segmento de geodésica ligando*  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ .

Observamos que, se  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

ou seja, o comprimento do vetor  $\frac{d\gamma}{dt}$  é constante. Afim de desconsiderar as geodésicas que se degeneram, iremos supor que o comprimento de  $\frac{d\gamma}{dt}$  é igual a um número real positivo  $\ell$ . Fixada uma origem  $t_0$  para a geodésica  $\gamma$ , seu comprimento  $s$  medido a partir daí até  $t$ , será

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\gamma}{d\tau} \right| d\tau = \ell(t - t_0).$$

Vê-se, portanto, que o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao seu comprimento de arco. No caso em que  $\ell = 1$  diremos que  $\gamma$  está *normalizada*.

**Observação 1.1.** As equações paramétricas que expressam uma geodésica em  $M$  estão definidas por um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que, quando subordinados às condições iniciais de que, em  $t = 0$ , passe por  $p$  e tenha velocidade  $v$ , pode ser resolvido de maneira única no *fibrado tangente*  $TM$ , o conjunto formado por pontos do tipo  $(p, v)$ , onde  $p \in M$  e  $v \in T_pM$ . Isto é, qualquer que seja  $p \in M$ , existem um aberto  $U$  em torno de  $p$ , números reais positivos  $\delta$  e  $\varepsilon_0$  e uma aplicação diferenciável

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M, \quad U = \{(p, v) \in TM; p \in U, v \in T_pM, |v| < \varepsilon_0\},$$

tais que a curva  $t \rightarrow \gamma(t, p, v)$ ,  $t \in (-\delta, \delta)$ , é a única geodésica que, em  $t = 0$ , passa por  $p$  com velocidade  $v$ .

**Lema 1.1** (Homogeneidade das Geodésicas). *Suponha que a geodésica de equação  $\gamma(t, p, v)$  esteja definida no intervalo  $(-\delta, \delta)$ . Então a geodésica  $\gamma(t, p, av)$ ,  $a > 0$ , está definida no intervalo  $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$  e  $\gamma(t, p, av) = \gamma(at, p, v)$ .*

*Demonstração.* Seja  $c : (-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$  dada por  $c(t) = \gamma(at, p, v)$ . Então  $c(0) = p$  e  $c'(0) = av$ . Além disso,

$$\frac{D}{dt} \left( \frac{dc}{dt} \right) = \nabla_{\frac{dc}{dt}} \frac{dc}{dt} = a^2 \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}(at, p, v)} \frac{d\gamma}{dt}(at, p, v) = 0.$$

Portanto,  $c$  é uma geodésica passando por  $p$  quando  $t = 0$  e com velocidade  $av$ . Por unicidade, temos  $\gamma(at, p, v) = c(t) = \gamma(t, p, av)$ .  $\square$

De acordo com o Lema de Homogeneidade, podemos tornar o intervalo de definição de uma geodésica arbitrariamente grande diminuindo sua velocidade e vice-versa.

**Proposição 1.3.** *Dado  $p \in M$ , existem uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $p$  em  $M$ , um número  $\varepsilon > 0$  e uma aplicação diferenciável  $\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ , onde  $\mathcal{U}$  é o conjunto dos pontos  $(p, v)$ , com  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ ,  $|v| < \varepsilon$ , tal que  $t \rightarrow \gamma(t)$  é a única geodésica de  $M$  que passa por  $p$  e tem velocidade  $v$  em  $t = 0$ , para cada  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ .*

A Proposição 1.3 é demonstrada unindo-se as informações da Observação 1.1 e do Lema de Homogeneidade.

Sejam  $p$  um ponto de  $M$  e  $\mathcal{U}$  o aberto de  $TM$  dado pela Proposição 1.3. A aplicação

$$\exp : \mathcal{U} \rightarrow M, \exp(p, v) = \gamma(1, p, v) = \gamma\left(|v|, p, \frac{v}{|v|}\right)$$

é chamada *aplicação exponencial* em  $\mathcal{U}$ .

**Proposição 1.4.** *Dado  $p \in M$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que, se  $B_\varepsilon(0)$  é a bola aberta centrada na origem de  $T_p M$  e de raio  $\varepsilon$ , a aplicação exponencial restrita à  $B_\varepsilon(0)$ ,  $\exp_p : B_\varepsilon(0) \rightarrow M$ , é um difeomorfismo sobre um aberto de  $M$ .*

*Demonstração.* Basta observar que

$$d(\exp_p)_0(v) = \left. \frac{d}{dt} \exp_p(tv) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma(1, p, tv) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma(t, p, v) \right|_{t=0} = v.$$

Desse modo,  $d(\exp_p)_0$  é a aplicação identidade de  $T_p M$  e, portanto, pelo Teorema da Função Inversa,  $\exp_p$  é um difeomorfismo numa vizinhança da origem.  $\square$

Uma variedade Riemanniana  $M$  é dita *completa* quando suas geodésicas estão definidas para todo valor real. Um resultado importante que caracteriza as variedades Riemannianas completas é o Teorema de Hopf-Rinow abaixo citado. Para uma demonstração do Teorema de Hopf-Rinow, veja [dC1], Prop. 2.4, pp. 162-165.

**Teorema 1.2 (Hopf-Rinow).** *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *A aplicação exponencial em  $p$  está definida em todo  $T_p M$ ;*
- (ii) *Os limitados e fechado de  $M$  são compactos;*
- (iii)  *$M$  é um espaço métrico completo.*

*Além disso, todas as afirmações acima implicam que, dados dois pontos  $p$  e  $q$  de  $M$ , sempre existe uma geodésica minimizante  $\gamma$  em  $M$  que realiza a distância entre eles, i. e.,  $d(p, q) = \ell(\gamma)$ .*

## 1.3 Curvaturas

Considere os campos de vetores  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . A *curvatura*  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é a aplicação  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  definida pondo

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M)$$

onde  $\nabla$  a conexão Riemanniana de  $M$ .

**Observação 1.2.** Alguns textos consideram a curvatura com o sinal trocado na equação acima definida.

**Observação 1.3.** Tomando-se os escalares em  $\mathcal{D}(M)$ , a curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é bilinear em  $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$ , e o operador  $R(X, Y)$  é linear em  $\mathcal{X}(M)$ . Ambas as propriedades são verificadas diretamente pela definição de conexão afim.

**Proposição 1.5.** Considere a variedade Riemanniana  $M$ . Dado  $p \in M$ , sejam  $\tau$  um subespaço bidimensional do espaço tangente  $T_p M$  e  $X, Y \in \tau$  dois vetores linearmente independentes. Então, pondo  $|X \wedge Y| = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$ , a expressão

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X \wedge Y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores  $X$  e  $Y$ .

De fato, basta-nos observar que é possível passarmos de uma base qualquer de  $\tau$  a outra através de transformações elementares. O resultado segue da Observação 1.3.

Assim, dado um ponto  $p \in M^m$ , tomamos o subespaço vetorial  $\tau$  de  $T_p M$  gerado pelos vetores  $\{X, Y\}$ . O número  $K(X, Y) = K(p)$  é chamado *curvatura seccional* de  $\tau$  em  $p$ . Considerando uma base ortonormal  $\{X_1, \dots, X_m\}$  de  $T_p M$ , a expressão

$$\text{Scal}(p) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{m-1} \langle R(X_i, X_j)X_i, X_j \rangle$$

será chamada *curvatura escalar* em  $p$ . Observamos que a expressão de  $\text{Scal}(p)$  também não depende da base escolhida, pois  $\langle R(X_i, X_j)X_i, X_j \rangle$  também não depende.

**Exemplo 1.3.** Se  $\delta > 0$ , temos como exemplos de espaços com curvatura seccional constante a esfera  $\mathbb{S}_\delta^m$  e o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^m$  e o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}_\delta^m$ , respectivamente com curvatura seccional igual a  $\delta^2$ ,  $0$  e  $-\delta^2$  (cf. [dC1], Teo. 3.4, p. 181).

## 1.4 Pontos Conjugados

Seja  $A$  um subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas  $(s, t)$  e  $U \subset A \subset \bar{U}$ ,  $U$  aberto em  $\mathbb{R}^2$ . Suponha ainda que a fronteira de  $A$  seja uma curva diferenciável com ângulos dos vértices diferentes de  $\pi$ . Dizemos que a aplicação  $f : A \rightarrow M$  é uma *superfície parametrizada* em  $M$ . Da definição de superfície parametrizada decorrem dois resultados úteis que abaixo estão demonstrados. O primeiro deles, um Teorema de Schwarz para variedades, que aqui chamaremos Lema de Simetria, diz que podemos trocar a ordem das derivadas parciais de  $f$ . O segundo é uma maneira de definir  $R(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})V$ , onde  $V$  é um campo ao longo da superfície  $f$ .



**Lema 1.2** (de Simetria). Se  $M^m$  é uma variedade Riemanniana e  $f : A \rightarrow M$  é uma superfícies parametrizada, então, sendo  $(s, t)$  as coordenadas de  $A$ ,

$$\frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}.$$

*Demonstração.* Se  $(x, U)$  é um sistema de coordenadas em uma vizinhança de um ponto  $f(A)$ , escrevemos

$$x^{-1} \circ f(s, t) = (x_1(s, t), \dots, x_m(s, t)).$$

Logo, pondo  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ),

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{D}{\partial s} \left( \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) X_i \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial t} X_i + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \left( \frac{D}{\partial s} X_i \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial t} X_i + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \nabla_{\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} X_j} X_i \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial t} X_i + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{X_j} X_i. \end{aligned}$$

Decorre do fato de a conexão de  $M$  ser Riemanniana (em particular simétrica) que  $\nabla_{X_j} X_i = \nabla_{X_i} X_j$ . Assim, calculando  $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}$  obteremos o mesmo resultado.  $\square$

**Lema 1.3.** Sejam  $f(s, t)$  uma superfície parametrizada na variedade Riemanniana  $M^m$  e  $V = V(s, t)$  um campo de vetores sobre a superfície parametrizada  $f$ . Então

$$R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V.$$

*Demonstração.* Escolha um sistema de coordenada  $(U, x)$  em torno do ponto  $p \in M$ . Sendo  $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) os vetores que formam a base canônica de  $T_p M$ , escrevemos  $V = \sum_i v^i X_i$ ,  $v^i = v^i(s, t)$ . Então

$$\frac{D}{\partial s} V = \frac{D}{\partial s} \left( \sum_i v^i X_i \right) = \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s} X_i + \sum_i v^i \frac{D}{\partial s} X_i$$

e

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V &= \frac{D}{\partial t} \left( \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s} X_i + \sum_i v^i \frac{D}{\partial s} X_i \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial t \partial s} X_i + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_i + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s} X_i + \sum_i v^i \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i. \end{aligned}$$

Trocando a ordem das derivadas parciais e subtraindo, obtemos

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = \sum_i v^i \left( \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_i \right).$$

Ponha  $f(s, t) = (x_1(s, t), \dots, x_m(s, t))$ . Então  $\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} X_j$  e  $\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial t} X_k$ . Assim

$$\frac{D}{\partial s} X_i = \nabla_{\frac{\partial f}{\partial s}} X_i = \nabla_{\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} X_j} X_i = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{X_j} X_i$$

e

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i &= \frac{D}{\partial t} \left( \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{X_j} X_i \right) \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \nabla_{X_j} X_i + \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \nabla_{X_j} X_i \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \nabla_{X_j} X_i + \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \nabla_{\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial t} X_k} \nabla_{X_j} X_i \\ &= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \nabla_{X_j} X_i + \sum_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} \nabla_{X_k} \nabla_{X_j} X_i. \end{aligned}$$

Novamente trocando a ordem das derivadas parciais e subtraindo, obtemos

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} X_i - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} X_i = \sum_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} (\nabla_{X_k} \nabla_{X_j} X_i - \nabla_{X_j} \nabla_{X_k} X_i).$$

Portanto

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = \sum_{ijk} v^i \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial t} (\nabla_{X_k} \nabla_{X_j} X_i - \nabla_{X_j} \nabla_{X_k} X_i) = R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) V$$

pela linearidade de  $R$  em cada entrada.  $\square$

Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$ . Considere a superfície parametrizada  $f(s, t) = \exp_p tv(s)$ ,  $(t, s) \in [0, 1] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ , onde  $v(s)$  é uma curva em  $T_p M$  com  $v(0) = 0$  e  $v'(0) = w$ . Considere também o campo  $(d \exp_p)_{tv}(tw) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$  ao longo da geodésica  $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ . Como  $\gamma$  é geodésica,  $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$  qualquer que seja o ponto  $(t, s)$  no domínio de  $f$ . Daí, pelos Lemas 1.2 e 1.3,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} - R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} + R \left( \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Fazendo  $\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = J(t)$ , obtemos a seguinte equação diferencial, chamada *equação de Jacobi*:

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma', J)\gamma' = 0.$$

Um campo qualquer  $J$  ao longo da geodésica  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  será chamado *campo de Jacobi* quando satisfizer a equação de Jacobi para todo  $t$ .

**Exemplo 1.4.** Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante  $K$ ,  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica normalizada e  $J$  um campo de Jacobi não-nulo ao longo de  $\gamma$ , normal a  $\gamma'$  para todo  $t$ . Dado o campo  $T$  ao longo de  $\gamma$ , temos (cf. [dC1], Lem. 3.4, pp. 106-107)

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', T \rangle = K(\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle J, \gamma' \rangle) = K \langle J, T \rangle.$$

Logo,  $\langle R(\gamma', J)\gamma' - KJ, T \rangle = 0$  e, portanto,  $R(\gamma', J)\gamma' = KJ$ . Então, a equação de Jacobi se resume à seguinte expressão:

$$(1.1) \quad \frac{D^2 J}{dt^2} + KJ = 0.$$

Considere o campo  $w(t)$ , paralelo ao longo de  $\gamma$ , no qual se verifica  $\langle \gamma', w \rangle = 0$  e  $|w| = 1$  para todo  $t$ . Como  $K$  é constante, vê-se que

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(t), & \text{se } K > 0 \\ tw(t), & \text{se } K = 0 \\ \frac{\text{senh}(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} w(t), & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

é solução para a equação de Jacobi 1.1.

Dada a geodésica  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ , o ponto  $\gamma(t_0)$  é *conjugado* a  $\gamma(0)$ ,  $t_0 \in (0, a]$ , se existe um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$ , não-nulo, no qual se verifica  $J(0) = J(t_0) = 0$ . A proposição abaixo caracteriza os pontos conjugados como pontos críticos da exponencial.

**Proposição 1.6.** *Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica com  $\gamma(0) = p$ . O ponto  $q = \gamma(t_0)$  é conjugado de  $p$  ao longo de  $\gamma$  se, e somente se,  $v_0 = t_0\gamma'(0)$  é um ponto crítico de  $\exp_p$ .*

*Demonstração.* Seja  $v = \gamma'(0)$ . Ora, os ponto  $p$  e  $q$  são conjugados se, e somente se, existe um campo de Jacobi não-nulo  $J$  ao longo de  $\gamma$  para o qual vale  $J(0) = J(t_0) = 0$ . Seja  $w = J'(0)$ . Então  $J(t) = (d \exp_p)_{t_0 v}(tw)$ ,  $t \in [0, a]$ . Logo,  $q$  é conjugado a  $p$  se, e somente se,

$$0 = J(t_0) = (d \exp_p)_{t_0 v}(t_0 w).$$

Como  $J$  é não-nulo,  $w \neq 0$  e, portanto,  $t_0 v$  é um ponto crítico de  $\exp_p$ .  $\square$

## 1.5 Segunda Forma Fundamental

Seja  $\varphi : M^m \rightarrow \overline{M}^{m+n}$  uma imersão entre as variedades diferenciáveis  $M$  e  $\overline{M}$ . Faremos sempre a identificação entre os campos  $X \in T_p M$  e  $d\varphi_p(X) \in T_{\varphi(p)} \overline{M}$ . Assim, considerando a função diferenciável  $g : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$  e a composição  $f = g \circ \varphi$ , para cada  $p \in M$  e  $X \in T_p M$ , tem-se

$$\langle \text{grad } f(p), X \rangle = df_p(X) = dg_{\varphi(p)}(d\varphi_p(X)) = dg_{\varphi(p)}(X) = \langle \text{grad } g(\varphi(p)), X \rangle.$$

Logo, como  $(\text{grad } g)^\top = \text{grad } f$ , temos

$$(1.2) \quad \text{grad } g = \text{grad } f + (\text{grad } g)^\perp.$$

Indique por  $\bar{\nabla}$  a conexão da variedade Riemanniana  $\bar{M}$ . Dados os campos  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , considerando suas respectivas extensões  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$ , definamos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top.$$

Vê-se que  $\nabla$  é a conexão em  $M$  relativa à métrica induzida. A expressão

$$\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo de vetores em  $\bar{M}$  normal a  $M$  chamado *segunda forma fundamental* da imersão  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ . Sejam  $\bar{X}_0$  e  $\bar{Y}_0$  outras extensões de  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Temos

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y) - (\bar{\nabla}_{\bar{X}_0} \bar{Y} - \nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X} - \bar{X}_0} \bar{Y} = 0,$$

pois, em  $M$ ,  $\bar{X} - \bar{X}_0 = 0$ . Analogamente pode-se verificar que  $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}_0$ . Portanto, assim definida, a segunda forma fundamental não depende das extensões  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  escolhidas. Usando as propriedades de uma conexão Riemanniana e a igualdade, em  $M$ , das extensões escolhidas dos campos, e uma função diferenciável, vê-se que  $\alpha : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)^\perp$  é uma aplicação bilinear simétrica.

Tomando o ponto  $p \in M$  e o vetor  $\eta \in (T_p M)^\perp$  ortogonal a  $M$ , defina a forma bilinear simétrica

$$H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_\eta(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle.$$

Desse modo, à  $H_\eta$  está associada uma aplicação linear auto-adjunta

$$S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M, \quad \langle S_\eta(X), Y \rangle = H_\eta(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle.$$

O vetor

$$H = \frac{1}{m} \sum_k (\text{tr } S_k) E_k,$$

onde  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é um referencial ortonormal que é normal a  $M$ , é chamado *vetor curvatura média* de  $\varphi$ .

**Observação 1.4.** Seja  $\varphi : M^m \rightarrow \bar{M}^{m+n}$  uma imersão entre as variedades Riemannianas  $M$  e  $\bar{M}$ . Considere o referencial ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$  cujos vetores são normais a  $M$  e

o conjunto de vetores  $\{X_1, \dots, X_m\}$  uma base de  $T_p M$ ,  $p \in M$ . Temos

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \langle \alpha(X_i, X_i), \alpha(X_j, X_j) \rangle &= \sum_{ij} \sum_k \langle H_k(X_i, X_i) E_k, H_k(X_j, X_j) E_k \rangle \\ &= \sum_{ijk} H_k(X_i, X_i) H_k(X_j, X_j) \\ &= \sum_{ijk} \langle S_k(X_i), X_i \rangle \langle S_k(X_j), X_j \rangle \\ &= \sum_k (\text{tr } S_k)^2 \\ &= m^2 |H|^2, \end{aligned}$$

onde  $H_k = H_{E_k}$  e  $S_k = S_{E_k}$ .

Relacionaremos agora as curvaturas seccionais de  $M$  e  $\bar{M}$  e a segunda forma fundamental.

**Proposição 1.7** (Equação de Gauss). *Sejam  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão e  $x, y \in T_p M \subset T_p \bar{M}$  vetores linearmente independentes. Indicando respectivamente por  $K(x, y)$  e  $\bar{K}(x, y)$  as curvaturas seccionais de  $M^m$  e  $\bar{M}^{m+n}$  é verdade que*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y) \rangle - |\alpha(x, y)|^2,$$

onde  $\alpha$  é a segunda forma fundamental de  $\varphi$ .

*Demonstração.* Considere  $X$  e  $Y$  extensões locais de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tangentes a  $M$  e  $\bar{X}, \bar{Y}$  extensões locais de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, a  $\bar{M}$ . Tem-se

$$(1.3) \quad \begin{aligned} K(x, y) - \bar{K}(x, y) &= \langle \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_X \nabla_Y X - (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} - \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}), Y \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \rangle. \end{aligned}$$

Observamos que

$$\langle \nabla_{[X, Y]} X - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, Y \rangle = \langle \nabla_{[X, Y]} X - (\bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X})^\top - (\bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X})^\perp, Y \rangle = 0.$$

Considere o referencial ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$  formado por vetores normais a  $M$ . Então,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X} &= \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \left( \sum_i H_i(X, X) E_i + \nabla_X X \right) \\ &= \sum_i (H_i(X, X) \bar{\nabla}_{\bar{Y}} E_i + \bar{Y} H_i(X, X) E_i) + \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \nabla_X X, \end{aligned}$$

onde  $H_i = H_{E_i}$ . Ora,

$$\langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} E_i, Y \rangle = \bar{Y} \langle E_i, Y \rangle - \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Y}, E_i \rangle = -H_i(Y, Y).$$

Assim

$$(1.4) \quad \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X}, Y \rangle = - \sum_i H_i(X, X) H_i(Y, Y) + \langle \nabla_Y \nabla_X X, Y \rangle.$$

Analogamente,

$$(1.5) \quad \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, Y \rangle = - \sum_i H_i(X, Y) H_i(X, Y) + \langle \nabla_X \nabla_Y X, Y \rangle,$$

Agora basta substituir (1.4) e (1.5) em (1.3) e obteremos o resultado desejado.  $\square$

O lema a seguir será útil mais adiante. Duas referências para sua demonstração são [D] e [KN].

**Lema 1.4.** *Seja  $\alpha : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \leq m - 1$ , uma aplicação bilinear simétrica satisfazendo  $\alpha(X, X) \neq 0$  para  $X \neq 0$ . Então existem vetores  $X$  e  $Y$  linearmente independentes tais que  $\alpha(X, X) = \alpha(Y, Y)$  e  $\alpha(X, Y) = 0$ .*

*Demonstração.* Estenda a aplicação  $\alpha$  para uma aplicação bilinear simétrica complexa  $\alpha : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Como  $n < m$ , a equação  $\alpha(Z, Z) = 0$  possui uma solução diferente de 0. Além disso, como  $\alpha(X, X) \neq 0$  quando  $X$  for um vetor do  $\mathbb{R}^m$  diferente do vetor nulo,  $Z \notin \mathbb{R}^m$ . Faça  $Z = X + iY$ ,  $X, Y \in \mathbb{R}^m$ ,  $Y \neq 0$ . Então

$$0 = \alpha(Z, Z) = \alpha(X, X) - \alpha(Y, Y) + 2i\alpha(X, Y).$$

Logo,  $\alpha(X, X) = \alpha(Y, Y)$  e  $\alpha(X, Y) = 0$ . Agora suponha que  $aX + bY = 0$ ,  $a, b$  constantes reais. Então

$$0 = \alpha(aX + bY, X) = a \alpha(X, X) + b \alpha(Y, X).$$

Como  $\alpha(Y, X) = \alpha(X, Y) = 0$  e  $\alpha(X, X) \neq 0$ , então  $a = 0$ . Analogamente concluímos que  $b = 0$  e, portanto,  $X$  e  $Y$  são linearmente independentes.  $\square$

## 1.6 Variações do Comprimento de Arco e da Energia; Lema do Índice

Seja  $c : [0, a] \rightarrow M$  uma curva diferenciável em  $M$ . Uma *variação* de  $c$  é uma aplicação contínua  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  tal que  $f(0, t) = c(t)$  para todo  $t \in [0, a]$ . Se  $f$  for diferenciável, dizemos que a variação é *diferenciável*. Fixado  $s$ , a curva  $f_s(t) = f(s, t)$  é chamada *curva da variação*. Ao fixarmos  $t$ , chamaremos *curva transversal* a curva  $f_t(s) = f(s, t)$ ; neste caso, o vetor  $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$  é um campo de vetores diferenciável chamado *campo variacional*. Quando  $f(s, 0) = c(0)$  e  $f(s, a) = c(a)$ , dizemos que  $f$  é uma *variação própria*. Se os campos  $V(t)$  e  $c'(t)$  são ortogonais, dizemos que  $f$  é uma *variação ortogonal*

Afim de comparar o comportamento da curva  $f_0(t) = c(t)$  com as demais curvas  $f_s(t)$ , definimos a abaixo, respectivamente, a *função comprimento de arco* e a *função energia* da variação  $f$  pondo

$$L(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right| dt, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

e

$$E(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right|^2 dt, \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

As seguintes proposições serão úteis posteriormente. Primeiramente encontraremos equações para  $L'(0)$  e  $L''(0)$ .

**Proposição 1.8** (Primeira e Segunda Variações do Comprimento de Arco). *Considere a geodésica normalizada  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  e  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  uma variação própria e ortogonal de  $\gamma$  com campo variacional unitário. Então, se  $L$  é a função comprimento de arco de  $f$ , vale*

$$L'(0) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_0^a \quad e \quad L''(0) = \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_0^a - \int_0^a K \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt,$$

onde  $K$  é a curvatura seccional de  $M$ .

*Demonstração.* Derivando  $L(s) = \int_0^a \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt$ , temos

$$(1.6) \quad L'(s) = \frac{\left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle}{\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|} dt = \frac{\left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle}{\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|} dt.$$

Como

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle,$$

então

$$L'(s) = \int_0^a \frac{\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle}{\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|} dt.$$

Logo

$$L'(0) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_0^a.$$

Por outro lado, de (1.6), temos que

$$L''(s) = \frac{\frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| - \frac{d}{ds} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle}{\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2} dt.$$

Como  $\gamma$  é uma geodésica normalizada, em  $s = 0$ ,

$$L''(0) = \int_0^a \frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\
&= \left\langle -R \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \\
&= -K \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$L''(0) = \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_0^a - \int_0^a K \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt.$$

□

Agora vamos encontrar expressões para  $E'(0)$  e  $E''(0)$ .

**Proposição 1.9** (Primeira Variação da Energia). *Sejam  $c : [0, a] \rightarrow M$  uma curva diferenciável e  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  uma variação de  $c$ . Então, se  $E$  é a função energia de  $f$ ,*

$$\frac{1}{2}E'(0) = \left\langle V, \frac{dc}{dt} \right\rangle \Big|_0^a - \int_0^a \left\langle V, \frac{D}{dt} \frac{dc}{dt} \right\rangle dt,$$

onde  $V = V(t)$  é o campo variacional de  $f$ .

*Demonstração.* Derivando  $E(s) = \int_0^a \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt$ , temos

$$E'(s) = \int_0^a 2 \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt = 2 \int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Como

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$$

então

$$(1.7) \quad \frac{1}{2}E'(s) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_0^a - \int_0^a \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt.$$

Portanto

$$\frac{1}{2}E'(0) = \left\langle V, \frac{dc}{dt} \right\rangle \Big|_0^a - \int_0^a \left\langle V, \frac{D}{dt} \frac{dc}{dt} \right\rangle dt$$

como queríamos demonstrar. □

**Proposição 1.10** (Segunda Variação da Energia). *Sejam  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica e  $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M$  uma variação de  $\gamma$ . Então, se  $E$  é a função energia de  $f$ ,*

$$\frac{1}{2}E''(0) = \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle \Big|_0^a + \int_0^a \left( \left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right\rangle - \left\langle R \left( \frac{d\gamma}{dt}, V \right) \frac{d\gamma}{dt}, V \right\rangle \right) dt,$$

onde  $V = V(t)$  é o campo variacional de  $f$  e  $R$  é a curvatura de  $M$ .



*Demonstração.* Por (1.6)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E''(s) &= \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_0^a + \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle \Big|_0^a \\ &\quad - \int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.2 e como  $\gamma$  é geodésica,

$$\frac{1}{2}E''(0) = \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle \Big|_0^a + \left\langle \frac{DV}{dt}, V \right\rangle \Big|_0^a - \int_0^a \left\langle \frac{D^2V}{dt^2} + R \left( \frac{d\gamma}{dt}, V \right) \frac{d\gamma}{dt}, V \right\rangle dt.$$

Como

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{DV}{dt}, V \right\rangle = \left\langle \frac{D^2V}{dt^2}, V \right\rangle + \left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right\rangle$$

então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E''(0) &= \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle \Big|_0^a + \left\langle \frac{DV}{dt}, V \right\rangle \Big|_0^a - \int_0^a \frac{d}{dt} \left\langle \frac{DV}{dt}, V \right\rangle dt \\ &\quad + \int_0^a \left( \left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right\rangle - \left\langle R \left( \frac{d\gamma}{dt}, V \right) \frac{d\gamma}{dt}, V \right\rangle \right) dt \\ &= \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle \Big|_0^a + \int_0^a \left( \left\langle \frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right\rangle - \left\langle R \left( \frac{d\gamma}{dt}, V \right) \frac{d\gamma}{dt}, V \right\rangle \right) dt \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

**Observação 1.5.** Adotemos a notação  $\frac{DV}{dt} = V'$  e  $\frac{d\gamma}{dt} = \gamma'$ . A expressão

$$I_a(V, V) = \int_0^a (\langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle) dt$$

é chamada *forma do índice* de  $\gamma$ . Assim  $\frac{1}{2}E''(0) = \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \gamma' \right\rangle \Big|_0^a + I_a(V, V)$ . No caso em que  $f$  é uma variação própria, tem-se

$$\frac{1}{2}E''(0) = I_a(V, V).$$

Queremos agora estabelecer uma relação entre  $I_a(J, J)$  e  $I_a(V, V)$  quando  $J$  é um campo de Jacobi. Começamos fazendo a seguinte observação: se  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável com  $h(0) = 0$ , então existe uma função  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  na qual se verifica  $\phi(0) = h'(0)$ ,  $h(t) = t\phi(t)$  para todo  $t$  em  $[0, 1]$ . De fato, definida a função  $\phi(t) = \int_0^1 \frac{dh}{d(ts)}(ts) ds$ , tem-se

$$t\phi(t) = \int_0^1 \frac{dh}{d(ts)}(ts) d(ts) = h(t).$$

**Lema 1.5 (do Índice).** *Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M^m$  uma geodésica sem pontos conjugados a  $\gamma(0)$ . Sejam  $J$  um campo de Jacobi e  $V$  um campo de vetores arbitrário, ambos ao longo de  $\gamma$  e ortogonais a  $\gamma'$ , tais que  $J(0) = V(0) = 0$  e  $J(t_0) = V(t_0)$ ,  $t_0 \in (0, a]$ . Então  $I_{t_0}(J, J) \leq I_{t_0}(V, V)$  e vale a igualdade se, e somente se,  $J = V$ .*

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{J}^\perp := \{J \text{ campo de Jacobi; } \langle J, \gamma' \rangle = 0, J(0) = 0\}$ . Então  $\dim \mathcal{J}^\perp = m - 1$ . Tomando uma base  $J_1, \dots, J_{m-1}$  de  $\mathcal{J}^\perp$ , vale

$$J = \sum_i \alpha_i J_i, \quad \alpha_i \text{ constantes reais } (i = 1, \dots, m - 1).$$

Como  $J$  não possui pontos conjugados a  $\gamma(0)$  em  $(0, a]$ , os vetores  $J_1(t), \dots, J_{m-1}(t)$  formam uma base do complemento ortogonal de  $\gamma'(t)$  em  $T_{\gamma(t)}M$ . Assim

$$V(t) = \sum_i f_i(t) J_i(t), \quad f_i \text{ funções diferenciáveis em } (0, a] \ (i = 1, \dots, m - 1)$$

Já que  $J_i(0) = 0$ , escrevemos  $J_i(t) = tA_i(t)$  e, portanto,  $A_1(0), \dots, A_{m-1}(0)$  são linearmente independentes; logo, os vetores  $A_1(t), \dots, A_{m-1}(t)$  são linearmente independentes para todo  $t$ . Isto nos permite escrever

$$V(t) = \sum_i g_i(t) A_i(t), \quad g_i \text{ funções diferenciáveis em } [0, a] \ (i = 1, \dots, m - 1).$$

Novamente, sendo  $g_i(0) = 0$ , escrevemos  $g_i(t) = th_i(t)$ , onde cada  $h_i$  é uma função diferenciável em  $[0, a]$ . Como, para  $t \neq 0$ ,  $f_i(t) = h_i(t)$  concluímos que cada  $f_i$  pode ser estendida a uma função diferenciável em  $[0, a]$ .

Por outro lado, como  $J_i$  é de Jacobi,

$$R(\gamma', V)\gamma' = R\left(\gamma', \sum_i f_i J_i\right)\gamma' = \sum_i f_i R(\gamma', J_i)\gamma' = - \sum_i f_i J_i''.$$

Daí

$$\begin{aligned} \langle V', V' \rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V \rangle &= \left\langle \sum_i f_i' J_i + \sum_i f_i J_i', \sum_k f_k' J_k + \sum_k f_k J_k' \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i'', \sum_k f_k J_k \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_i f_i' J_i, \sum_k f_k' J_k \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i' J_i, \sum_k f_k J_k' \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i', \sum_k f_k' J_k \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \sum_i f_i J_i', \sum_k f_k J_k' \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i'', \sum_k f_k J_k \right\rangle. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \sum_i f_i J_i', \sum_k f_k J_k \right\rangle &= \left\langle \sum_i f_i' J_i' + \sum_i f_i J_i'', \sum_k f_k J_k \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i', \sum_k f_k' J_k + \sum_k f_k J_k' \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_i f_i' J_i', \sum_k f_k J_k \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i'', \sum_k f_k J_k \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \sum_i f_i J_i', \sum_k f_k' J_k \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i', \sum_k f_k J_k' \right\rangle. \end{aligned}$$

Escreva  $\lambda(t) = \langle J_i, J'_k \rangle - \langle J'_i, J_k \rangle$ . Assim

$$\begin{aligned}\lambda'(t) &= \langle J'_i, J'_k \rangle + \langle J_i, J''_k \rangle - \langle J''_i, J_k \rangle - \langle J'_i, J'_k \rangle \\ &= -\langle J_i, \mathcal{R}(\gamma', J_k) \gamma' \rangle + \langle \mathcal{R}(\gamma', J_i) \gamma', J_k \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como  $\lambda(0) = 0$ , segue que  $\langle J_i, J'_k \rangle = \langle J'_i, J_k \rangle$ . Logo

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_i f'_i J_i, \sum_k f_k J'_k \right\rangle &= \sum_{ik} f'_i f_k \langle J_i, J'_k \rangle \\ &= \sum_{ik} f'_i f_k \langle J'_i, J_k \rangle \\ &= \sum_{ik} f'_i f_k \langle J'_i, J_k \rangle \\ &= \left\langle \sum_i f'_i J'_i, \sum_k f_k J_k \right\rangle\end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\langle V', V' \rangle - \langle \mathcal{R}(\gamma', V) \gamma', V \rangle = \left\langle \sum_i f'_i J_i, \sum_k f'_k J_k \right\rangle + \frac{d}{dt} \left\langle \sum_i f_i J'_i, \sum_k f_k J_k \right\rangle.$$

Logo,

$$I_{t_0}(V, V) = \int_0^{t_0} \left\langle \sum_i f'_i J_i, \sum_k f'_k J_k \right\rangle dt + \left\langle \sum_i f_i J'_i, \sum_k f_k J_k \right\rangle (t_0)$$

e

$$I_{t_0}(J, J) = \left\langle \sum_i \alpha_i J'_i, \sum_k f_k J_k \right\rangle (t_0).$$

Sendo  $J(t_0) = V(t_0)$  por hipótese, tem-se  $\alpha_i = f_i(t_0)$  e, portanto,

$$I_{t_0}(V, V) = I_{t_0}(J, J) + \int_0^{t_0} \left| \sum_i f'_i J_i \right|^2 dt.$$

Decorre daí que  $I_{t_0}(V, V) \geq I_{t_0}(J, J)$ . Agora, se  $I_{t_0}(V, V) = I_{t_0}(J, J)$ , temos  $\sum_i f'_i J_i = 0$ . Como os  $J_i$  não se anulam em  $t \neq 0$ , vemos que  $f'_i \equiv 0$ . Logo, cada  $f_i$  é constante e, como  $f_i(t_0) = \alpha_i$ ,  $V = J$ .  $\square$

## 2 Hessiana da Função Distância; Teorema de Omori

Neste capítulo nos dedicamos a encontrar uma limitação para a Hessiana da função distância que nos será útil no capítulo seguinte. Também provaremos o Teorema de Omori. Tomaremos como base a seção de preliminares de [JK] e as seções 1 e 2 de [O].

### 2.1 Limitação da Hessiana da Função Distância

Dadas as variedades Riemannianas  $M$  e  $\bar{M}$ , considere o ponto  $x \in \bar{M}$  e a função  $g(x) = \frac{1}{2} d(x_0, x)^2$ , onde  $d$  é a distância Riemanniana de  $M$ . Se  $x$  pertence a uma bola normal centrada em  $x_0$ , então  $g$  é diferenciável e existe uma geodésica minimizante  $\gamma$  ligando  $x$  a  $x_0$  tal que  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(s) = x$  e  $|\gamma'(0)| = 1$ . Temos  $d(x_0, x) = \int_0^s |\gamma'(t)| dt = s$  e restringindo  $g$  à hipersfera  $d(x_0, \cdot) = s$

$$g(x) = \frac{s^2}{2} \Rightarrow \langle \text{grad } g(x), \gamma'(s) \rangle = s \Rightarrow \text{grad } g(x) = s\gamma'(s).$$

Por fim, note que

$$(2.1) \quad |\text{grad } g(x)| = s = \sqrt{2g(x)}.$$

Seja  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão. A Hessiana da função  $f = g \circ \varphi$  calculada no ponto  $p \in M$  e nos campos  $X, Y \in T_p M$  é dada pela expressão

$$\nabla^2 f(p)(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad } f(p), Y \rangle.$$

Seja  $\alpha$  a segunda forma fundamental da imersão  $\varphi$ . Denote por  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$  as conexões Riemannianas de  $M$  e  $\bar{M}$ , respectivamente. Então (cf. eq. 1.2, p. 26)

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X, Y) &= \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \text{grad } f - \alpha(X, \text{grad } f), Y \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \text{grad } f, Y \rangle \\ &= X \langle \text{grad } f, Y \rangle - \langle \text{grad } f, \bar{\nabla}_X Y \rangle \\ &= X \langle \text{grad } g - (\text{grad } g)^\perp, Y \rangle - \langle \text{grad } g - (\text{grad } g)^\perp, \bar{\nabla}_X Y \rangle \\ &= X \langle \text{grad } g, Y \rangle - \langle \text{grad } g, \bar{\nabla}_X Y \rangle + \langle (\text{grad } g)^\perp, \bar{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \text{grad } g, Y \rangle + \langle (\text{grad } g)^\perp, \bar{\nabla}_X Y \rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$(2.2) \quad \nabla^2 f(p)(X, Y) = \bar{\nabla}^2 g(\varphi(p))(X, Y) + \langle \text{grad } g, \alpha(X, Y) \rangle_{\varphi(p)}.$$

Agora vamos estimar a Hessiana da função  $g(x) = \frac{1}{2}d(x, x_0)^2$  em termos da curvatura da variedade ambiente quando calculada num ponto  $p \in M$  e num campo unitário  $X \in T_pM$ .

**Lema 2.1.** *Sejam  $M^m$  uma variedade Riemanniana com curvatura seccional  $K$ ,  $x_0$  e  $x$  pontos de  $M$  tais que  $x$  não pertence ao cut locus de  $x_0$  e  $\delta$  um número positivo. Considere o segmento de geodésica minimizante e normalizada  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  ligando  $x_0$  a  $x$ . Então, para todo campo de vetores unitários  $X \in T_xM$ , perpendicular a  $\gamma'(a)$ , a Hessiana da função  $g$  definida acima, em  $x$ , satisfaz  $\nabla^2 g(X, X) \geq \mu(a)$ , onde*

$$\mu(a) = \begin{cases} \delta a \cotg(\delta a), & \text{se } \max_{\gamma} K = \delta^2 \text{ e } a < \frac{\pi}{\delta} \\ 1, & \text{se } \max_{\gamma} K = 0 \\ \delta a \coth(\delta a), & \text{se } \max_{\gamma} K = -\delta^2. \end{cases}$$

*Demonstração.* Dado  $x \in M$ , seja  $X \in T_xM$  um campo unitário perpendicular a  $\gamma'(a)$  e considere uma geodésica  $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  tal que  $\sigma(0) = x$  e  $\sigma'(0) = X$ . Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, podemos levantar  $\sigma$  para  $T_{x_0}M$  por  $\exp_{x_0}^{-1}$ , já que  $x$  não está no cut locus de  $x_0$ . Ponha  $\sigma(s) = \exp_{x_0}(av(s))$ ,  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Considere a variação própria da geodésica  $\gamma(t)$ ,

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow M, f(s, t) = \exp_{x_0}(tv(s)).$$

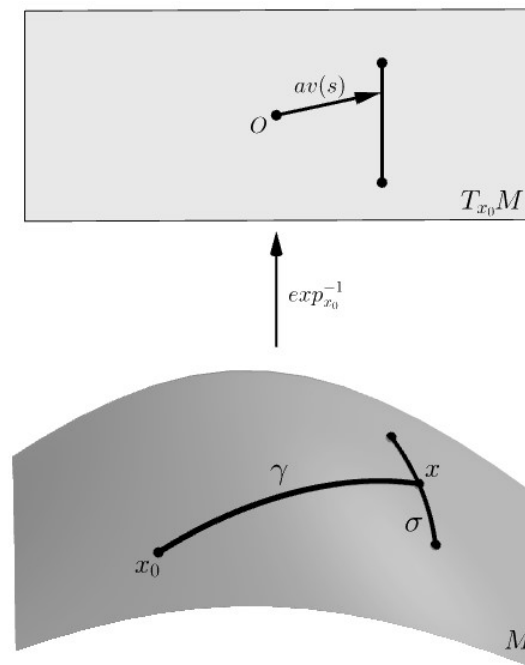


Figura 1 – Construção da geodésica  $\sigma$ .

O campo de Jacobi ao longo de  $\gamma(t)$  dado por

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = (d \exp_{x_0})_{t\gamma'(0)}(tv'(0))$$

é tal que  $J(0) = 0$ ,  $J(a) = X$  e  $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = 0$  para todo  $t$ . Considere agora a função  $g$  (definida anteriormente) ao longo de  $\sigma$ . Então

$$(g \circ \sigma)''(s) = \frac{d}{ds} \left\langle \text{grad } g, \frac{d\sigma}{ds} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{d\sigma}{ds}} \text{grad } g, \frac{d\sigma}{ds} \right\rangle + \left\langle \text{grad } g, \frac{D}{ds} \frac{d\sigma}{ds} \right\rangle.$$

Como  $\sigma'(0) = X$  e  $\sigma$  é geodésica, temos que  $(g \circ \sigma)''(0) = \nabla^2 g(X, X)$ . Por outro lado

$$(g \circ \sigma)(s) = \frac{1}{2} \left( \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right| dt \right)^2 = \frac{a}{2} \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) \right|^2 dt = \frac{a}{2} E(s),$$

onde  $E(s)$  é a energia da variação  $f$  (cf. Prop. 1.10, p. 30). Assim,  $(g \circ \sigma)''(0) = \frac{a}{2} E''(0)$  (cf. Obs. 1.5, p. 31). Logo  $\nabla^2 g(X, X) = a I_a(J, J)$ . Agora ponha, para  $\delta > 0$ ,

$$\bar{M} = \begin{cases} \mathbb{S}_\delta^m, & \text{se } \max_\gamma K = \delta^2 \\ \mathbb{R}^m, & \text{se } \max_\gamma K = 0 \\ \mathbb{H}_\delta^m, & \text{se } \max_\gamma K = -\delta^2, \end{cases}$$

onde  $\mathbb{S}_\delta^m$  e  $\mathbb{H}_\delta^m$  são, respectivamente, a esfera de curvatura  $\delta^2$  e o espaço hiperbólico de curvatura  $-\delta^2$ , ambos de dimensão  $m$ . Escolha um ponto  $\bar{x}_0 \in \bar{M}$  e uma geodésica normalizada  $\bar{\gamma}(t)$  em  $\bar{M}$ , com  $\bar{\gamma}(0) = \bar{x}_0$  e  $\bar{\gamma}(a) = \bar{x} \in \bar{M}$ . No caso em que  $\max_\gamma K = \delta^2$ , se  $a < \frac{\pi}{\delta}$ , então  $\bar{\gamma}$  não possui pontos conjugados a  $x_0$  em  $(0, a]$ . Escreva  $e_m(t) = \gamma'(t)$ ,  $\bar{e}_m(t) = \bar{\gamma}'(t)$ , considere os referenciais ortonormais formados pelos vetores paralelos  $\{e_1(t), \dots, e_m(t)\}$  e  $\{\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_m(t)\}$  ao longo de  $\gamma(t)$  e  $\bar{\gamma}(t)$ , respectivamente, e defina os campos  $J(t) = \sum_i g_i(t) e_i(t)$  e  $(\Phi J)(t) = \sum_i g_i(t) \bar{e}_i(t)$ . Agora observamos que, como  $\langle J, J \rangle = \langle \Phi J, \Phi J \rangle = \sum_i g_i^2$ ,

$$\begin{aligned} \langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle &= K|\gamma' \wedge J|^2 \\ &= K(|\gamma'|^2|J|^2 - \langle \gamma', J \rangle^2) \\ &= K \sum_i g_i(t)^2, \quad \text{pois } |\gamma'| \equiv 1 \text{ e } \langle \gamma', J \rangle \equiv 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle R(\bar{\gamma}', \Phi J)\bar{\gamma}', \Phi J \rangle &= \bar{K}|\bar{\gamma}' \wedge \Phi J|^2 \\ &= \bar{K}(|\bar{\gamma}'|^2|\Phi J|^2 - \langle \bar{\gamma}', \Phi J \rangle^2) \\ &= \bar{K} \sum_i g_i(t)^2, \quad \text{pois } |\bar{\gamma}'| \equiv 1 \text{ e } \langle \bar{\gamma}', \Phi J \rangle \equiv 0, \end{aligned}$$

onde  $\bar{K}$  é a curvatura seccional de  $\bar{M}$ . Assim, como  $K \leq \bar{K}$ ,

$$\begin{aligned} I_a(J, J) &= \int_0^a (\langle J', J' \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle) dt \\ &\geq \int_0^a (\langle \Phi J, \Phi J \rangle - \langle R(\bar{\gamma}', \Phi J)\bar{\gamma}', \Phi J \rangle) dt = \bar{I}_a(\Phi J, \Phi J). \end{aligned}$$

Defina agora o campo  $W$  ao longo de  $\bar{\gamma}$  pondo  $W(a) = (\Phi J)(a)$  e  $W(t)$  o transporte paralelo de  $W(a)$  ao longo de  $\bar{\gamma}$  de  $\bar{x}$  a  $\bar{x}_0$ . Então,  $W$  é unitário e perpendicular a  $\bar{\gamma}$ . Considere o campo de Jacobi (cf. Ex. 1.4, pp. 24-25)

$$\bar{J}(t) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\delta t)}{\text{sen}(\delta a)} W(t), & \text{se } \max_{\gamma} K = \delta^2 \\ \frac{t}{a} W(t), & \text{se } \max_{\gamma} K = 0 \\ \frac{\text{senh}(\delta t)}{\text{senh}(\delta a)} W(t), & \text{se } \max_{\gamma} K = -\delta^2. \end{cases}$$

Assim definido  $\bar{J}(0) = (\Phi J)(0) = 0$ ,  $\bar{J}(a) = (\Phi J)(a) = W(a)$  e  $\langle \bar{J}(t), \bar{\gamma}'(t) \rangle = 0$  para todo  $t$ . Pelo Lema do Índice  $\bar{I}_a(\bar{J}, \bar{J}) \leq \bar{I}_a(\Phi J, \Phi J)$ . Ou seja,  $\nabla^2 g(X, X) \geq a \bar{I}_a(\bar{J}, \bar{J})$ . Agora

$$\bar{I}_a(\bar{J}, \bar{J}) = \begin{cases} \frac{\delta^2}{\text{sen}^2(\delta a)} \int_0^a (\cos^2(\delta t) - \text{sen}^2(\delta t)) dt = \delta \cotg(\delta a), & \text{se } \bar{M} = \mathbb{S}_\delta^m \\ \int_0^a \frac{1}{a^2} dt = \frac{1}{a}, & \text{se } \bar{M} = \mathbb{R}^m \\ \frac{\delta^2}{\text{senh}^2(\delta a)} \int_0^a (\cosh^2(\delta t) + \text{senh}^2(\delta t)) dt = \delta \coth(\delta a), & \text{se } \bar{M} = \mathbb{H}_\delta^m. \end{cases}$$

Escrevendo  $\mu(a) = a \bar{I}_a(\bar{J}, \bar{J})$  como no enunciado do Lema, concluímos a demonstração.  $\square$

## 2.2 O Teorema de Omori

O Teorema de Omori é enunciado como se segue.

**Teorema 2.1** (Omori). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa e com curvatura seccional limitada inferiormente. Considere a função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  limitada superiormente. Então, dados  $q \in M$  e  $\varepsilon > 0$ , existe  $p \in M$  tal que*

- (i)  $f(p) \geq f(q)$ ,
- (ii)  $|\text{grad } f(p)| < \varepsilon$ ,
- (iii)  $\nabla^2 f(p)(X, X) < \varepsilon$  para todo  $X \in T_p M$ ,  $|X| = 1$ .

Antes de demonstrá-lo precisamos de alguns resultados preliminares. Para tanto, considere uma variedade Riemanniana completa  $M^m$  e  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica normalizada em  $M$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(a) = q$ . Suponha ainda que  $p$  não possua pontos conjugados em  $(0, a]$ . Seja  $S_p(r) = \{X \in T_p M; |X| = r\}$ . Então  $\gamma'(0) \in S_p(1)$ . Como  $\gamma$  não possui pontos conjugados, pela Proposição 1.4, p. 21, e pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe uma vizinhança  $V$  de  $\gamma'(0)$  em  $S_p(1)$  tal que  $\text{Exp}_p : (0, a + \varepsilon) \times V \rightarrow M$ ,  $\text{Exp}_p(t, X) = \exp_p(tX)$ , é um difeomorfismo para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno.

Escreva  $\mathcal{S}_p(r) = \text{Exp}_p\{S_p(r) \cap (0, a + \varepsilon) \times V\}$ . Então  $\mathcal{S}_p(r)$  é uma subvariedade de  $M$  de dimensão  $(m - 1)$ . Seja  $U = \text{Exp}_p((0, a + \varepsilon) \times V)$ .

**Lema 2.2.** *Seja  $x \in \mathcal{S}_p(r)$ ,  $0 < r \leq a$ . Toda curva em  $U$  ligando  $p$  a  $x$  tem comprimento maior ou igual que  $r$ .*

*Demonstração.* Sendo  $M$  completa, pelo Teorema de Hopf-Rinow, escolha uma geodésica minimizante e normalizada  $\gamma : [0, r] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(r) = x$ . Então, se  $c : [0, r] \rightarrow M$  for outra curva ligando  $p$  e  $x$ ,

$$\ell(c) \geq \ell(\gamma) = \int_0^r |\gamma'(t)| dt = r.$$

□

**Lema 2.3.** *Dados os pontos  $x \in \mathcal{S}_p(r)$  e  $y \in \mathcal{S}_p(a)$ , qualquer curva ligando  $x$  a  $y$  em  $U$  tem comprimento maior ou igual do que  $a - r$ .*

*Demonstração.* De fato, se  $\gamma, c : [r, a] \rightarrow M$  são, respectivamente, uma geodésica minimizante e normalizada e uma curva em  $U$  tais que  $\gamma(r) = c(r) = x$  e  $\gamma(a) = c(a) = y$ , então

$$\ell(c) \geq \ell(\gamma) \geq a - r.$$

□

Seja  $X$  um campo paralelo, unitário e tangente a  $\mathcal{S}_p(r)$  e  $\mathcal{S}_p(a)$  em  $\gamma(r)$  e  $\gamma(a)$ , respectivamente. Seja  $f$  uma variação própria e ortogonal de  $\gamma$  tal que  $X = \frac{\partial f}{\partial s}$  é o campo variacional de  $f$  (cf. [dC1], Prop. 2.2, pp. 213-214).

**Lema 2.4.** *A primeira e a segunda variações do comprimento de arco da geodésica  $\gamma$  satisfazem*

$$L'(0) = 0 \quad e \quad L''(0) = H_q(X, X) - H_{\gamma(r)}(X, X) - \int_r^a K \left( \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \geq 0,$$

onde  $H_q(X, X) = \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_q$  e  $H_{\gamma(r)}(X, X) = \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle_{\gamma(r)}$ .

*Demonstração.* De fato, pelos Lemas 2.2 e 2.3, uma geodésica é um ponto de mínimo da função comprimento de arco. O resultado segue das fórmulas para variação do comprimento de arco (cf. Prop. 1.8, p. 29). □

Agora note que, se  $h(x) = d(p, x)$ ,  $x \in M$ , então

$$\begin{aligned} \nabla^2 h^2(X, X) &= \langle \nabla_X \text{grad } h^2, X \rangle \\ &= \langle \nabla_X (2h \text{grad } h), X \rangle \\ &= 2\langle X(h) \text{grad } h, X \rangle + 2\langle h \nabla_X \text{grad } h, X \rangle \\ &= 2\langle \text{grad } h, X \rangle^2 + 2h \nabla^2 h(X, X). \end{aligned}$$



Como

$$\begin{aligned}\nabla^2 h(q)(X, X) &= \langle \nabla_X \text{grad } h(q), X \rangle \\ &= \frac{d}{ds} \langle \text{grad } h(q), X \rangle - \left\langle \text{grad } h, \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle_q \\ &= -H_q(X, X)\end{aligned}$$

então

$$\nabla^2 h^2(q)(X, X) = 2\langle \text{grad } h(q), X \rangle^2 - 2\alpha H_q(X, X).$$

**Lema 2.5.** *Se a curvatura seccional de  $M$  respeita  $K(X, Y) \geq -K_0$ ,  $K_0 > 0$ , então*

$$\nabla^2 h^2(q)(X, X) \leq 2(1 + \alpha(K_0(\alpha - r) - H_{\gamma(r)}(X, X))).$$

*Demonstração.* Pelo Lema 2.4  $H_q(X, X) \geq H_{\gamma(r)}(X, X) - K_0(\alpha - r)$ . Daí

$$\begin{aligned}\nabla^2 h^2(q)(X, X) &= 2\langle \text{grad } h(q), X \rangle^2 - 2\alpha H_q(X, X) \\ &\leq 2(|\text{grad } h(q)|^2 |X|^2 + \alpha(K_0(\alpha - r) - H_{\gamma(r)}(X, X))) \\ &= 2(1 + \alpha(K_0(\alpha - r) - H_{\gamma(r)}(X, X))),\end{aligned}$$

sendo a última igualdade válida porque a norma do gradiente da função distância é igual a 1 e  $X$  é um campo unitário.  $\square$

Seja  $f$  uma função definida em  $M$  e limitada superiormente. Ponha  $b = \sup f$ . Fixe um ponto  $p \in M$  e assuma, sem perda de generalidade, que  $f(p) = 0$ . Considere o gráfico  $\Gamma = \{(f(x), x); x \in M\}$ . Então  $\Gamma$  é uma subvariedade fechada de  $\mathbb{R} \times M$ .

**Lema 2.6.** *Seja  $\pi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  a projeção de  $\mathbb{R} \times M$  em  $M$ . Então, dada a geodésica  $\bar{\gamma}$  em  $\mathbb{R} \times M$  e dois pontos  $\bar{\gamma}(0) = (A, x)$  e  $\bar{\gamma}(t_0) = (B, y)$ ,  $t_0 \neq 0$ , vale que*

- (i)  $\gamma = \pi \circ \bar{\gamma}$  é geodésica em  $M$ ,
- (ii)  $(A, x)$  é conjugado a  $(B, y)$  se, e somente se,  $x$  é conjugado a  $y$ ,
- (iii) [Teorema de Pitágoras]  $\ell(\bar{\gamma})^2 = \ell(\gamma)^2 + (B - A)^2$ .

*Demonstração.*

(i) Escreva  $\bar{\gamma}(t) = (t, \gamma(t))$ . Então, como  $\gamma$  é geodésica,  $\frac{D\bar{\gamma}'}{dt} = 0$ . Logo  $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$ .

(ii) Suponha que  $(A, x)$  seja conjugado a  $(B, y)$  em  $\bar{\gamma}$ . Então existe um campo de Jacobi  $\bar{J}$  não-nulo ao longo de  $\bar{\gamma}$  tal que  $\bar{J}(0) = \bar{J}(t_0) = 0$ . Escreva  $\bar{J}(t) = (g(t), J(t))$ , onde  $g$  é uma função diferenciável em  $[0, t_0]$  e  $J$  é um campo diferenciável ao longo de  $\gamma$ . Projetando as  $m$  últimas coordenadas da equação de Jacobi para  $\bar{J}$ , temos

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma', J)\gamma' = 0.$$

Logo,  $J$  também é um campo de Jacobi. Precisamos agora mostrar que  $J \neq 0$ . Para isso, suponha que  $J = 0$ . Então, a função  $g$  não é constante igual a zero e, portanto,  $g$  mantém o sinal em  $(0, t_0)$ . Assim sendo, sem perda de generalidade, indiquemos que  $g(t) > 0$  para todo  $t \in (0, t_0)$ . Por ser diferenciável e estar definida em um intervalo compacto, a função  $g$  possui máximo em algum ponto  $t_1 \in (0, t_0)$ ; neste ponto temos  $g''(t_1) < 0$ . Por outro lado, da equação de Jacobi para  $\bar{J}$ , segue que  $g''(t) = 0$  para todo  $t \in (0, t_0)$ . Isto nos dá uma contradição e, portanto,  $x$  é conjugado a  $y$  em  $\gamma = \pi \circ \bar{\gamma}$ . Reciprocamente, se  $x$  é conjugado a  $y$  em  $\gamma$ , existe um campo de Jacobi  $J$  não-nulo tal que  $J(0) = J(t_0) = 0$ . Ora, sendo  $\bar{J}(t) = (g(t), J(t))$ , onde  $g$  é um função diferenciável tal que  $g(0) = g(t_0) = 0$ , a projeção na primeira coordenada do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{D^2 \bar{J}}{dt^2} + R(\bar{\gamma}', \bar{J})\bar{\gamma}' = 0$$

possui solução em  $[0, t_0]$ . Logo  $(A, x)$  é conjugado a  $(B, y)$  em  $\bar{\gamma}$ .

(iii) Escreva a geodésica  $\bar{\gamma}(t) = (t, x_1(t), \dots, x_m(t))$  em coordenadas. Note que, se escrevermos  $|\gamma'(t)| = c$  e  $|\bar{\gamma}'(t)| = d$ , temos  $d^2 - c^2 = 1$ . Além disso

$$\ell(\gamma)^2 = c^2(B - A)^2 \quad \text{e} \quad \ell(\bar{\gamma})^2 = d^2(B - A)^2.$$

Logo

$$\ell(\bar{\gamma})^2 - \ell(\gamma)^2 = (d^2 - c^2)(B - A)^2 = (B - A)^2.$$

□

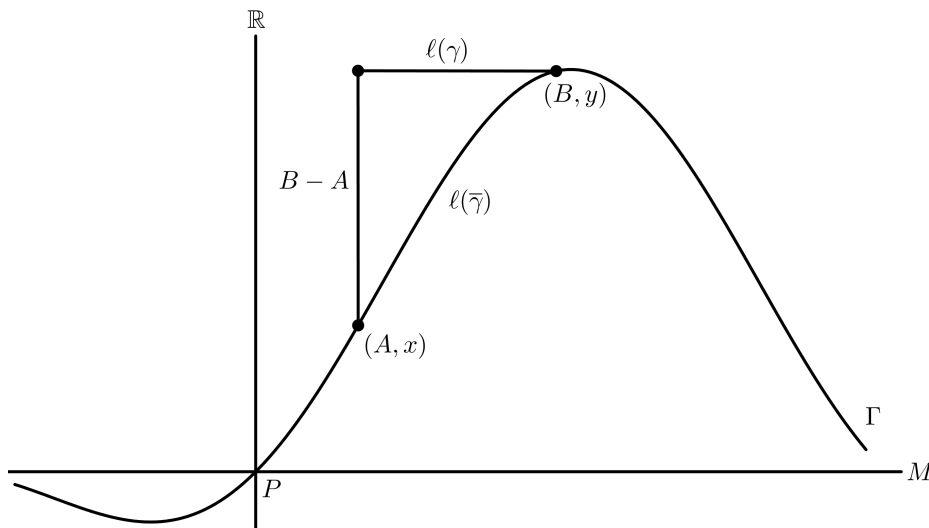


Figura 2 – Teorema de Pitágoras.

Dados o número inteiro  $k$  e o ponto  $p$  em  $M$ , considere o ponto  $p_k = (kb, p)$  e o segmento de geodésica normalizada  $\bar{\gamma}_k : [0, a_k] \rightarrow \mathbb{R} \times M$  que realiza a distância de  $\bar{\gamma}_k(0) = p_k$  até  $\Gamma$  tocando no ponto  $\bar{\gamma}_k(a_k) = (f(q_k), q_k)$ ,  $q_k \in M$ .

**Lema 2.7.** Com as notações acima, o ponto  $p_k$  não possui pontos conjugados em  $\bar{\gamma}_k$ .

*Demonstração.* Como  $\bar{\gamma}_k$  é minimizante, nenhum ponto em  $(0, a_k)$  pode ser conjugado a  $p_k$ . Suponha, então, que  $\bar{\gamma}_k(a_k)$  seja conjugado a  $p_k$ . Estenda a geodésica  $\bar{\gamma}_k$  até o ponto  $\bar{\gamma}_k(a_k + \varepsilon)$  tomando um  $\varepsilon > 0$  adequadamente pequeno de modo que a esfera de centro em  $\bar{\gamma}_k(a_k + \varepsilon)$  e raio  $\varepsilon$  intersekte  $\Gamma$  apenas no ponto  $\bar{\gamma}_k(a_k)$ . Como  $\bar{\gamma}_k(a_k)$  é um ponto conjugado, existe um segmento de geodésica  $\bar{\sigma}_k$ , ligando  $p_k$  a  $\bar{\gamma}_k(a_k + \varepsilon)$ , tal que  $\ell(\bar{\sigma}_k) \leq a_k + \varepsilon$ . Seja  $q$  um ponto na intersecção entre  $\Gamma$  e  $\bar{\sigma}_k$ . Como  $d(q, \bar{\gamma}_k(a_k + \varepsilon)) > \varepsilon$ , temos

$$a_k + \varepsilon \geq \ell(\bar{\sigma}_k) = d(p_k, q) + d(q, \bar{\sigma}_k(a_k + \varepsilon)) > d(p_k, q) + \varepsilon,$$

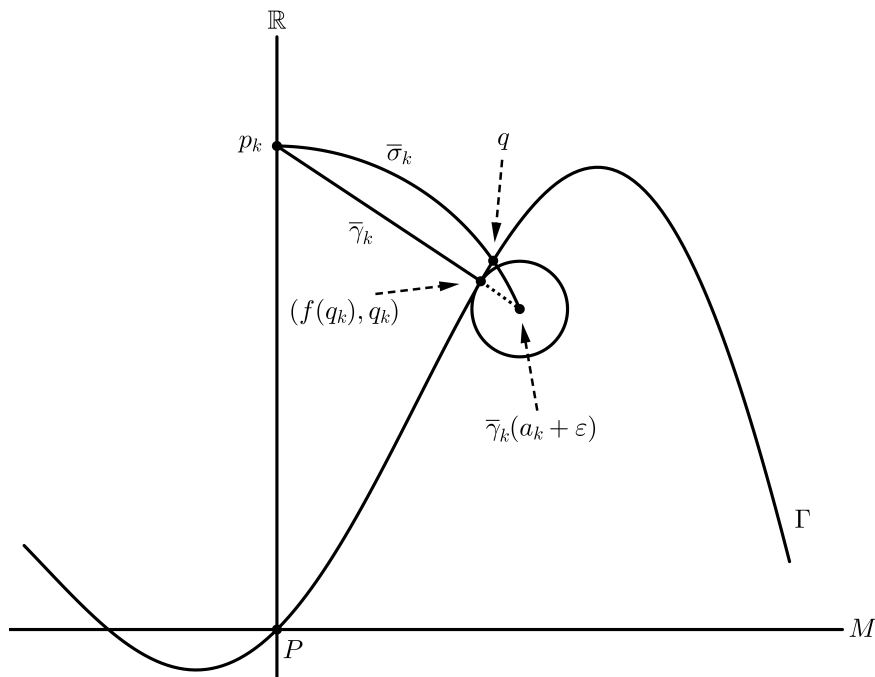


Figura 3 – Extensão da geodésica  $\bar{\gamma}_k$  até o ponto  $\bar{\gamma}_k(a_k + \varepsilon)$ .

logo  $d(p_k, q) < a_k$ , o que nos dá uma contradição, pois  $\bar{\gamma}_k(a_k)$  minimiza a distância até o gráfico.  $\square$

Portanto, pelo Lema 2.6,  $\gamma_k(t) = \pi \circ \bar{\gamma}_k(t)$ ,  $0 < t \leq a_k$ , nunca é um ponto conjugado a  $p$ . Logo, para cada  $k$ , existe uma vizinhança  $U_k$  de  $\gamma'_k(p)$  tal que  $\text{Exp}_p : (0, \ell_k + \delta_k) \times U_k \rightarrow M$  é um difeomorfismo, onde  $\ell_k = \ell(\gamma_k)$ . Ponha  $\phi(x) = \text{Exp}_p^{-1}(x)$ ,  $x \in \text{Exp}_p((0, \ell_k + \delta_k) \times U_k)$ , e defina a função  $F_k$  pondo

$$F_k(x) = kb - \sqrt{a_k^2 - |\phi(x)|^2}, \quad x \in \text{Exp}_p((0, \ell_k + \delta_k) \times U_k).$$

**Observação 2.1** Como  $x = \text{exp}_p(\phi(x)) = \gamma_k(|\phi(x)|, p, \frac{\phi(x)}{|\phi(x)|})$ , temos que  $|\phi(x)|$  é o comprimento de  $\gamma_k$  medido de  $p$  até  $x$ . Logo, como  $\gamma_k$  é uma geodésica minimizante,  $|\phi(x)|$  mede a distância de  $p$  até  $x$  em  $M$ . Portanto  $\ell_k = |\phi(q_k)|$ .

**Lema 2.8.** Com as notações acima, vale

(i)  $f(x) \leq F_k(x)$  e  $f(q_k) = F_k(q_k)$  para todo  $k$ ,

(ii)  $\nabla_x \text{grad } F_k(q_k) = \frac{1}{2} \frac{\nabla_x \text{grad } |\phi(q_k)|^2}{kb - f(q_k)} + \frac{1}{4} \frac{X(|\phi(q_k)|^2) \text{grad } |\phi(q_k)|^2}{(kb - f(q_k))^3}$ .

*Demonstração.*

(i) Como  $a_k = d(p_k, \Gamma)$ , temos

$$a_k^2 \leq d(p_k, (f(x), x))^2 = (kb - f(x))^2 + |\phi(x)|^2,$$

sendo a última igualdade validada pelo Teorema de Pitágoras e pela Observação 2.1. Assim  $f(x) \leq kb - \sqrt{a_k^2 - |\phi(x)|^2}$ , sendo a igualdade verdadeira apenas no ponto  $q_k$ , onde a distância de  $p_k$  a  $\Gamma$  se realiza.

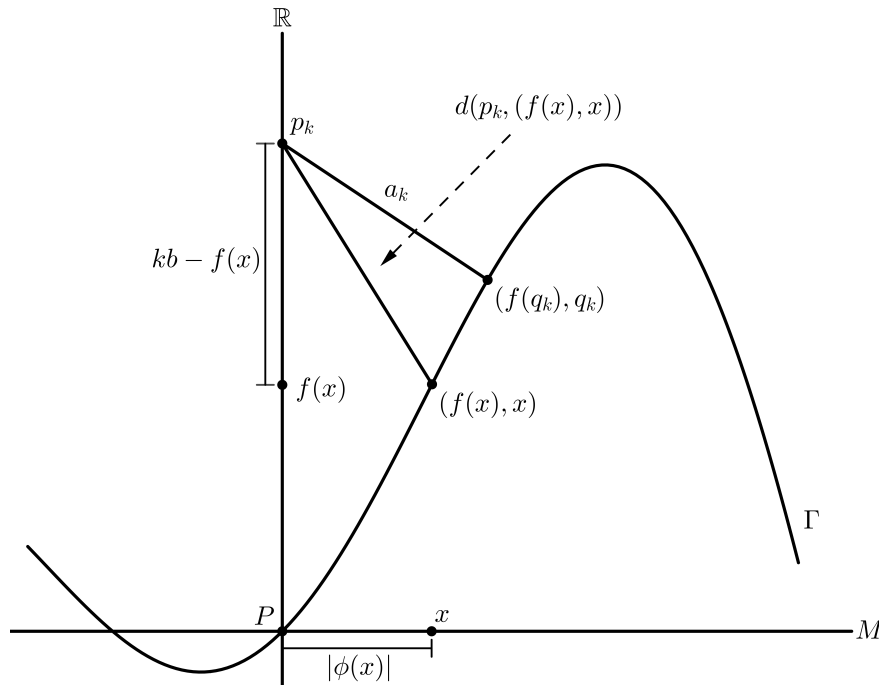


Figura 4 – Distância do ponto  $p_k$  até os pontos  $(f(x), x)$  e  $(f(q_k), q_k)$ .

(ii) Tem-se

$$(2.3) \quad \text{grad } F_k(x) = \frac{1}{2} \frac{\text{grad } |\phi(x)|^2}{\sqrt{a_k^2 - |\phi(x)|^2}}$$

e

$$\nabla_x \text{grad } F_k(x) = \frac{1}{2} \frac{\nabla_x \text{grad } |\phi(x)|^2}{\sqrt{a_k - |\phi(x)|^2}} + \frac{1}{4} \frac{X(|\phi(x)|^2) \text{grad } |\phi(x)|^2}{\sqrt{(a_k - |\phi(x)|^2)^3}}.$$

Assim, em  $x = q_k$ ,

$$\nabla_x \text{grad } F_k(q_k) = \frac{1}{2} \frac{\nabla_x \text{grad } |\phi(q_k)|^2}{kb - f(q_k)} + \frac{1}{4} \frac{X(|\phi(q_k)|^2) \text{grad } |\phi(q_k)|^2}{(kb - f(q_k))^3}.$$

□

Suponha que  $K(X, Y) \geq -K_0$ . Então, como  $q_k$  é ponto de mínimo de  $(F_k - f)(x)$ , temos  $\nabla^2 f(q_k)(X, X) \leq \nabla^2 F_k(q_k)(X, X)$ . Além disso, se assumirmos que  $|X| = 1$ , como  $\ell_k = |\phi(q_k)|$  e a norma do gradiente da função distância é igual a 1,

$$\begin{aligned} X(|\phi(q_k)|^2) &= \langle \text{grad } |\phi(q_k)|^2, X \rangle \\ &\leq |\text{grad } |\phi(q_k)|^2| |X| \\ &= 2|\phi(q_k)| |\text{grad } |\phi(q_k)|| |X| \\ &= 2\ell_k. \end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 2.5,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(q_k)(X, X) &\leq \nabla^2 F_k(q_k)(X, X) = \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 |\phi(q_k)|^2(X, X)}{kb - f(q_k)} + \frac{1}{4} \frac{X(|\phi(q_k)|^2) \langle \text{grad } |\phi(q_k)|^2, X \rangle}{(kb - f(q_k))^3} \\ &\leq \frac{1 + \ell_k(K_0(\ell_k - r) - H_{\gamma_k(r)}(X, X))}{kb - f(q_k)} + \frac{\ell_k^2}{(k-1)^3 b^3}. \end{aligned}$$

Como cada  $\gamma_k$  é um segmento de geodésica de  $p$  até  $q_k$  em  $M$ , vale que  $\gamma_k(r) \in \tilde{S}_p(r) = \{\text{Exp}_p(Y); |Y| = r\}$ . Para  $r$  suficientemente pequeno,  $\tilde{S}_p(r)$  é uma subvariedade de  $M$ . Escreva  $d = \min\{H_q(X, X); q \in \tilde{S}_p(r), |X| = 1\}$ . Então

$$(2.4) \quad \nabla^2 f(q_k)(X, X) \leq \frac{1}{kb - f(q_k)} (K_0 \ell_k^2 - (rK_0 + d)\ell_k + 1) + \frac{\ell_k^2}{(k-1)^3 b^3}, \quad k \geq 2.$$

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema de Omori.

*Demonstração do Teorema de Omori.*

**CASO 1.** Suponha que  $(\ell_k)$  seja uma sequência limitada. Como  $\text{grad } f(q_k) = \text{grad } F_k(q_k)$ , temos, por (2.3),

$$(2.5) \quad |\text{grad } f(q_k)| = \frac{|\phi(q_k)| |\text{grad } |\phi(q_k)||}{kb - f(q_k)} = \frac{\ell_k}{kb - f(q_k)}.$$

Sendo  $(\ell_k)$  uma sequência limitada,  $((f(q_k), q_k))$  é limitada em  $\Gamma$  e  $(q_k)$  é limitada em  $M$ ; logo, existe uma subsequência de  $(q_k)$  que converge para um  $q_\infty \in M$ . Além disso,

$$|\text{grad } f(q_\infty)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\text{grad } f(q_k)| = 0$$

e, por (2.4),

$$\nabla^2 f(q_k)(X, X) \leq 0.$$

Isto conclui o caso 1.

**CASO 2.** Suponha, agora, que  $(\ell_k)$  seja ilimitada. Assim, para  $k$  suficientemente grande, temos  $K_0 \ell_k^2 - (rK_0 + d)\ell_k + 1 \geq 0$ . Segue de (2.4) que

$$(2.6) \quad \nabla^2 f(q_k)(X, X) \leq \frac{1}{(k-1)b} (K_0 \ell_k^2 - (rK_0 + d)\ell_k + 1) + \frac{\ell_k^2}{(k-1)^3 b^3}.$$

Como estamos assumindo  $f(p) = 0$ , então  $a_k \leq kb$  e, portanto,

$$(kb - f(q_k))^2 + \ell_k^2 = a_k^2 \Rightarrow 2kb f(q_k) = (kb)^2 - a_k^2 + f(q_k)^2 + \ell_k^2 \geq 0 \Rightarrow f(q_k) \geq 0.$$

Além disso,

$$(kb - f(q_k))^2 + \ell_k^2 = a_k^2 \leq d(p_k, (f(q_j), q_j))^2 = (kb - f(q_j))^2 + \ell_j^2.$$

Logo

$$(2.7) \quad \ell_k^2 - \ell_j^2 \leq 2kb(f(q_k) - f(q_j)) - (f(q_k)^2 - f(q_j)^2).$$

Agora, como  $\ell_k \rightarrow \infty$ , dado  $k$ , reordenando a sequência se necessário, existem  $k'$  e  $k''$ , com  $k < k'' < k'$ , tais que  $\ell_k \leq \ell_{k'}$  e  $\ell_{k''} < \ell_k$ . Se  $f(q_k) > f(q_{k'})$ , por (2.7),  $\ell_k > \ell_{k'}$ ; sendo assim,  $f(q_k) < f(q_{k'})$ . Desse modo, escolhemos uma subsequência crescente  $(k_i)$  tal que  $\ell_{k_i} \leq \ell_{k_{i+1}}$ ,  $\ell_{k'} < \ell_{k_i}$  para todo  $k_i < k'$ ,  $k_{i+1}$  e  $f(q_{k_{i+1}}) \geq f(q_{k_i})$ . Novamente por (2.7),

$$\ell_{k_{i+1}}^2 - \ell_{k_i}^2 \leq 2k_{i+1}b(f(q_{k_{i+1}}) - f(q_{k_i})).$$

Daí

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ell_{k_{i+1}}^2 - \ell_{k_i}^2}{\ell_{k_{i+1}}} \leq 2b \sum_{i=1}^{\infty} (f(q_{k_{i+1}}) - f(q_{k_i})) \leq 2b^2.$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ell_{k_{i+1}}^2 - \ell_{k_i}^2}{\ell_{k_{i+1}}}$$

é convergente.

Afirmção 1. A série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_k^2}{k(k+1)}$  é convergente.

Como  $\ell_{k'}^2 \leq \ell_{k_i}^2$  para todo  $k_i \leq k' < k_{i+1}$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_{i+1}} (\ell_{k_{i+1}}^2 - \ell_{k_i}^2) - \frac{1}{k_1} \ell_{k_1}^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k_{i+1}} \right) \ell_{k_i}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left( \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} \frac{1}{k(k+1)} \right) \ell_{k_i}^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \ell_k^2. \end{aligned}$$

Logo,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \ell_k^2$  é convergente.

Afirmção 2. Para todo  $k > 1$ , existe  $k' > k$  tal que  $\ell_{k'}^2 \leq \frac{k'+1}{\log k'}$ .

Suponha que exista  $k_0$  tal que  $\ell_{k'}^2 > \frac{k'+1}{\log k'}$  para  $k' > k_0$ . Então

$$\sum_{k'=1}^{\infty} \frac{\ell_{k'}^2}{k'(k'+1)} > \sum_{k'=k_0}^{\infty} \frac{1}{k' \log k'} = \infty.$$

Portanto,  $\ell_{k'}^2 \leq \frac{k'+1}{\log k'}$ .

Combinando o Afirmção 2, a equação (2.5) e a inequação (2.6), temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\text{grad } f(q_{k_i})| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\ell_{k_i}}{(k_i - 1)b} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k_i + 1}{(k_i - 1)b \log k_i} = 0$$

e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \nabla_X \text{grad } f(q_{k_i}) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(k_i + 1)K_0}{(k_i - 1)b \log k_i} + \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k_i + 1}{(k_i - 1)^3 b^3 \log k_i} = 0.$$

Com isto completamos a demonstração do Teorema de Omori. □

### 3 Estimativa da Curvatura de uma Subvariedade Limitada

Nesta última sessão, utilizaremos como base as seções 3, 4 e 5 de [JK].

O Teorema a seguir obtém estimativas da curvatura de uma variedade Riemanniana  $M$  imersa em uma variedade Riemanniana  $\bar{M}$  em termos da curvatura de  $\bar{M}$  e do raio da bola geodésica  $B_\lambda$  de raio  $\lambda$ .

**Teorema 3.1.** *Sejam  $M^m$  uma variedade Riemanniana completa cuja curvatura escalar é limitada inferiormente,  $\bar{M}^{m+n}$  uma variedade Riemanniana,  $n \leq m - 1$ ,  $B_\lambda \subset \bar{M}$  uma bola normal fechada de raio  $\lambda$  e  $\delta$  um número positivo. Suponha que a imersão isométrica  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  é tal que sua imagem está contida em  $B_\lambda$ .*

$$(i) \text{ Se } \max_{B_\lambda} \bar{K} = \delta^2 \text{ e } \lambda < \frac{\pi}{2\delta}, \text{ então } \min_{B_\lambda} \bar{K} + \delta^2 \cotg^2(\delta\lambda) \leq \sup_M K.$$

$$(ii) \text{ Se } \max_{B_\lambda} \bar{K} = 0, \text{ então } \min_{B_\lambda} \bar{K} + \frac{1}{\lambda^2} \leq \sup_M K.$$

$$(iii) \text{ Se } \max_{B_\lambda} \bar{K} = -\delta^2, \text{ então } \min_{B_\lambda} \bar{K} + \delta^2 \coth^2(\delta\lambda) \leq \sup_M K.$$

*Demonstração.* Denote por  $x_0$  o centro da bola normal  $B_\lambda$ . Sejam  $d$  a distância em  $\bar{M}$  e  $g : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $g(x) = \frac{1}{2} d(x_0, x)^2$  ( $g$  é diferenciável em  $B_\lambda$  desde que o *cut locus* de  $x_0$  não esteja contido em  $B_\lambda$ ). Seja  $f = g \circ \varphi$ . Então,  $f$  é diferenciável porque  $\varphi(M) \subset B_\lambda$ . Além disso,

$$f(x) < \frac{\lambda^2}{2}, \quad x \in M.$$

Se tivéssemos  $\inf_M K = -\infty$ , então, como a curvatura escalar de  $M$  é limitada inferiormente, teríamos  $\sup_M K = \infty$  e não haveria o que demonstrar. Vamos supor, portanto, que  $\inf_M K > -\infty$ . Escolha um ponto  $\bar{p} \in M$  tal que  $\varphi(\bar{p}) = \bar{x} \neq x_0$ . Pelo Teorema de Omori, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $p_k \in M$  satisfazendo

$$f(p_k) \geq f(\bar{p}) = \frac{1}{2} d(x_0, \bar{x})^2, \quad |\text{grad } f(p_k)| < \frac{1}{k}$$

$$\nabla^2 f(X, X) < \frac{1}{k} |X|^2, \quad X \in T_{p_k} M.$$

Escreva  $x_k = \varphi(p_k)$ . Seja  $\gamma_k$  o segmento de geodésica de comprimento  $s_k$  partindo de  $x_0$  e chegando em  $x_k$ . Pondo  $d(x_0, \bar{x}) = \bar{s}$  temos

$$0 < \frac{1}{2} \bar{s}^2 = f(\bar{p}) \leq f(p_k) = \frac{1}{2} s_k^2,$$

i.e,  $0 < \bar{s} \leq s_k \leq \lambda$ . Lembramos que  $|\text{grad } g(x_k)| = s_k$  (cf. eq. 2.1, p. 35). Também

$$-|\text{grad } g| |\alpha(X, X)| \leq \langle \text{grad } g, \alpha(X, X) \rangle.$$



Então, em  $p_k$ , para todo  $X \in T_{p_k}M$ , vale

$$\nabla^2 g(X, X) = \nabla^2 f(X, X) - \langle \text{grad } g, \alpha(X, X) \rangle < \frac{1}{k} |X|^2 + s_k |\alpha(X, X)|.$$

Portanto,

$$(3.1) \quad \frac{1}{s_k} \left( \frac{\nabla^2 g(X, X)}{|X|^2} - \frac{1}{k} \right) < \frac{|\alpha(X, X)|}{|X|^2}.$$

Considere a decomposição  $X = X^\perp + X^\top$ , onde  $X^\perp$  é normal a  $\text{grad } g$  e  $X^\top$  é colinear com  $\text{grad } g$ . Note que

$$\nabla^2 g(X, X) = \nabla^2 g(X^\perp, X^\perp) + 2 \nabla^2 g(X^\perp, X^\top) + \nabla^2 g(X^\top, X^\top).$$

Além disso, pondo  $X^\top = b \text{grad } g = b s_k \gamma'_k$ , temos

$$\langle X, \text{grad } g \rangle = \langle X^\perp, \text{grad } g \rangle + \langle X^\top, \text{grad } g \rangle = b s_k^2.$$

Logo,  $X^\top = \frac{\langle X, \text{grad } g \rangle}{s_k^2} \text{grad } g = \frac{\langle X, \text{grad } g \rangle}{s_k} \gamma'_k$  e, assim,

$$|X^\top| = \frac{|\langle X, \text{grad } g \rangle|}{s_k} \leq \frac{|X| |\text{grad } g|}{s_k} < \frac{|X|}{k s_k} \Rightarrow \frac{|X^\top|}{|X|} < \frac{1}{k s_k}.$$

Por outro lado,

$$1 = \frac{|X^\perp + X^\top|}{|X|} \leq \frac{|X^\perp|}{|X|} + \frac{|X^\top|}{|X|} < \frac{|X^\perp|}{|X|} + \frac{1}{k s_k} \Rightarrow 1 - \frac{1}{k s_k} < \frac{|X^\perp|}{|X|}.$$

Em todo ponto  $x \in B_\lambda$ , podemos estimar  $\nabla^2 g(X, Y)$  em  $T_x \overline{M}$  pondo

$$|\nabla^2 g(X, Y)| = |\langle L_x X, Y \rangle| \leq \|L_x\| |X| |Y|,$$

onde  $L_x$  é a transformação linear  $X \mapsto \nabla_X \text{grad } g$ . Pela continuidade de  $L_x$  e por  $B_\lambda$  ser compacto, existe  $c = \sup \{\|L_x\|; x \in B_\lambda\} < +\infty$ . Então,  $|\nabla^2 g(X, Y)| \leq c |X| |Y|$  em  $B_\lambda$ .

Agora note que

$$\begin{aligned} \frac{2 \nabla^2 g(X^\perp, X^\top) + \nabla^2 g(X^\top, X^\top)}{|X|^2} &= \frac{2 \langle \nabla_{X^\perp} \text{grad } g, X^\top \rangle + \langle \nabla_{X^\top} \text{grad } g, X^\top \rangle}{|X|^2} \\ &= \frac{2 \langle L_x(X^\perp), X^\top \rangle + \langle L_x(X^\top), X^\top \rangle}{|X|^2} \\ &\geq \frac{-2 |L_x(X^\perp)| |X^\top| - |L_x(X^\top)| |X^\top|}{|X|^2} \\ &\geq \frac{-2c |X^\perp| - c |X^\top| |X^\top|}{|X| |X|} \\ &> -\frac{3c}{k s_k}. \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{\nabla^2 g(X, X)}{|X|^2} > \frac{\nabla^2 g(X^\perp, X^\perp)}{|X|^2} - \frac{3c}{k s_k}$$

para todo campo de vetores  $X \in T_x \overline{M}$  diferente de zero. Lembramos que, pelo Lema 2.1, p. 36, tem-se

$$\frac{\nabla^2 g(X^\perp, X^\perp)}{|X|^2} = \nabla^2 g\left(\frac{X^\perp}{|X^\perp|}, \frac{X^\perp}{|X^\perp|}\right) \frac{|X^\perp|^2}{|X|^2} \geq \mu(s_k) \frac{|X^\perp|^2}{|X|^2}.$$

Como  $0 < \bar{s} \leq s_k$ , para  $k$  suficientemente grande vale que  $1 - \frac{1}{ks_k} > 0$ . Assim,

$$(3.2) \quad \frac{\nabla^2 g(X, X)}{|X|^2} > \mu(s_k) \left(1 - \frac{1}{ks_k}\right)^2 - \frac{3c}{ks_k}, \quad \text{em } x_k = \varphi(p_k).$$

Como

$$(3.3) \quad \mu(s_k) = \begin{cases} \delta s_k \cotg(\delta s_k) \geq \delta \bar{s} \cotg(\delta \lambda) > 0, & \text{se } \lambda < \frac{\pi}{2\delta} \\ 1 \\ \delta s_k \coth(\delta s_k) \geq \delta \bar{s} \coth(\delta \lambda) > 0, \end{cases}$$

temos

$$\frac{\nabla^2 g(X, X)}{|X|^2} - \frac{1}{k} > \mu(s_k) \left(1 - \frac{1}{ks_k}\right)^2 - \frac{3c}{ks_k} - \frac{1}{k} > 0$$

para  $k$  suficientemente grande. Portanto, por (3.1),  $\alpha(X, X) \neq 0$ . Agora escolhemos vetores  $X$  e  $Y$  como no Lema 1.4, p. 28, multiplicamos termo-a-termo a desigualdade (3.1) e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_k^2} \left( \mu(s_k) \left(1 - \frac{1}{ks_k}\right)^2 - \frac{3c}{ks_k} \right)^2 &< \frac{|\alpha(X, X)| |\alpha(Y, Y)|}{|X|^2 |Y|^2} \\ &= \frac{\langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - |\alpha(X, Y)|^2}{|X|^2 |Y|^2} \\ &\leq \frac{\langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - |\alpha(X, Y)|^2}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}. \end{aligned}$$

Pela equação de Gauss (cf. Prop. 1.7, p. 27), em  $x_k = \varphi(p_k)$ , para  $k$  grande, o plano  $\tau$  gerado por  $X$  e  $Y$  satisfaz

$$(3.4) \quad 0 < \frac{1}{s_k^2} \left( \mu(s_k) \left(1 - \frac{1}{ks_k}\right)^2 - \frac{3c}{ks_k} \right)^2 < K(\tau) - \overline{K}(\tau).$$

Segue que

$$\min_{B_\lambda} \overline{K} + \frac{1}{ks_k} \left( \mu(s_k) \left(1 - \frac{1}{ks_k}\right)^2 - \frac{3c}{ks_k} \right)^2 < \sup_M K.$$

Considerando uma subsequência convergente de  $(s_k)$ , temos

$$0 < \bar{s} \leq \lim s_k =: \bar{\lambda} \leq \lambda.$$

Daí

$$\min_{B_\lambda} \overline{K} + \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \mu(\bar{\lambda})^2 \leq \sup_M K.$$

Logo, como nos três casos considerados vale

$$\frac{1}{\lambda^2} \mu(\bar{\lambda})^2 \geq \begin{cases} \delta^2 \cotg^2(\delta\lambda) \\ \frac{1}{\lambda^2} \\ \delta^2 \coth^2(\delta\lambda), \end{cases}$$

concluimos a demonstração.  $\square$

Uma *variedade de Hadamard* é uma variedade Riemanniana  $M$  completa e simplesmente conexa cuja curvatura seccional é não-positiva.

**Teorema 3.2** (Jorge-Koutrofiotis). *Sejam  $M^m$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura escalar limitada inferiormente,  $\bar{M}^{m+n}$ ,  $n < m - 1$ , uma variedade de Hadamard e  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão isométrica satisfazendo  $K(\tau) \leq \bar{K}(\tau)$  em todo ponto de  $M$  e para todos os planos  $\tau$  que passam por ele. Então  $\varphi(M)$  é ilimitada em  $\bar{M}$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $\varphi(M)$  fosse limitada. Então  $\varphi(M)$  estaria contida numa bola normal. Por (3.4), existiriam um ponto de  $M$  e um plano  $\tau$  passando por ele tal que  $K(\tau) > \bar{K}(\tau)$ . Isto nos dá uma contradição.  $\square$

Em particular, se  $M^m$  for compacta, não existe imersão isométrica em uma variedade de Hadamard  $\bar{M}^{m+n}$ ,  $n \leq m - 1$ , que satisfaça  $K(\tau) \leq \bar{K}(\tau)$  em todo ponto.

**Teorema 3.3.** *Seja  $\bar{M}^{m+n}$ ,  $n \leq m - 1$ , uma variedade de Hadamard cuja curvatura seccional satisfaz  $a \leq \bar{K} \leq b \leq 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Seja  $M^m$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura escalar limitada inferiormente e curvatura seccional satisfazendo  $K \leq a - b$ . Se  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  é uma imersão isométrica, então  $\varphi(M)$  é ilimitada.*

*Demonstração.* Suponha que  $\varphi(M)$  esteja contido em alguma bola normal  $B_\lambda$ .

(i) Se  $a \leq \min_{B_\lambda} \bar{K} \leq \max_{B_\lambda} \bar{K} = 0$ , então, pela equação (ii) do Teorema 3.1,

$$a \leq \min_{B_\lambda} \bar{K} < \min_{B_\lambda} \bar{K} + \frac{1}{\lambda^2} \leq \sup_M K.$$

(ii) Se  $a \leq \min_{B_\lambda} \bar{K} \leq \max_{B_\lambda} \bar{K} = -\delta^2 \leq b < 0$ ,  $\delta > 0$ , então, pela equação (iii) do Teorema 3.1,

$$a - b < a - b \coth^2(\delta\lambda) \leq \min_{B_\lambda} \bar{K} + \delta^2 \coth^2(\delta\lambda) \leq \sup_M K.$$

Em ambos os casos obtemos contradições.  $\square$

Seja  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão isométrica entre as variedades Riemannianas  $M$  e  $\bar{M}$ . Agora estamos interessados em limitar superiormente o raio  $\lambda$  da bola normal  $B_\lambda \subset \bar{M}$ , que contém  $\varphi(M)$ , em termos da norma do vetor curvatura média. Antes, para podermos usar o Teorema de Omori, precisamos do seguinte Lema:

**Lema 3.1.** *Sejam  $M^m$  e  $\bar{M}^{m+n}$  variedades Riemannianas. Assuma que a curvatura escalar de  $M$  seja limitada inferiormente. Se existe uma imersão isométrica  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  tal que o vetor curvatura média  $H$  satisfaz  $|H| < H_0$ , onde  $H_0$  é uma constante positiva, e  $\varphi(M) \subset B$ , com  $B$  compacta, então a curvatura seccional de  $M$  é limitada em valor absoluto.*

*Demonstração.* Suponha que  $\inf \text{Scal} = a > -\infty$ . Considere um ponto  $p \in M$  e uma base ortonormal  $\{X_1, \dots, X_m\}$  de  $T_p M$ . Então, pela equação de Gauss,

$$\sum_{ij} K(X_i, X_j) = \sum_{ij} (\bar{K}(X_i, X_j) + \langle \alpha(X_i, X_i), \alpha(X_j, X_j) \rangle - |\alpha(X_i, X_j)|^2).$$

Assim, pela Observação 1.4, p. 26,

$$\text{Scal}(p) = \sum_{i \neq j} \bar{K}(X_i, X_j) + m^2 |H|^2 - |\alpha|^2.$$

Daí,

$$|\alpha|^2 \leq \max_B \bar{K} + m^2 H_0^2 - a = \text{const}.$$

Portanto, considerando um plano arbitrário gerado pelos vetores  $X$  e  $Y$  em  $\varphi(p)$ ,

$$\begin{aligned} |K(X, Y)| &\leq |\bar{K}(X, Y)| + |\langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle| + |\alpha(X, Y)|^2 \\ &\leq \max_B \bar{K} + 2|\alpha|^2 = \text{const}. \end{aligned}$$

□

Agora estamos prontos para demonstrar o

**Teorema 3.4.** *Sejam  $M^m$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura escalar limitada inferiormente,  $\bar{M}^{m+n}$  uma variedade Riemanniana arbitrária,  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão isométrica e  $\delta$  um número positivo. Suponha que  $\varphi(M) \subset B_\lambda$  e  $|H| < H_0$ .*

(i) Se  $\max_{B_\lambda} \bar{K} = \delta^2$  e  $\lambda < \frac{\pi}{2\delta}$ , então  $\lambda \geq \frac{1}{\delta} \text{tg}^{-1} \left( \frac{\delta}{H_0} \right)$ .

(ii) Se  $\max_{B_\lambda} \bar{K} = 0$ , então  $\lambda \geq \frac{1}{H_0}$ .

(iii) Se  $\max_{B_\lambda} \bar{K} = -\delta^2$ , então  $\delta < H_0$  e  $\lambda \geq \frac{1}{\delta} \text{tg}^{-1} h \left( \frac{\delta}{H_0} \right)$ .

*Demonstração.* Considere uma base ortonormal  $\{X_1, \dots, X_m\}$  de  $T_{p_k} M$ , onde  $(p_k)$  é uma sequência construída usando o Teorema de Omori como na demonstração do Teorema 3.1. Pondo  $X = \sum X_i$ , para  $f = g \circ \varphi$ , (cf. eq. 2.2, p. 35)

$$(3.5) \quad \sum_i \bar{\nabla}^2 g(X_i, X_i) + \langle \text{grad } g, mH \rangle = \sum_i \nabla^2 f(X_i, X_i) < \frac{m}{k},$$

pois, tomando um referencial ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$  que é normal a  $M$ ,

$$\begin{aligned}\alpha(X, X) &= \sum_i \alpha(X_i, X_i) \\ &= \sum_{ik} H_k(X_i, X_i) E_k \\ &= \sum_{ik} \langle S_k(X_i), X_i \rangle E_k \\ &= \sum_k (\text{tr } S_k) E_k \\ &= mH,\end{aligned}$$

onde  $H_k = H_{E_k}$  (cf. Obs. 1.4, p. 26). Como  $|H| < H_0$  e  $|\text{grad } g| = s_k$ , pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$(3.6) \quad -ms_k H_0 \leq \langle \text{grad } g, mH \rangle.$$

De (3.2), (3.5) e (3.6), segue que

$$\begin{aligned}m \left( \mu(s_k) \left( 1 - \frac{1}{ks_k} \right)^2 - \frac{3c}{ks_k} \right) &< \sum_i \bar{\nabla}^2 g(X_i, X_i) \\ &< \frac{m}{k} - \langle \text{grad } g, mH \rangle \\ &\leq \frac{m}{k} + ms_k H_0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\mu(s_k) \left( 1 - \frac{1}{ks_k} \right)^2 - \frac{3c}{ks_k} - \frac{1}{k} < s_k H_0.$$

Tomando uma subsequência convergente de  $(s_k)$  e fazendo  $k \rightarrow \infty$ , obtemos  $s_k \rightarrow \bar{\lambda} \leq \lambda$  e  $\mu(\bar{\lambda}) \leq \bar{\lambda} H_0$ . Assim:

(i) Quando  $\max_{B_\lambda} \bar{K} = \delta^2$ , para  $\lambda < \frac{\pi}{\delta}$ ,

$$\delta \cotg(\delta\lambda) \leq \delta \cotg(\bar{\lambda}\delta) \leq H_0,$$

já que a cotangente é decrescente. Se  $\lambda < \frac{\pi}{2\delta}$ , então  $\cotg(\delta\lambda) > 0$  e, assim,  $\text{tg}(\delta\lambda) \geq \frac{\delta}{H_0}$ . Sendo a inversa da tangente uma função crescente,  $\lambda \geq \frac{1}{\delta} \text{tg}^{-1} \left( \frac{\delta}{H_0} \right)$ .

(ii) Quando  $\max_{B_\lambda} \bar{K} = 0$ ,  $\mu(\bar{\lambda}) = 1$ . Então,  $1 \leq \bar{\lambda} H_0 \leq \lambda H_0$ , logo  $\lambda \geq \frac{1}{H_0}$ .

(iii) Quando  $\max_{B_\lambda} \bar{K} = -\delta^2$ , temos

$$\delta < \delta \coth(\delta\lambda) \leq \delta \coth(\bar{\lambda}\delta) \leq H_0,$$

i.e.,  $\delta < H_0$  e  $\text{tgh}(\delta\lambda) \geq \frac{\delta}{H_0}$ . Como  $\frac{\delta}{H_0} < 1$ , existe a inversa da tangente hiperbólica e, daí,  $\lambda \geq \frac{1}{\delta} \text{tgh}^{-1} \left( \frac{\delta}{H_0} \right)$ .

□

# Referências

- [D] M. Djaczer. Submanifolds and Isometric Immersions. Mathematical Lecture Series 13. 1990.
- [dC1] M. P. DO CARMO. Geometria Riemanniana. 5ed. Coleção Projeto Euclides, 2011.
- [dC2] M. P. DO CARMO. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 5 ed. Textos Universitários, 2012.
- [JK] L. JORGE & D. KOUTROUFIOTIS. An Estimate for the Curvature of Bounded Submanifolds. American Journal of Mathematics, Vol. 103, No. 4, 1981.
- [KN] S. KOBAYASHI & K. NOMIZU. Foundations of Differential Geometry, vol. II. Interscience Publishers, 1969.
- [O] H. OMORI. Isometric Immersions of Riemannian Manifolds. Journal of the Mathematical Society of Japan. Vol. 19, No. 2, 1967.

# Índice

- Aplicação exponencial, 21
- Campo
  - de Jacobi, 24
  - paralelo, 19
  - variacional, 28
- Comprimento de uma curva, 19
- Conexão
  - afim, 18
  - compatível com a métrica, 18
  - Riemanniana, 19
  - simétrica, 19
- Curvatura, 21
  - escalar, 22
  - seccional, 22
- Derivada covariante, 18
- Distância Riemanniana, 21
- Equação
  - de Gauss, 27
  - de Jacobi, 24
- Fibrado tangente, 20
- Forma do índice, 31
- Geodésica, 20
- Hessiana de uma função, 35
- Imersão, 17
- Isometria, 17
- Lema
  - de Homogeneidade, 20
  - de Simetria, 22
  - do Índice, 31
- Métrica
  - induzida, 18
  - Riemanniana, 17
- Ponto conjugado, 25
- Segunda forma fundamental, 26
- Superfície parametrizada, 22
- Teorema
  - de Hopf-Rinow, 21
  - de Jorge-Koutroufiotis, 50
  - de Levi-Civita, 19
  - de Omori, 38
- Transporte paralelo, 19
- Variação, 28
  - Função comprimento de arco de uma, 28
  - Função energia de uma, 28
  - ortogonal, 28
  - própria, 28
- Variedade
  - completa, 21
  - de Hadamard, 50
  - imersa, 17
  - Riemanniana, 17
- Vetor curvatura média, 26